

<sup>1</sup>Д-р техн. наук, старший науковий співробітник, професор кафедри програмного забезпечення Інституту комп'ютерних наук та інформаційних технологій Національного університету «Львівська політехніка», Львів, Україна  
<sup>2</sup>Канд. техн. наук, старший науковий співробітник відділу геоелектромагнітних методів Карпатського відділення Інституту геофізики ім. С. І. Субботіна НАНУ, Львів, Україна

## РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРУЖНОДИНАМІЧНОЇ ЗАДАЧІ У ПОРИСТОМУ ФЛЮІДОНАСИЧЕНОМУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ПІВПРОСТОРИ НЕПРЯМИМ МЕТОДОМ ПРИГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

**Актуальність.** Розв'язуючи різноманітні прикладні задачі інженерної та нафтогазової геології, геофізики та геодинаміки, дослідники часто використовують методи, що базуються на явищі сейсмoeлектричного ефекту 2 роду, оскільки електромагнітне поле електродинамічного походження набагато інформативніше, ніж сейсмічне, що його породило, і дозволяє визначати важливі петрофізичні параметри (наприклад, пористість та флюїдопроникність) геологічного середовища. На першому етапі дослідження цього ефекту виникає необхідність розв'язування пружнодинамічної задачі, об'єктом дослідження якої є процеси поширення пружних хвиль у пористих вологонасичених кусково-однорідних середовищах. Ця задача також має самостійне значення при моніторингу екобезпеки внаслідок карстопроявів, землетрусів, фільтрації атмосферних опадів на схилах та іншими явищами.

**Мета роботи.** Побудова математичної моделі поширення пружних хвиль у кусково-однорідних середовищах; створення програмних засобів для її числової реалізації та апробація її ефективності; проведення числових досліджень залежності розподілу компонент переміщень на границі півпростору від параметрів середовища.

**Метод.** Для створення математичної моделі задачі використано теорію Біо, а для побудови її числово-аналітичного розв'язку – непрямий метод приграничних елементів, який базується на теорії методів граничних інтегральних рівнянь.

**Результати.** Розроблено програмне забезпечення, яке реалізує метод приграничних елементів для чисельно-аналітичного моделювання пружнодинамічної задачі, та обґрунтовано його ефективність. Проведено обчислювальні експерименти для оцінки похибок дискретизації приграничної області та апроксимації математичної моделі.

**Висновки.** Досліджено вплив зміни флюїдопроникності та пористості включення у формі паралелепіпеда на розподіл компонент переміщень на границі півпростору. Наведено практичні рекомендації по розпізнаванню включень.

**Ключові слова:** непрямий метод приграничних елементів, сейсмoeлектричний ефект 2-го роду, пружнодинамічна задача, кусково-однорідні середовища Біо, поперечні хвилі, повздовжні хвилі.

### НОМЕНКЛАТУРА

НМГЕ – непрямий метод граничних елементів та;  
 НМПГЕ – непрямий метод приграничних елементів;  
 СЕ – сейсмoeлектричний ефект;  
 СЛАР – система лінійних алгебричних рівнянь;  
 СФР – спеціальний фундаментальний розв'язок;

$K_m, K_{mf}, K_{mc}$  – модулі всестороннього стиску твердої фази, рідкої фази, сухого скелету;

$R^3$  – півпростір;

$P$  – хвилі (первинні хвилі) – поздовжні або компресійні хвилі;

$P_m, Q_m, R_m, D_m^s, D_m^p$  – коефіцієнти з рівняння Біо;

$S$  – хвилі (вторинні хвилі, хвилі зсуву) – поперечні хвилі;

$U^{mq}(\mathbf{x}, \xi)$  та  $U_h^{mq}(\mathbf{x}, \xi)$  – фундаментальний та спеціальний фундаментальний розв'язок;

$U_{,l}^{mq}(\mathbf{x}, \xi)$ ,  $U_{h,l}^{mq}(\mathbf{x}, \xi)$  – похідні по  $l$  компоненті від  $U^{mq}(\mathbf{x}, \xi)$  та  $U_h^{mq}(\mathbf{x}, \xi)$ ;

$V$  – кількість приграничних елементів;

$d_{kv}^{(mq)}$  – компоненти функцій невідомих переміщень

на елементі  $v$  у  $\Omega_m$  для типу хвиль  $q$ ;

$h$  – товщина приграничної області;

$k_{m0}$  та  $k_m(\omega)$  – проникність в стаціонарному полі та у  $\Omega_m$ ;

$k_{ms}, k_{mpj}$  – хвильові числа з рівняння Гельмгольца у

$\Omega_m$  для  $S$  хвиль та  $Pj$ ;

$n_l(\mathbf{x})$  – компоненти зовнішньої однозначно визначеної нормалі до межі геосередовища  $\Omega_1$ ;

$\mathbf{u}^{(m)}$ ,  $\mathbf{u}_f^{(m)}$  – переміщення твердої й рідкої фаз середовища та включення у  $\Omega_m$ ;

$u_{gk}^{(mq)}$  – компоненти функції джерела;

$v$  – номер елементу;

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  – декартові координати;

$\Omega$  – півпростір;

$\Omega_m$  – область з номером  $m$ ;

$\Gamma$  та  $\Gamma_m$  – границя півпростору та границя  $\Omega_m$ ;

$\Delta$  та  $\delta$  – абсолютна та відносна похибки;

$\alpha_{mj}$  та  $\beta_m$  – швидкості  $j$ -ї поздовжньої та поперечної хвиль у  $\Omega_m$ ;

$\alpha_{m\infty}$  – звивистість пор у  $\Omega_m$ ;

$\eta_m$  – в'язкість рідини у  $\Omega_m$ ;

$\mu_{mc}$  – модуль зсуву скелету у  $\Omega_m$ ;

$\rho_{mf}$  та  $\rho_m$  – густина рідкої та твердої фази;

$\phi_m$  – пористість середовища у  $\Omega_m$ ;

$\sigma_{Bkl}^{(1q)}(\mathbf{x})$  – компоненти тензора напружень;

$\omega_{mb}$  – критична частота Біо у  $\Omega_m$

$\omega$  – частота.

## ВСТУП

Земна кора є пористою поліфазною структурою складної будови, яка містить тверду, рідку і газоподібну фази і знаходиться в енергетично нестійкому стані. У ній, внаслідок дії пружних фізичних полів природного чи штучного походження, виникають різноманітні складні фізико-хімічні процеси, які, у свою чергу, спричиняють вторинне багатоконтактне електромагнітне поле. Таке явище називають сейсмоелектричним ефектом (СЕ) другого роду. Основна галузь його застосування – це вивчення верхньої частини геологічного розрізу при розв'язуванні малоглибинних інженерних екологічних та гідрогеологічних задач та каротажні дослідження нафтогазових та гідрогеологічних свердловин [1–6].

Як відомо з [7], розв'язок задачі сейсмоелектрики стосовно ефекту другого роду знаходиться в результаті спільного розв'язування пружно-динамічної задачі для пористого флюїдонасиченого середовища (задачі Біо), електрокінетичної задачі визначення сторонніх струмів, породжених відносним рухом рідкої і твердої фази в середовищі Біо, та електродинамічної задачі визначення електромагнітного поля, породженого цими сторонніми струмами (рівнянь Максвелла). При цьому вивчаються характеристики пружних хвиль, які по-різному залежать від петрофізичних, пружних та електричних властивостей середовища і тому здатні надати різноманітну і багату геофізичну інформацію, зокрема, відомості про пористість та проникність гірських порід, про тип флюїду у породі та про його мінералізацію. Пружно-динамічна задача полягає у визначенні усіх компонент переміщень трьох пружних хвиль: однієї поперечної  $S$  хвилі та двох поздовжніх  $P1$  та  $P2$  хвиль.

Дана робота присвячена першому з цих етапів – створенню математичних моделей процесу поширення пружних хвиль у кусково-однорідних тривимірних середовищах Біо та розробці методики розв'язування відповідної пружно-динамічної задачі. Беручи до уваги складність структури земної кори та подальшу мету – вивчення сейсмоелектричного ефекту 2-го роду, отримані моделі повинні достатньо точно описувати геометрію тривимірних об'єктів досліджень, дозволяти швидко й легко змінювати їх фізичні параметри та вивчати зміни характеристик поля, які при цьому відбуваються. Аналітичні розв'язки пружно-динамічної задачі можливі лише для обмеженого кола одномірних моделей розрізів – однорідних або шаруватих. Тому актуальним завданням є використання різних чисельних методів, зокрема непрямого методу приграничних елементів, який добре себе зарекомендував при розв'язуванні різних задач математичної фізики у тривимірних кусково-однорідних областях складної форми [8].

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо кусково-однорідний пористий півпростір, що займає у декартовій системі координат  $x_1, x_2, x_3$  об-

ласть  $\Omega = R^{3-} = \{(x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, -\infty < x_3 < 0\}$  і містить включення  $\Omega_2$ , вибране у формі паралелепіпеда. Геосередовище  $\Omega_1 = \Omega \setminus (\Omega_2 \cup \Gamma_2)$  та включення перебувають в ідеальному механічному контакті, причому  $\Gamma_2 \cap \Gamma = \emptyset$ ,  $\Gamma_2$  – межа включення  $\Omega_2$ ,  $\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, x_3 = 0\}$  – денна поверхня.

Вхідні дані. Кожна зона  $\Omega_m$  ( $m=1,2$ ) має постійні, але різні, фізичні характеристики: модуль зсуву скелету  $\mu_{ms}$ , модулі всестороннього стиску твердої й рідкої фаз і сухого скелету порід  $K_m, K_{mf}, K_{mc}$ , пористість середовища  $\phi_m$ , звивистість пор  $\alpha_{m\infty}$ , густину рідкої й твердої фаз  $\rho_{mf}, \rho_m$ , в'язкість рідин  $\eta_m$ . Флюїдопроникність середовища і включення  $k_m(\omega)$  залежить від частоти  $\omega$ .

Виходячи з рівнянь Біо та беручи до уваги лінійне наближення залежності між переміщеннями рідкої і твердої фаз, одержимо векторні рівняння Гельмгольца для компонент переміщень твердої фази поперечної та двох поздовжніх хвиль у кожній складовій півпростору:

$$\Delta \mathbf{u}^{(ms)}(\mathbf{x}) - k_{ms}^2 \mathbf{u}^{(ms)}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_g^{(ms)}(\mathbf{x}),$$

$$\Delta \mathbf{u}^{(mpj)}(\mathbf{x}) + k_{mpj}^2 \mathbf{u}^{(mpj)}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_g^{(mpj)}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

де  $k_{ms}^2 = \frac{\omega^2}{\beta_m^2}$ ,  $k_{mpj}^2 = \frac{\omega^2}{\alpha_{mj}^2}$ ,  $\beta_m^2$  – швидкості поперечних

хвиль,  $\alpha_{mj}^2$  ( $j=1,2$ ) – швидкості поздовжніх хвиль [9].

Рівняння (1) доповнимо крайовими умовами рівності нулю нормальної та тангенціальних компонент повного тензора напружень:

$$\sum_{l=1}^3 \sigma_{Bkl}^{(1s)}(\mathbf{x}) n_l(\mathbf{x}) = 0, \quad \sum_{l=1}^3 \sigma_{Bkl}^{(1pj)}(\mathbf{x}) n_l(\mathbf{x}) = 0,$$

$$k=1,2,3, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2)$$

та умовами ідеального контакту на межах поділу середовищ, тобто неперервності нормальних і тангенціальних компонент вектора переміщень твердої фази та повного тензора напружень [10, 11]:

$$u_k^{(1s)}(\mathbf{x}) = u_k^{(2s)}(\mathbf{x}), \quad u_k^{(1pj)}(\mathbf{x}) = u_k^{(2pj)}(\mathbf{x}),$$

$$k=1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (3)$$

$$\sum_{l=1}^3 \sigma_{Bkl}^{(1s)}(\mathbf{x}) n_l(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^3 \sigma_{Bkl}^{(2s)}(\mathbf{x}) n_l(\mathbf{x}),$$

$$\sum_{l=1}^3 \sigma_{Bkl}^{(1pj)}(\mathbf{x}) n_l(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^3 \sigma_{Bkl}^{(2pj)}(\mathbf{x}) n_l(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \quad (4)$$

де  $n_l(\mathbf{x})$  – компоненти вектора зовнішньої одиничної нормалі до  $\Gamma$  та межі контакту  $\Gamma_2$ .

Вихідними даними є компоненти переміщень  $u_1, u_2, u_3$  кожної з хвиль  $S, P1, P2$  у будь-якій точці геосередовища  $\Omega_1$ , включення  $\Omega_2$  та на їх границях  $\Gamma$  та  $\Gamma_2$  відповідно.

## 2 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Основи теорії пружних хвиль в пористому двофазному середовищі заклав Я. І. Френкель [12], який дав перший теоретичний опис СЕ ефекту, що був відкритий в 1939 р. А.Г. Івановим [13, 14]. Рівняння, які описують поширення пружних хвиль в пористому волого-(чи газо-) насиченому середовищі сформулював у 1956 р. М. Біо [15].

Через півстоліття після роботи Я. І. Френкеля, С. Прайд [16] більш строго описав задачу сейсмоелектрики з допомогою взаємозв'язаної узгодженої системи рівнянь, яка об'єднувала рівняння Біо, електрокінетики і Максвелла. Пізніше в роботах [17, 18] було запропоновано простіше формулювання цієї задачі, яке враховує нехтування малим оберненим впливом електромагнітного поля на пружне і зводиться до послідовного розв'язування рівнянь Біо, електрокінетики і Максвелла. На даний час програмно реалізовані та досліджені сейсмоелектричні задачі для горизонтально і радіально-шаруватих середовищ та приведені розрахунки для типових моделей [7] з використанням методів інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь. У роботі [19] одержано аналітичні розв'язки в рамках низькочастотної моделі для горизонтально-шаруватого середовища. У роботі [20] викладено основи теорії Біо для опису пористо-пружних насичених рідиною середовищ і проаналізовано напрямки її розвитку, приведено коротке порівняння моделей Біо і моделі пористих середовищ, побудованих на основі теорії сумішей, та розглянуто хвильові задачі, розв'язані у рамках теорії Біо.

Як покаже аналіз цих публікацій, на даний час у кусково-однорідних тривимірних областях складної форми пружно-динамічна задача не є розв'язана, і тому є актуальною.

Метод інтегральних рівнянь та створені на його базі прямі та непрямі методи граничних та приграничних [8] елементів мають низку беззаперечних переваг при моделюванні процесів у кусково-однорідних областях, оскільки точно задовольняють вихідні рівняння моделі, доступно описують необмежені і напівобмежені об'єкти та дозволяють моделювати складну поверхню геологічних об'єктів, що знаходяться у земній корі, обмежуються дискретизацією тільки границі об'єкта та меж поділу середовища, дають високу точність обчислень у внутрішніх НМГЕ та прилежових (НМПГЕ) точках.

У НМГЕ та НМПГЕ інтегральні зображення вихідного диференціального рівняння записуються через згортку його фундаментального сингулярного розв'язку з інтенсивностями «фіктивних» джерел, розподіленими на межі об'єкта або в зовнішній приграничній до нього області. Самі по собі функції інтенсивності не мають певного фізичного сенсу, але, коли вони знайдені, значення шуканої функції усередині тіла можуть бути отримані за їх допомогою простим інтегруванням.

## 3 МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИ

Для знаходження розв'язків задачі (1)–(4) використаємо НМПГЕ [8]. Для кожного  $m$  розв'язок  $u_k^{(mq)}$  шукаємо

в просторі  $R_m^3$ . З цією метою розглянемо області  $B_m \subset R_m^3$  такі, що  $\Omega_m \subset B_m, \partial\Omega_m \cap \partial B_m = \emptyset$ . У приграничних областях  $G^m = B_m \setminus \Omega_m$  введемо приграничні елементи  $G_v^m$  ( $v=1, \dots, V_m$ ), які не перетинаються між собою, з невідомими компонентами «фіктивних» переміщень, апроксимованих постійними  $d_{kv}^{(mq)}$  ( $q \in \{s, p1, p2\}$ ).

З використанням НМПГЕ запишемо інтегральне зображення компонент вектора переміщень як розв'язків задачі (1)–(4), похідних від них за координатами та компонент тензора напружень:

$$\begin{aligned}
 u_k^{(1q)}(\mathbf{x}) &= \sum_{v=1}^V d_{kv}^{(1q)} \int_{\gamma_v^1} U_{h,l}^{(1q)}(\mathbf{x}, \xi) d\gamma_v^1(\xi) + I_{gk}^{1q}(\mathbf{x}, U_{h,l}^{(1q)}), \\
 u_k^{(2q)}(\mathbf{x}) &= \sum_{v=1}^V d_{kv}^{(2q)} \int_{\gamma_v^2} U_{h,l}^{(2q)}(\mathbf{x}, \xi) d\gamma_v^2(\xi) + I_{gk}^{2q}(\mathbf{x}, U_{h,l}^{(2q)}), \\
 u_{k,l}^{(1q)}(\mathbf{x}) &= \sum_{v=1}^V d_{kv}^{(1q)} \int_{\gamma_v^1} U_{h,l}^{(1q)}(\mathbf{x}, \xi) d\gamma_v^1(\xi) + I_{gk}^{1q}(\mathbf{x}, U_{h,l}^{(1q)}), \\
 u_{k,l}^{(2q)}(\mathbf{x}) &= \sum_{v=1}^V d_{kv}^{(2q)} \int_{\gamma_v^2} U_{h,l}^{(2q)}(\mathbf{x}, \xi) d\gamma_v^2(\xi) + I_{gk}^{2q}(\mathbf{x}, U_{h,l}^{(2q)}), \quad (5) \\
 \sigma_{Bkl}^{(1q)}(\mathbf{x}) &= \mu_{1c} \sum_{v=1}^V (d_{kv}^{(1q)} \int_{\gamma_v^1} U_{h,l}^{(1q)}(\mathbf{x}, \xi) d\gamma_v^1(\xi) + \\
 &\quad + d_{lv}^{(1q)} \int_{\gamma_v^1} U_{h,k}^{(1q)}(\mathbf{x}, \xi) d\gamma_v^1(\xi)) + \\
 &\quad + \mu_{1c} (I_{gk}^{1q}(\mathbf{x}, U_{h,l}^{(1q)}) + I_{gk}^{1q}(\mathbf{x}, U_{h,k}^{(1q)})), \quad k \neq l, \\
 \sigma_{Bkk}^{(1q)}(\mathbf{x}) &= 2\mu_{1c} \sum_{v=1}^V d_{kv}^{(1q)} \int_{\gamma_v^1} U_{h,k}^{(1q)}(\mathbf{x}, \xi) d\gamma_v^1(\xi) + \\
 &\quad + D_1^q \sum_{v=1}^V \sum_{l=1}^3 d_{lv}^{(1q)} \int_{\gamma_v^1} U_{h,l}^{(1q)}(\mathbf{x}, \xi) d\gamma_v^1(\xi) + \\
 &\quad + D_1^q \sum_{v=1}^V \sum_{l=1}^3 d_{lv}^{(1q)} \int_{\gamma_v^1} U_{h,l}^{(1q)}(\mathbf{x}, \xi) d\gamma_v^1(\xi) + \\
 &\quad + 2\mu_{1c} I_{gk}^{1q}(\mathbf{x}, U_{h,k}^{(1q)}) + D_1^q \sum_{l=1}^3 I_{gk}^{1q}(\mathbf{x}, U_{h,l}^{(1q)}), \\
 \sigma_{Bkl}^{(2q)}(\mathbf{x}) &= \mu_{2c} \sum_{v=1}^V (d_{kv}^{(2q)} \int_{\gamma_v^2} U_{h,l}^{(2q)}(\mathbf{x}, \xi) d\gamma_v^2(\xi) + \\
 &\quad + d_{lv}^{(2q)} \int_{\gamma_v^2} U_{h,k}^{(2q)}(\mathbf{x}, \xi) d\gamma_v^2(\xi)) + \\
 &\quad + \mu_{2c} (I_{gk}^{2q}(\mathbf{x}, U_{h,l}^{(2q)}) + I_{gk}^{2q}(\mathbf{x}, U_{h,k}^{(2q)})), \quad k \neq l,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{Bkl}^{(2q)}(\mathbf{x}) = & \mu_{2c} \sum_{v=1}^V (d_{kv}^{(2q)} \int_{\gamma_v^2} U_{,l}^{(2q)}(\mathbf{x}, \xi) d\gamma_v^2(\xi) + \\ & + d_{lv}^{(2q)} \int_{\gamma_v^2} U_{,k}^{(2q)}(\mathbf{x}, \xi) d\gamma_v^2(\xi)) + \\ & + 2\mu_{2c} I_{gk}^{2q}(\mathbf{x}, U_{,k}^{(2q)}) + D_2^q \sum_{l=1}^3 I_{gk}^{2q}(\mathbf{x}, U_{,l}^{(2q)}), \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{де } U^{(ms)}(\mathbf{x}, \xi) = U^{(ms)}(r) = \frac{\exp(-k_{ms}r)}{4\pi r}, \quad U^{(mpj)}(\mathbf{x}, \xi) = \\ = U^{(mpj)}(r) = \frac{\exp(ik_{mpj}r)}{4\pi r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{рівнянь (1) для простору, } r^2 = \sum_{l=1}^3 (x_l - \xi_l)^2, \\ r'^2 = \sum_{l=1}^2 (x_l - \xi_l)^2 + (x_3 + \xi_3)^2, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^3, \end{aligned}$$

$$I_{gk}^{mq}(\mathbf{x}, \Phi) = \int_{\Omega_m} \Phi(\mathbf{x}, \xi) u_{gk}^{(mq)}(\xi) d\Omega_m(\xi), \quad U_h^{(1q)}(\mathbf{x}, \xi) =$$

$= U^{(1q)}(r) + U^{(1q)}(r')$  – СФР рівнянь (1) для півпростору, які автоматично задовольняють крайову умову (2),  $U_{,l}^{(mq)}(\mathbf{x}, \xi) = \partial U^{(mq)}(\mathbf{x}, \xi) / \partial x_l$ ,  $P_m, Q_m, R_m, D_m^q$  – обчислювальні параметри з рівняння Біо [20].

Для знаходження невідомих констант  $d_{kv}^{(mq)}$ , запишемо три системи лінійних алгебричних рівнянь, вимагаючи задоволення в колокаційному сенсі умов ідеального контакту (3), (4) та беручи до уваги (5), (6). Їх розв'язки потім використано у (5) для знаходження шуканих переміщень.

#### 4 ЕКСПЕРИМЕНТИ

Програмну реалізацію запропонованого чисельно-аналітичного підходу здійснено з використанням системи MATLAB та проведено низку досліджень впливу фізичних параметрів на розподіл переміщень.

Числові дослідження проводилися для випадку, коли у півпросторі містилося одне включення у формі паралелепіпеда з «центром мас» в точці  $(0, 0, h)$ ,  $h=4$ , розмірами  $2a_1, 2a_2, 2a_3$ , причому  $a_1 = a_2 = 4a_3, a_3 = 1$ . Всі геометричні параметри були безрозмірними.

Джерело хвиль розміщували в  $\Omega_1$  і для спрощення обчислень вибирали точковим з координатами  $x_{1g} = 0, x_{2g} = 0, x_{3g} = -10$ . Досліджували поширення механічних хвиль, збурених в напрямку однієї осі ( $z$ ) з частотою  $\omega = 10$  Гц. Інтенсивність джерела хвиль описувалася функцією:  $u_{3g}^q = 10^{-5}, u_{1g}^q = u_{2g}^q = 0, q = \{s, p1, p2\}$ .

Пружні характеристики середовища і включення вибирали однаковими відповідно фізичним властивостям реального геологічного середовища [7]:

$$K_1 = K_2 = 35,70 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad K_{1f} = K_{2f} = 2,25 \cdot 10^9 \text{ Па},$$

$$\begin{aligned} K_{1c} = K_{2c} = 17,91 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad \rho_{1f} = \rho_{2f} = 1000 \text{ кг/м}^3, \\ \rho_1 = \rho_2 = 2650 \text{ кг/м}^3, \quad \eta_1 = \eta_2 = 0,001 \text{ Па с}, \\ \mu_{1c} = \mu_{2c} = 17,79 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad \alpha_{1\infty} = \alpha_{2\infty} = 3, \quad M_{1B} = M_{2B} = 1. \end{aligned}$$

Середовище і включення відрізнялися лише за проникністю і пористістю:  $k_{01} = 10^{-12}, \quad \phi_1 = 0,3,$   
 $k_{02} = 0,001 \cdot 10^{-12}, \quad \phi_2 = 0,03.$

Межу паралелепіпеда розбивали на однакової форми граничні елементи у вигляді прямокутників, і на їх основі з деякою «товщиною»  $h$  будували приграничні елементи у вигляді паралелепіпедів, кожний з яких задавався 8-ма точками [8]. Кожна СЛАР складалась з  $2V$  рівнянь.

Для перевірки достовірності цієї моделі досліджено точність задоволення першої умови контакту на верхній  $(-b_1 \leq x_1 \leq b_1, -b_2 \leq x_2 \leq b_2, x_3 = x_{3g} + b_3)$  та бічних гранях паралелепіпеда. Як відомо, похибки, що виникають під час застосування НМПГЕ, зумовлені тільки процедурами апроксимації, дискретизації та числового інтегрування. Тому точність методу щодо дискретизації можна регулювати зміною товщини приграничної області та кількістю елементів. Ставилося завдання знайти оптимальне поєднання цих величин, враховуючи час обчислень, при цьому частину точок спостереження вибирали на граничних елементах у тих точках колокації, у яких задовольняли умову контакту (3) при побудові СЛАР.

#### 5 РЕЗУЛЬТАТИ

На рисунку 1а показано залежність зміни відносної похибки  $\delta = (u_3^{(1s)} - u_3^{(2s)}) / u_3^{(1s)}$  від зміни «висоти»  $h$  приграничного елемента для  $S$ -хвиль при задоволенні першої умови контакту при  $V=48$ . Розбиття на елементи здійснювали так: по 2 елементи на бічних гранях і по 8 елементів на верхній та нижній гранях. Як видно з рисунків, у точках колокації похибка відсутня, найбільша похибка спостерігається при наближенні до кінців граничних елементів.

Для хвиль типу Р представлено абсолютну похибку  $\Delta = u_3^{(1p1)} - u_3^{(2p1)}$  (рис. 1б), оскільки обчислювальні значення є близькими до нуля (порядку  $10e-9$  для  $P1$  та порядку  $10e-13$  для  $P2$ ), а використання відносно похибки спотворює результати, аналогічні графіки отримано і для  $\Delta_2 = u_3^{(1p2)} - u_3^{(2p2)}$ . На цих графіках видно, що зі збільшенням товщини елемента похибка зменшується, отже, точність обчислення зростає.

Наступне дослідження проводилося при фіксованій товщині приграничних елементів  $h=1$ , але при різній їх кількості. Графіки представлені вздовж профілю, коли  $x_1$  змінювали від  $-b_1$  до  $b_1$ , а  $x_2=1$  (рис. 2). Досліджували залежність точності задоволення першої умови контакту від кількості елементів. Як видно з графіків, при збільшенні  $V$  з 24 до 48 як відносна, так і абсолютна похибки суттєво зменшуються. При збільшенні елементів з 48 до 128 похибка практично не змінюється, але при цьому збільшується час обчислення (приблизно у 2 рази).

Аналогічні дослідження проведені для бічної сторони. Результати представлені на рисунках 3 та 4.

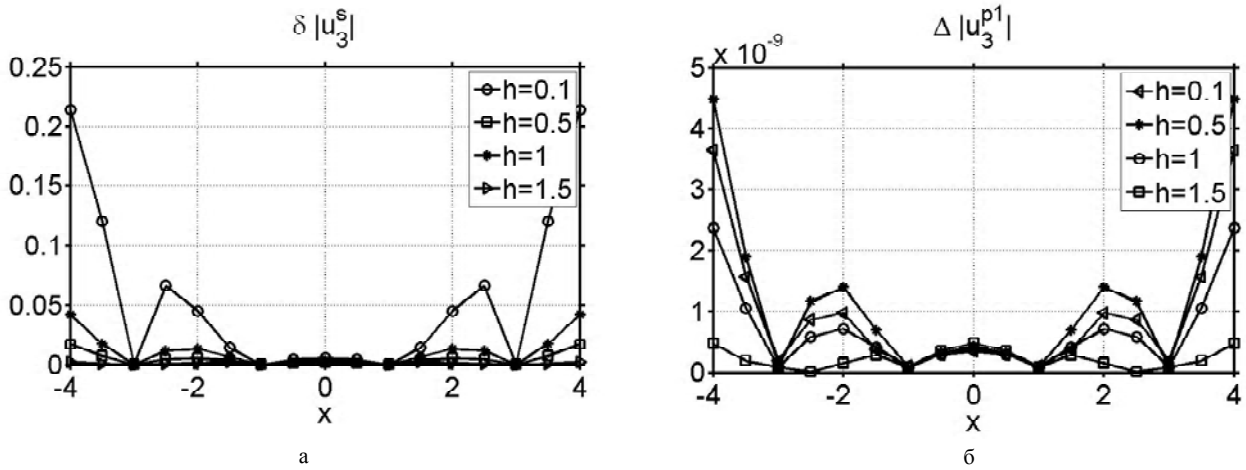


Рисунок 1 – Порівняння точності розв'язку при різних товщинах  $h$  приграничних елементів на верхній грані паралелепіпеда для  $V=48$

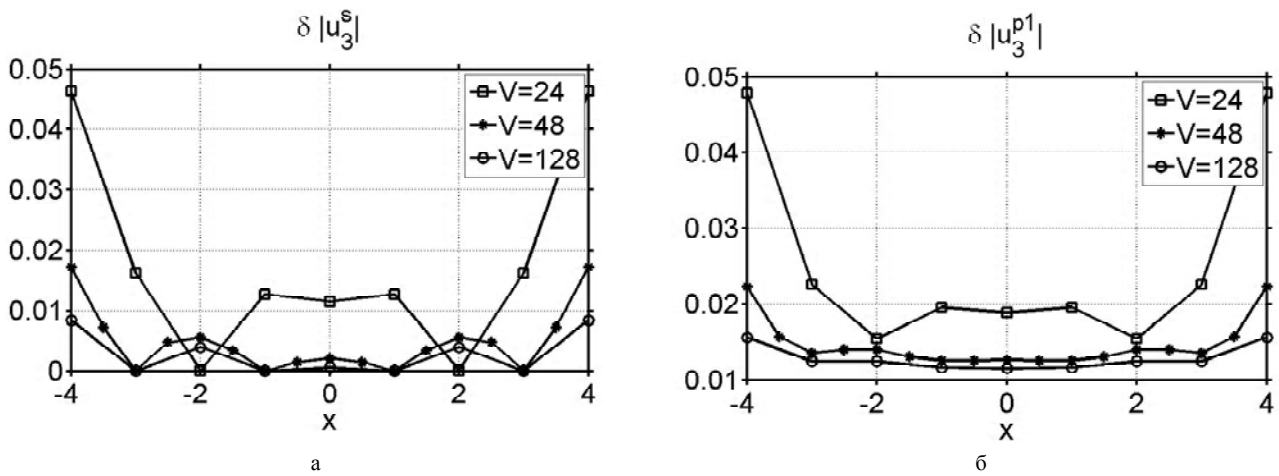


Рисунок 2 – Порівняння точності розв'язку на верхній грані паралелепіпеда при різній кількості  $V$  приграничних елементів для  $H=1$

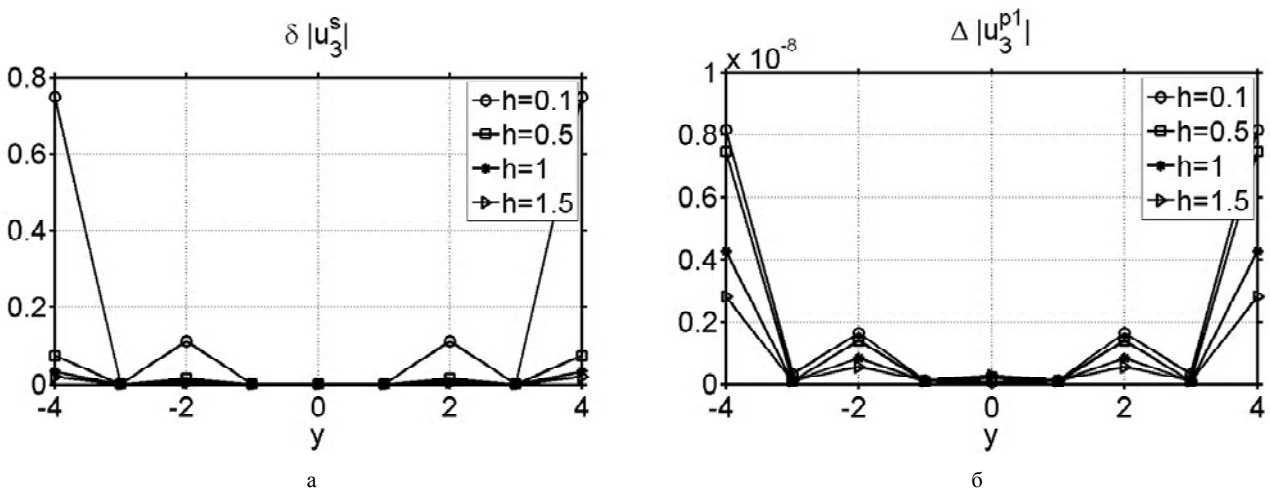


Рисунок 3 – Порівняння точності розв'язку при різній товщині  $h$  приграничних елементів на бічній грані для  $V=48$

На рисунку 5 показано результати обчислення третьої компоненти  $u_3$  функції переміщень для різних типів хвиль:  $s$  (рис. 5а),  $P1$  (рис. 5б) та  $P2$  (рис. 5в) на ділянці поверхні півпростору  $\Gamma_W = \{(x_1, x_2, x_3) : -10 < x_1 < 10, -10 < x_2 < 10, x_3 = 0\}$ . Як видно з цих рисунків графіки переміщень є симетричні відносно центру мас включен-

ня, тому результати подальших досліджень доцільно представляти по профілю  $\Gamma_p = \{(x_1, x_2, x_3) : -10 < x_1 < 10, x_2 = 0, x_3 = 0\}$ . На рисунку 5г показано співвідношення між величинами переміщень  $S$ ,  $P1$ ,  $P2$  по вказаному профілю. Як видно з цих графіків, найбільші значення переміщень мають  $P1$  хвилі, а найменші –  $P2$ .

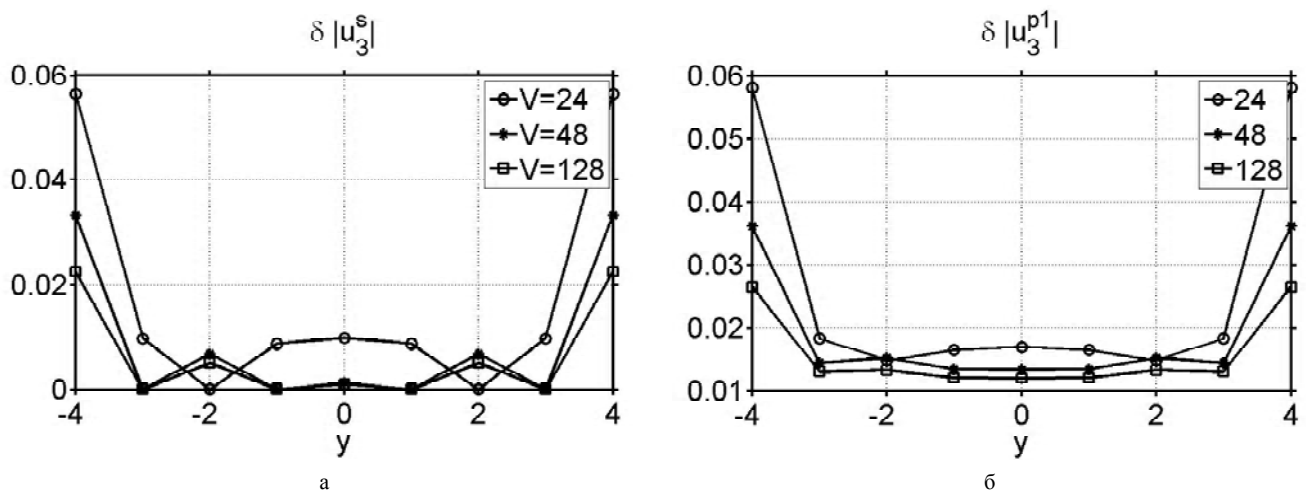


Рисунок 4 – Порівняння точності розв’язку при різній кількості приграничних елементів  $V$  на бічній грані паралелепіпеда для  $h = 1$

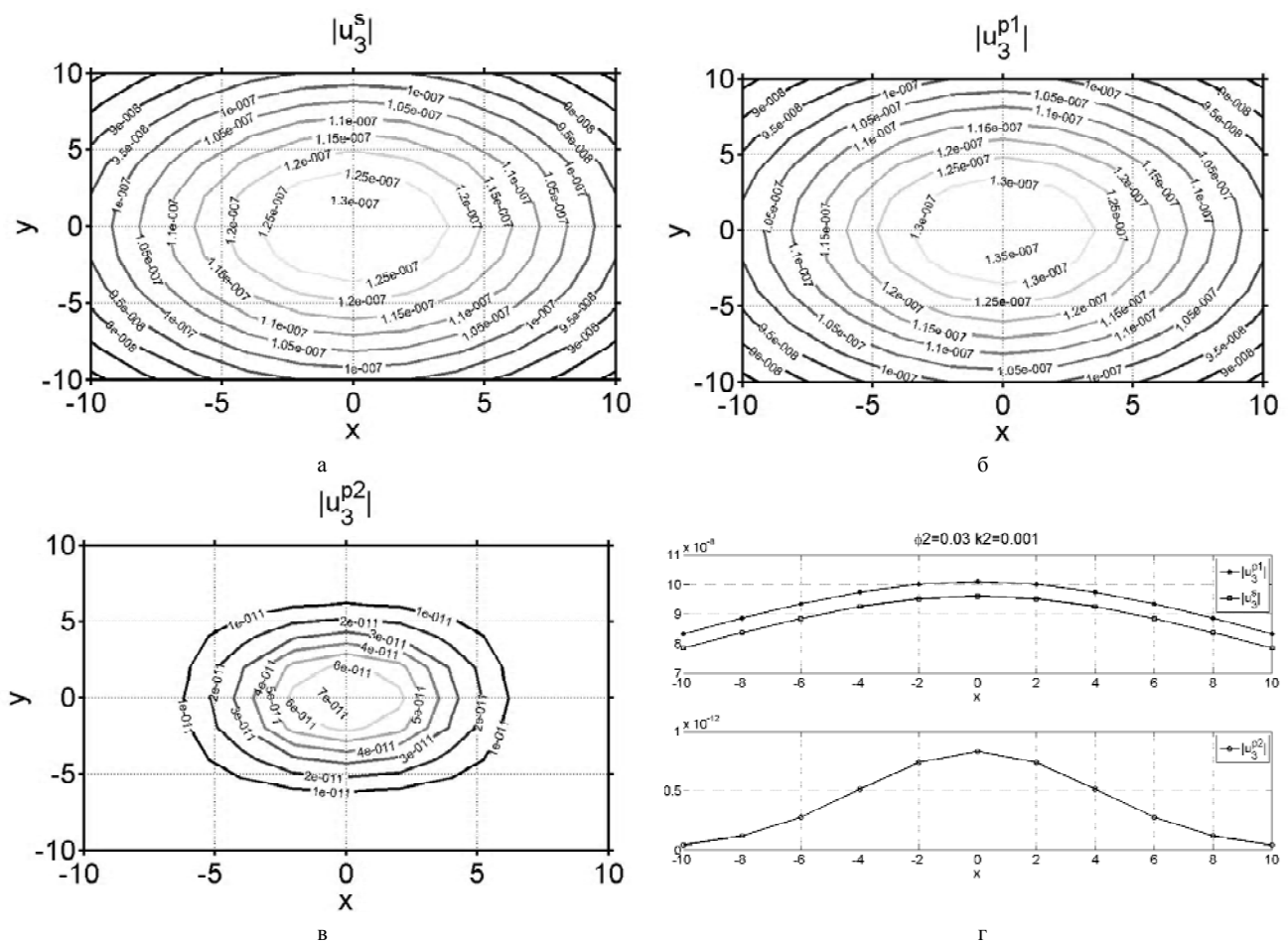


Рисунок 5 – Поля переміщень  $u_3^{(1s)}$ ,  $u_3^{(1p1)}$ ,  $u_3^{(1p2)}$ , обчислені на ділянці  $\Gamma_W$  поверхні півпростору

На рисунку 6 показано залежність зміни вертикальних компонент переміщень при зміні коефіцієнтів пористості і проникності  $k_{02}$  і  $\phi_2$ . На рис. 6а, 6б показано вплив зміни пористості при сталій флюїдопрониємності на вертикальні компоненти переміщень на ділянці  $\Gamma_W$  межі півпростору для хвиль  $S$  та  $P1$ . Як бачимо, зі збільшенням пористості значення компонент переміщень зростають, оскільки збільшується вологонасиченість, а, отже, і швидкість хвиль.

Якщо ж пористість є сталою величиною, а флюїдопрониємність змінюється, то спостерігаємо збіг на кривих  $u_3^{(1s)}(x)$  та  $u_3^{(1p1)}(x)$ , а на кривих  $u_3^{(1p2)}(x)$  – різницю (рис. 6в), отже, поздовжня повільна хвиля виявляється більш інформативною в цьому випадку.

## 6 ОБГОВОРЕННЯ

Проведені дослідження засвідчили ефективність використання НМПГЕ для розв’язку пружно-динамічної

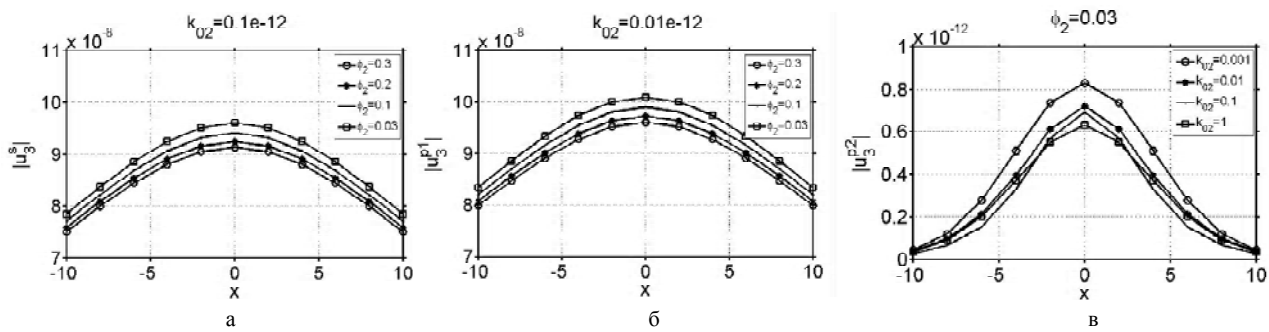


Рисунок 6 – Вплив зміни пористості при сталій флюїдопроникності на компоненти переміщень  $u_3^{(1s)}(x)$ ,  $u_3^{(1p1)}(x)$  (рис. а, б) та

зміни флюїдопроникності при сталій пористості на компоненту переміщення  $u_3^{(1p2)}(x)$  (рис. в) по профілю  $\Gamma_p$  межі півпростору

задачі. Перевагою цього методу є можливість регулювання точності обчислення за рахунок додаткового параметру (товщини приграничної області), що суттєво відрізняє НМПГЕ від НМГЕ.

У випадку однакої кількості елементів та однакового ступеня апроксимації невідомих переміщень (зокрема, константами) вища точність досягається при використанні НМПГЕ, що дозволяє обмежитись меншою кількістю елементів дискретизації, враховуючи оптимізацію числових досліджень щодо часу, зокрема, для достатньої точності обчислень вистачає 48 приграничних елементів товщиною  $h = 1$ .

Для формулювання практичних рекомендацій при розпізнаванні локальних неоднорідностей оцінено окремих та взаємний вплив пористості і флюїдопроникності включення. Встановлено залежності впливу коефіцієнтів пористості та проникності включення на вертикальні компоненти переміщень на межі півпростору. Оцінено інформативні можливості, які можуть надати кожна з трьох хвиль. Планується провести дослідження в залежності від форми включення, відстані його від границі, різних способів розташування джерела, зокрема на поверхні півпростору, оскільки це дасть можливість моделювати ряд важливих задач, що виникають при моніторингу навколишнього середовища.

## ВИСНОВКИ

Використовуючи НМПГЕ побудовано числово-аналітичну методику розв'язування пружно-динамічної задачі, яка є першим етапом при розв'язуванні задачі сейсмоелектрики. Ця методика дозволяє обчислювати усі три компоненти векторів переміщень трьох типів хвиль (поперечної  $S$  та двох повздовжних  $P1$ ,  $P2$ ) у будь-якій точці середовища. На основі запропонованого підходу у пакеті MATLAB створено програмний комплекс для проведення числових досліджень. Проведено обчислювальні експерименти для оцінки похибки дискретизації приграничної області та апроксимації математичної моделі. Досліджено залежність пористості і флюїдопроникності на розподіл компонент переміщень на границі півпростору. Дана методика може бути застосована при визначенні впливу вібраційних дій на динамічні процеси, що відбуваються у земній корі, оскільки вони можуть призвести до зсувних явищ і провалів, а також при моделюванні джерел штучних вибухів, природних землетрусів,

розміщуючи точкові та скінченні розмірів джерела різних типів та точки спостереження в будь-якому місці півпростору та на його границі.

Запропонована методика планується використовуватися для отримання даних при розв'язуванні електрокінетичної задачі визначення сторонніх струмів, породжених відносним рухом рідкої і твердої фази в середовищі Біо та розв'язування електродинамічної задачі визначення електромагнітного поля, породженого сторонніми струмами.

## ПОДЯКИ

Робота виконана у Карпатському відділенні Інституту геофізики у рамках держбюджетної науково-дослідної теми БФЦ-8 «Комплексні геофізичні дослідження для виявлення та прогнозування екобезпечних явищ».

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- Garambois S. Full waveform numerical simulations of seismoelectromagnetic wave conversions in fluid-saturated stratified porous media / S. Garambois., M. Dietrich. // Journal of Geophysical Research. – 2002. – Vol. 107, № B7, 10.1029/2001JB000316. – P. ESE 5-1–ESE 5-18.
- Gao Y. Seismoelectromagnetic waves radiated by a double couple source in a saturated porous medium / Y. Gao, H. Hu // Geophysical Journal International. – 2010. – Vol. 181. – P. 873–896.
- Schmitt D. P. Full-wave synthetic acoustic log in radially semi-infinite saturated porous media / D. P. Schmitt, M. Bouchon, G. Bonnet // Geophysics. – 1988. – Vol. 53, № 6. – P. 807–823.
- Lee T. Transient electromagnetic response of a magnetic or superparamagnetic ground / T. Lee // Geophysics. – 1984. – Vol. 49, № 7. – P. 854–860.
- Сейсмоелектрический эффект второго рода в горных породах (по данным лабораторных исследований) / [О. А. Агеева, Б. С. Светов, Г. Х. Шерман, С. В. Шипулин] // Геология и геофизика. – 1999. – Т. 40, № 8. – С. 1251–1257.
- Фридрихсберг Д. А. Исследование связи явления вызванной поляризации с электрокинетическими свойствами капиллярных систем / Д. А. Фридрихсберг, М. П. Сидорова // Вестник ЛГУ, сер. Физика и химия. – 1961. – Вып. 1, № 4. – С. 57–69.
- Светов Б. С. Основы геоэлектрики / Б. С. Светов. – Москва : Издательство ЛКИ, 2008. – 656 с.
- Журавчак Л. М. Метод приграничных элементов у прикладных задачах математичної фізики / Л. М. Журавчак, Є. Г. Грицько. – Львів : Карпатське відділення Інституту геофізики НАН України, 1996. – 220 с.
- Журавчак Л. М. Методика розв'язування задачі сейсмоелектрики стосовно ефекту другого роду у кусково-однорідному півпросторі / Л. М. Журавчак // Матеріали наукової конфе-

- ренції-семинару «Сейсмологічні та геофізичні дослідження в сейсмаактивних регіонах», Львів, 3–5 червня 2014 р. – Львів : «Сполом», 2014. – С. 42–49.
10. Журавчак Л. М. Математичне моделювання ефекту викликанної поляризації у тривимірних задачах геоелектророзвідки / Л. М. Журавчак, Н. В. Забродська // Вісник НУ «Львівська політехніка». Сер. «Комп'ютерні науки та інформаційні технології». – 2009. – № 650. – С. 158–167.
  11. Журавчак Л. М. Розпізнавання провідних та високоомних включень у кусочно-однорідному півпросторі при математичному моделюванні усталених коливань електро-магнітного поля / Л. М. Журавчак, Ю. О. Федоришин // Вісник НУ «Львівська політехніка». Сер. «Комп'ютерні науки та інформаційні технології». – 2014. – № 800. – С. 159–167.
  12. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмoeлектрических явлений во влажной почве / Я. И. Френкель // Известия АН СССР, серия географических и геофизических наук. – 1944. – Т. 8, № 4. – С. 133–150.
  13. Иванов А. Г. Сейсмoeлектрический эффект 2 рода / А. Г. Иванов // Известия АН СССР, серия географических и геофизических наук. – 1940. – № 5. – С. 699–727.
  14. Иванов А. Г. Эффект электризации пластов земли при прохождении через них упругих волн / А. Г. Иванов // Докл. АН СССР. – 1939. – Вып. 24, № 1. – С.41–43.
  15. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solids / M. A. Biot // Journal Acoustic. Soc. Amer. – 1956. – Vol. 28. – P. 168–186.
  16. Pride S. R. Governing equations for the coupled electromagnetics and acoustics of porous media / S. R. Pride // Phys. Rev., B. – 1994. – Vol. 50. – P. 15678–15696.
  17. Светов Б. С. К теоретическому обоснованию сейсмoeлектрического метода геофизической разведки / Б. С. Светов // Геофизика. – 2000. – № 1. – С. 28–39.
  18. Светов Б. С. Электромагнитное поле механо-электрического происхождения в пористых влагонасыщенных горных породах: I. Постановка задачи / Б. С. Светов, В. П. Губатенко // Физика Земли. – 1999. – № 10. – С. 67–73.
  19. Математическое моделирование сейсмoeлектрического эффекта второго рода, порождаемого плоскими упругими волнами в пористых влагонасыщенных средах / [И. Г. Московский, О. М. Балабан, О. С. Федорова, А. В. Кочетков] // Интернет-журнал «Науковедение». – 2015. – Том 7, № 1. – <http://naukovedenie.ru/PDF/04TVN115.pdf>.
  20. Городецкая Н. С. Волны в пористо-упругих насыщенных жидкостью средах / Н. С. Городецкая // Акустичний вісник. – 2014. – Т. 10, № 2. – С. 43–63.

Стаття надійшла до редакції 06.03.2017.

Після доробки 22.03.2017.

Журавчак Л. М.<sup>1</sup>, Забродская Н. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Д-р техн. наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры программного обеспечения Института компьютерных наук и информационных технологий Национального университета «Львовская политехника», Львов, Украина

<sup>2</sup>Канд. техн. наук, старший научный сотрудник отдела геоэлектромагнитных методов Карпатского отделения Института геофизики им. С. И. Субботина НАН Украины, Львов, Україна

#### РЕШЕНИЕ УПРУГО-ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В ПОРИСТОМ ФЛЮИДОНАСЫЩЕННОМ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЯМЫМ МЕТОДОМ ПРИГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**Актуальность.** При решении различных прикладных задач инженерной и нефтегазовой геологии, геофизики, геодинамики часто используются методы, базирующиеся на явлении сейсмoeлектрического эффекта 2-го рода, так как электромагнитное поле электрокинетического происхождения намного более информативнее, чем породившее его сейсмическое, и дает возможность определять важные петрофизические параметры (например, пористость и флюидопроницаемость) геологической среды. На первом этапе исследования этого эффекта возникает необходимость решения упруго-динамической задачи, объектом исследования которой являются процессы распространения упругих волн в пористых влагонасыщенных кусочно-однородных средах. Эта задача также имеет самостоятельное значение при мониторинге экологически опасных явлений деформационных процессов в почвенных массивах, особенно в горных районах, связанных с их проседанием вследствие карстопроявлений, землетрясений, фильтрации атмосферных осадков на склонах и других явлений.

**Цель работы.** Построение математической модели распространения упругих волн в кусочно-однородных средах; создание программных средств для ее числовой реализации и апробация ее эффективности; проведение численных исследований зависимости параметров среды от распределения компонент перемещений на границе полупространства.

**Метод.** Для создания математической модели задачи используется теория Био, а для построения ее численно-аналитического решения – непрямым метод приграничных элементов, базирующийся на теории методов граничных интегральных уравнений.

**Результаты.** Разработано программное обеспечение, которое реализует метод приграничных элементов для численно-аналитического моделирования упруго-динамической задачи. Проведены вычислительные эксперименты для оценки погрешностей дискретизации приграничной области и аппроксимации математической модели.

**Выводы.** Исследовано влияние изменения флюидопроницаемости и пористости включения в форме параллелепипеда на распределение компонент перемещения на границе полупространства. Приведены практические рекомендации по распознаванию включений.

**Ключевые слова:** непрямым метод приграничных элементов, сейсмoeлектрический эффект 2-го рода, упруго-динамическая задача, кусочно-однородная среда Био, поперечные волны, продольные волны.

Lubov Zhuravchak<sup>1</sup>, Natalia Zabrodska<sup>2</sup>,

<sup>1</sup>Dr.Sc., Professor of software department of Institute of Computer Science and Information Technologies, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

<sup>2</sup>PhD, Senior researcher, Carpathian Branch of Subbotin Institute of Geophysics NAS, Lviv, Ukraine

#### SOLVING OF ELASTIC DYNAMICAL PROBLEM IN A POROUS FLUID-SATURATED PIECEWISE-HOMOGENEOUS HALF-SPACE BY THE INDIRECT METHOD OF NEAR-BOUNDARY ELEMENTS

**Context.** Solving the different applied problems of engineering and petroleum geology, geophysics and geodynamics, researchers often use methods based on phenomenon seismic-electrical effect of the second kind, since the electromagnetic field of electrical-kinetic origin is much more informative than the seismic one that generated it, and from it they can determine important petrophysical parameters (for example, porosity and fluid permeability) geological environment. At the first stage of investigation of this effect, the need of solving an elastic-dynamic problem arises, when the object of investigation is the processes of propagation of elastic waves in porous, fluid-saturated piecewise homogeneous media. This task also has an independent meaning for monitoring ecologically dangerous phenomena in the study of deformation



processes in soil massifs, especially in mountainous areas, associated with their subsidence due to caverns, earthquakes, filtration of precipitation on the slopes and other phenomena.

**Objective.** Construction of a mathematical model for the propagation of elastic waves in piecewise homogeneous media; creation of software for its numerical implementation and testing of its effectiveness; carrying out numerical investigations of the dependence on the parameters of the medium on the distribution of the displacement components at the boundary of the half-space.

**Method.** We used the Biot theory to create a mathematical model of the problem and the indirect method of near-boundary elements to construct its numerical-analytical solution, last one is based on the theory of methods of boundary integral equations.

**Results.** The software that implements the near-boundary elements method for numerical and analytical modeling of the elastic-dynamic problem has been developed. Computational experiments were carried out to estimate errors of discretization of the near-boundary region and of approximation of the mathematical model.

**Conclusions.** The effect of change of the characteristics of an inclusion (in a form of a parallelepiped), in particular its fluid permeability and porosity, on the distribution of displacement components on the half-space boundary has been investigated. The practical recommendations of the recognition of inclusions have been done.

**Keywords:** Biot theory, electromagnetic fields, seismic-electrical effect of the second kind, elastic dynamical problem, elastic waves propagation, indirect method of near-boundary elements.

## REFERENCES

- Garambois S., Dietrich M. Full waveform numerical simulations of seismoelectromagnetic wave conversions in fluid-saturated stratified porous media, *Journal of Geophysical Research*, 2002, Vol. 107, No. B7, 10.1029/2001JB000316, pp. ESE 5-1–ESE 5-18.
- Gao Y., Hu H. Seismoelectromagnetic waves radiated by a double couple source in a saturated porous medium, *Geophysical Journal International*, 2010, Vol. 181, pp. 873–896.
- Schmitt D. P., Bouchon M., Bonnet G. Full-wave synthetic acoustic log in radially semi-infinite saturated porous media, *Geophysics*, 1988, Vol. 53, No. 6, pp. 807–823.
- Lee T. Transient electromagnetic response of a magnetic or superparamagnetic ground, *Geophysics*, 1984, Vol. 49, No. 7, pp. 854–860.
- Ageeva O. A., Svetov B. S., Sherman G. H., Shipulin C. V. Sejsmojelekticheskiy jeffekt vtorogo roda v gornyykh porodakh (po dannym laboratornykh issledovaniy), *Geologiya i geofizika*, 1999, Vol. 40, No. 8, pp. 1251–1257.
- Fridrihsberg D. A., Sidorova M. P. Issledovanie svyazi javleniya vyzvannoy poljarizatsii s jelektrokineticheskimi svoystvami kapilljarnykh sistem, *Vestnik LGU, ser. Fizika i himiya*, 1961, Vyp. 1, No. 4, pp. 57–69.
- Svetov B. C. Osnovy geoelektriki. Moscow, Izdatel'stvo LKI, 2008, 656 p.
- Zhuravchak L. M., Gryc'ko Je. G. Metod prygranychnykh elementiv u prykladnykh zadachah matematychnoi fizyky. L'viv, Karpats'ke viddilennja Instytutu geofizyky NAN Ukraïny, 1996, 220 p.
- Zhuravchak L. M. Metodyka rozv'jazuvannja zadachi sejsmoelektryky stosovno efektu drugogo rodu u kuskovo-odnorodnomu pivprostori, *Materialy naukovoi konferencii-seminaru «Sejsmologichni ta geofizychni doslidzhennja v sejsmoaktyvnykh regionah»*, L'viv, 3–5 chervnja 2014 r. L'viv, "Spolom", 2014, pp. 42–49.
- Zhuravchak L. M., Zabrods'ka N. V. Matematyчне modeljuvannja efektu vyklykanoi poljaryzatsii u tryvymirnykh zadachah geoelektrozvidky, *Visnyk NU "L'vivs'ka politehnika"*. Ser. "Komp'juterni nauky ta informacijni tehnologii", 2009, No. 650, pp. 158–167.
- Zhuravchak L. M., Fedoryshyn Ju. O. Rozpiznavannja providnyh ta vysokoomnyh vkljuchen' u kuskovo-odnorodnomu pivprostori pry matematychnomu modeljuvanni ustalenyh kolyvan' elektromagnitnogo polja, *Visnyk NU "L'vivs'ka politehnika"*. Ser. "Komp'juterni nauky ta informacijni tehnologii", 2014, No. 800, pp. 159–167.
- Frenkel' Ja. I. K teorii sejsmicheskikh i sejsmojelekticheskih javlenij vo vlazhnoj pochve, *Izvestija AN SSSR, serija geograficheskikh i geofizicheskikh nauk*, 1944, Vol. 8, No. 4, pp. 133–150.
- Ivanov A. G. Sejsmojelekticheskiy jeffekt 2 roda, *Izvestija AN SSSR, serija geograficheskikh i geofizicheskikh nauk*, 1940, No. 5, pp. 699–727.
- Ivanov A. G. Jeffekt jelektrozatsii plastov zemli pri prohozhdenii cherez nih uprugih voln, *Dokl. AN SSSR*, 1939, Vyp. 24, No. 1, pp. 41–43.
- Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in fluidsaturated porous solids, *Journal Acoustic. Soc. Amer*, 1956, Vol. 28, pp. 168–186.
- Pride S. R. Governing equations for the coupled electromagnetics and acoustics of porous media, *Phys. Rev., B*, 1994, Vol. 50, pp. 15678–15696.
- Svetov B. C. K teoreticheskomu obosnovaniju sejsmojelekticheseskogo metoda geofizicheskoy razvedki, *Geofizika*, 2000, No. 1, pp. 28–39.
- Svetov B. C., Gubatenko V. P. Jelektromagnitnoe pole mehanojelekticheseskogo proishozhdenija v poristyykh vlagonasysyhennykh gornyykh porodakh: I. Postanovka zadachi, *Fizika Zemli*, 1999, No. 10, pp. 67–73.
- Moskovskij I. G. Balaban O. M., Fedorova O. S., Kochetkov A. V. Matematicheskoe modelirovanie sejsmojelekticheseskogo jeffekta vtorogo roda, porozhdaemogo ploskimi uprugimi volnami v poristyykh vlagonasysyhennykh sredah, *Internet-zhurnal «Naukovedenie»*, 2015, Vol. 7, No. 1, <http://naukovedenie.ru/PDF/04TVN115.pdf>.
- Gorodeckaja N. S. Volny v poristo-uprugih nasysyhennykh zhidkost'ju sredah, *Akustichnij visnik*, 2014, Vol. 10, No. 2, pp. 43–63.