УДК 517.9 : 537.86

Чумаченко Я. В.[1], Чумаченко В. П.[2]

[1]Канд. тех. наук, доцент Ивано-Франковского национального технического университета нефти и газа
[2] Д-р физ.-мат. наук, профессор Запорожского национального технического университета

О БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ЗАДАЧАМИ РАССЕЯНИЯ ВОЛН В ПЛОСКОСТНЫХ ВОЛНОВОДНЫХ УЗЛАХ С ОБЛАСТЬЮ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

На примере волноводного излома исследуются свойства бесконечных систем, возникающих при применении метода произведения областей для решения задач рассеяния волн в плоскостных волноводных трансформаторах с нагруженной областью связи прямоугольной формы. Показано, что метод приводит к системам, которые для нерезонансных значений волнового числа могут быть решены методом редукции, сходящимся по норме пространства l_1.

Ключевые слова: бесконечные системы линейных уравнений, метод произведения областей, волноводные неоднородности.

ВВЕДЕНИЕ

В статьях [1, 2] рассматривались бесконечные системы линейных уравнений (БСЛУ), появляющиеся в результате применения метода произведения областей (МПО) для решения скалярных задач рассеяния волн в H- и E-плоскостных волноводных трансформаторах, у которых соединительная область представляет собой общую часть пересекающихся под прямым углом конечных или бесконечных волновых каналов. Таковыми, например, являются уголковые, T-образные и крестообразные соединения волноводов, а также конструкции, содержащие их в качестве составных элементов (см. работы [3]–[7] и их библиографию). Было установлено, что МПО приводит к матричным уравнениям, которые могут быть сведены к решению, так называемых, квазирегулярных систем.

В предлагаемой работе это исследование продолжено. Так как для всех перечисленных конкретных H- и E-плоскостных конфигураций возникают уравнения одного типа, то вопрос обсуждается на примере одной относительно простой неоднородности, а именно H-плоскостного излома волновода с нагруженной диэлектриком областью связи. БСЛУ задачи рассматривается как функциональное уравнение в пространстве последовательностей l_1. Изучены свойства соответствующего матричного оператора и установлено, что система разрешима методом редукции, сходящимся по норме этого пространства.

Заметим, что аналогичные матричные уравнения появляются также при использовании метода частичных пересекающихся областей [8, 9] и метода сшивания с помощью второй формулы Грина [10].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Сечение неоднородности плоскостью $z = \text{const}$ состоит из трех областей:

$(1)\{(x, y): x > c, 0 < y < a\}$ – полубесконечный волновод шириной a;

$(2)\{(x, y): 0 < x < c, y > a\}$ – полубесконечный волновод шириной c;

$(3)\{(x, y): 0 < x < c, 0 < y < a\}$ – прямоугольная область связи, заполненная диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε. Плоскости $x = c$ и $y = a$ соответствуют границам раздела сред. Остальные граничные поверхности являются идеально проводящими. Узел возбуждается со стороны области 1 волной TE_{10} единичной амплитуды.

Задача заключается в отыскании ненулевой z-компоненты электрического поля $E_z = ue^{i\omega t}$. Функция u должна удовлетворять уравнению Гельмгольца, однородным граничным условиям Дирихле на идеальных поверхностях, условиям непрерывности тангенциальных составляющих поля на границах частичных областей, условию излучения на бесконечности и условию ограниченности энергии поля, запасенной внутри любой конечной подобласти. Эти условия обеспечивают единственность решения исходной электродинамической задачи для всех значений частотного параметра за исключением некоторого множества отдельных изолированных точек, появляющихся в случае $\mathrm{Im}\varepsilon = 0$ [11].

Обозначим значения u в областях 1, 2 и 3 через u_1, u_2 и u_3. Тогда

$$u_1 = \sin\frac{\pi y}{a} e^{\gamma_1^{(1)}(x-c)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \sin\frac{n\pi y}{a} e^{-\gamma_n^{(1)}(x-c)}, \quad (1)$$

$$u_2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)} \sin\frac{n\pi x}{c} e^{-\gamma_n^{(2)}(y-a)}, \quad (2)$$

где $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$ – коэффициенты разложения, подлежащие определению,

© Чумаченко Я. В., Чумаченко В. П., 2012

$$\gamma_n^{(1)} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k_0^2}\,,\ \gamma_n^{(2)} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 - k_0^2}\,, \qquad (3)$$

$k_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, а λ является длиной волны в свободном пространстве.

Основываясь на методе произведения областей, в [12] для u_3 было получено представление

$$u_3 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(1)} \sin\frac{n\pi y}{a}\left[e^{\gamma_n^{(x)}(x-c)} - e^{-\gamma_n^{(x)}(x+c)}\right] +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(2)} \sin\frac{n\pi x}{c}\left[e^{\gamma_n^{(y)}(y-a)} - e^{-\gamma_n^{(y)}(y+a)}\right] \qquad (4)$$

с

$$\gamma_n^{(x)} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k^2}\,,\ \gamma_n^{(y)} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 - k^2} \qquad (5)$$

и $k = k_0\sqrt{\varepsilon}$. Выражение (4) удовлетворяет однородным граничным условиям Дирихле на идеальных стенках соединительной полости и имеет достаточную степень произвольности, чтобы обеспечить выполнение условий непрерывности тангенциальных компонент поля в плоскостях $x = c$ и $y = a$. Отметим, однако, одно обстоятельство, не акцентировавшееся в работах [1, 2]. Если ε является действительным, то волновое число может принимать значения

$$k^2 = \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{c}\right)^2,\ p, l = (0), 1, 2, \ldots\,. \qquad (6)$$

При этом, если, например, $p = 0$, то $\gamma_l^{(y)} = 0$ и l-й член второго ряда в (4) обращается в нуль. Если же $p, l \geq 1$, то p-й член первого ряда совпадает с l-м членом второго ряда с точностью до постоянного множителя. Таким образом, резонансные для области 3 значения волнового числа должны быть исключены из рассмотрения, так как при этих значениях система функций, используемая для разложения u_3, становится линейно зависимой. Это соответствует известным [13] ограничениям на значения частотного параметра, возникающим при применении метода частичных областей к исследованию волноводных трансформаторов с областью связи ненулевого объема.

Сшивание тангенциальных составляющих поля в плоскостях $x = c$ и $y = a$ сводит граничную задачу к некоторой БСЛУ относительно коэффициентов $A_n^{(j)}, B_n^{(j)} (j = 1,2)$ [12], которая после исключения $B_n^{(j)}$ приобретает вид

$$A_m^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{mn}^{(x)}}{\Delta_m^{(x)}} A_n^{(2)} + \frac{r\delta_{1m}}{\Delta_1^{(x)}},\ m = \overline{1,\infty}\,, \qquad (7)$$

$$A_m^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{mn}^{(y)}}{\Delta_m^{(y)}} A_n^{(1)} + \frac{b_{m1}^{(y)}}{\Delta_m^{(y)}},\ m = \overline{1,\infty}\,. \qquad (8)$$

Здесь

$$b_{mn}^{(x)} = (-1)^{m+n} \frac{2mn\pi^2\left(1 - e^{-2\gamma_m^{(x)}c}\right)}{a^2 c\left[\gamma_n^{(y)2} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]}, \qquad (9)$$

$$\Delta_m^{(x)} = \gamma_m^{(1)}\left(1 - e^{-2\gamma_m^{(x)}c}\right) + \gamma_m^{(x)}\left(1 + e^{-2\gamma_m^{(x)}c}\right), \qquad (10)$$

$$r = \gamma_1^{(1)}\left(1 - e^{-2\gamma_1^{(x)}c}\right) - \gamma_1^{(x)}\left(1 + e^{-2\gamma_1^{(x)}c}\right), \qquad (11)$$

δ_{1m} – символ Кронекера, а значения $b_{mn}^{(y)}$ и $\Delta_m^{(y)}$ получаются из (9), (10) путем перестановок $(x) \leftrightarrow (y)$, $a \leftrightarrow c$ и $(1) \leftrightarrow (2)$. Определив $A_n^{(j)}$, неизвестные $B_n^{(j)}$ можно найти с помощью формул

$$B_n^{(1)} = \frac{A_n^{(1)} + \delta_{1n}}{1 - e^{-2\gamma_n^{(x)}c}}\,,\ B_n^{(2)} = \frac{A_n^{(2)}}{1 - e^{-2\gamma_n^{(y)}a}}\,. \qquad (12)$$

Условие конечности энергии поля, запасенной в любой ограниченной области, задает пространство числовых последовательностей, к которому должны принадлежать искомые амплитудные коэффициенты:

$$\left\{A_n^{(1)}\right\}, \left\{A_n^{(2)}\right\} \in \tilde{l}_2 = \left\{\mathbf{s} = \{s_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^2\, n < \infty\right\}. \qquad (13)$$

Исходя из единственности решения исходной электродинамической задачи и требования (13), по известной [14] схеме можно доказать теорему единственности и для системы (7), (8).

АНАЛИЗ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ

Чтобы упростить изложение, последующие выкладки выполнены для диэлектрика, не имеющего потерь. Случай комплексного ε приводит к тем же выводам и может быть рассмотрен по аналогии с [2]. Оценим сумму ряда $\sum_{m=1}^{\infty}\left|\dfrac{b_{mn}^{(x)}}{\Delta_m^{(x)}}\right|$, считая $n > \tau_2 = \dfrac{kc}{\pi}$. При $m > \tau_1 = \dfrac{ka}{\pi}$ $\gamma_m^{(x)}$ и $\gamma_m^{(1)}$ являются действительными, $\gamma_m^{(x)} < \gamma_m^{(1)}$, $\Delta_m^{(x)} > 2\gamma_m^{(x)}$ и $\dfrac{1 - e^{-2\gamma_m^{(x)}}}{\Delta_m^{(x)}} < \dfrac{1}{2\gamma_m^{(x)}}$. Введем обозначения

$$\alpha_n = \sum_{m \leq \tau_1}\left|\frac{b_{mn}^{(x)}}{\Delta_m^{(x)}}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad (14)$$

$$\beta_n = \sum_{m>\tau_1}\left|\frac{b_{mn}^{(x)}}{\Delta_m^{(x)}}\right| \le \frac{\pi^2 n}{a^2 c}\sum_{m>\tau_1}\frac{m}{\gamma_m^{(x)}\left[\gamma_n^{(y)2}+\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]} =$$

$$= \frac{n}{c}\sum_{m>\tau_1}\frac{m}{\gamma_m^{(x)}\left[m^2+\left(\frac{\gamma_n^{(y)}a}{\pi}\right)^2\right]} = \beta_n^*. \qquad (15)$$

Представим $\frac{m}{\gamma_m^{(x)}}$ в виде

$$\frac{m}{\gamma_m^{(x)}} = \frac{a}{\pi} + \left(\frac{m}{\gamma_m^{(x)}} - \frac{a}{\pi}\right) = \frac{a}{\pi} + \frac{ak^2}{\pi\gamma_m^{(x)}\left(\frac{m\pi}{a}+\gamma_m^{(x)}\right)} \qquad (16)$$

и разобьем β_n^* на два слагаемых: $\beta_n^* = \beta_n^{(1)} + \beta_n^{(2)}$. В этом выражении

$$\beta_n^{(1)} = \frac{na}{\pi c}\sum_{m>\tau_1}\frac{1}{m^2+\left(\frac{\gamma_n^{(y)}a}{\pi}\right)^2}, \qquad (17)$$

$$\beta_n^{(2)} = \frac{nak^2}{\pi c}\sum_{m>\tau_1}\frac{1}{\gamma_m^{(x)}\left(\frac{m\pi}{a}+\gamma_m^{(x)}\right)\left[m^2+\left(\frac{\gamma_n^{(y)}a}{\pi}\right)^2\right]} <$$

$$< \frac{\pi n k^2}{ac\gamma_n^{(y)2}}\sum_{m>\tau_1}\frac{1}{\gamma_m^{(x)}\left(\frac{m\pi}{a}+\gamma_m^{(x)}\right)} = \sigma_n^{(2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad (18)$$

Для величины $\beta_n^{(1)}$ получим

$$\beta_n^{(1)} \le \frac{na}{\pi c}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2+\left(\frac{\gamma_n^{(y)}a}{\pi}\right)^2} \le \frac{n\pi}{2c\gamma_n^{(y)}} = \sigma_n^{(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}, \qquad (19)$$

где принято во внимание, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+v^2} = \frac{\pi}{2v}\left(\mathrm{cth}\,v\pi - \frac{1}{v\pi}\right) \text{ [15, C. 37]} \qquad (20)$$

и

$$\mathrm{cth}\,p - \frac{1}{p} \le 1, \quad 0 < p < \infty. \qquad (21)$$

Таким образом, при $n > \tau_2$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left|\frac{b_{mn}^{(x)}}{\Delta_m^{(x)}}\right| < \alpha_n + \sigma_n^{(1)} + \sigma_n^{(2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}. \qquad (22)$$

Значит, существует некоторое число M_1 такое, что при $n > M_1$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left|\frac{b_{mn}^{(x)}}{\Delta_m^{(x)}}\right| < 1 - \vartheta_1,\ 0 < \vartheta_1 < \frac{1}{2}. \qquad (23)$$

Очевидно также, что

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left|\frac{b_{mn}^{(x)}}{\Delta_m^{(x)}}\right| < \infty \ \forall n \ge 1. \qquad (24)$$

Аналогично устанавливаем, что существует M_2 такое, что при $n > M_2$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left|\frac{b_{mn}^{(y)}}{\Delta_m^{(y)}}\right| < 1 - \vartheta_2,\ 0 < \vartheta_2 < \frac{1}{2} \qquad (25)$$

и

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left|\frac{b_{mn}^{(y)}}{\Delta_m^{(y)}}\right| < \infty \ \forall n \ge 1. \qquad (26)$$

РАЗРЕШИМОСТЬ СИСТЕМЫ И ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕДУКЦИИ

Исходя из известного [16] поведения поля в окрестности ребра, можно показать, что если ряды (1) и (2) представляют решение задачи, то $A_n^{(j)} = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right), \alpha > 0,\ j = 1,2$. Значит,

$$\left\{A_n^{(1)}\right\}, \left\{A_n^{(2)}\right\} \in l_1 \subset \tilde{l}_2, \qquad (27)$$

где

$$l_1 = \left\{\mathbf{s} = \{s_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} |s_n| < \infty\right\}. \qquad (28)$$

Свободные члены уравнений (7) и (8) также принадлежат пространству l_1. Введем новые неизвестные

$$x_{2n-1} = A_n^{(1)},\ x_{2n} = A_n^{(2)},\ n = \overline{1,\infty} \qquad (29)$$

и, понимая под последовательностью $\mathbf{s} = \{s_n\}$ бесконечный вектор-столбец, перепишем систему (7), (8) в виде одного матричного уравнения

$$K\mathbf{x} \equiv (I + F)\mathbf{x} = \mathbf{y}. \qquad (30)$$

Здесь I – бесконечная единичная диагональная матрица,

$$\mathbf{x}=\{x_n\}\in l_1,\ \mathbf{y}=\left\{\frac{r}{\Delta_1^{(x)}},\frac{b_{11}^{(y)}}{\Delta_1^{(y)}},0,\frac{b_{21}^{(y)}}{\Delta_2^{(y)}},0,\cdots\right\}\in l_1, \quad (31)$$

а ненулевые элементы матрицы $F=(f_{mn})$ определяются равенствами

$$f_{2m-1,2n}=-\frac{b_{mn}^{(x)}}{\Delta_m^{(x)}},\quad f_{2m,2n-1}=-\frac{b_{mn}^{(y)}}{\Delta_m^{(y)}}. \quad (32)$$

Оценки (23)–(26) позволяют рассматривать F как матричный оператор в l_1 с нормой

$$\|F\|=\sup_n\sum_{m=1}^{\infty}|f_{mn}|<\infty\,. \quad (33)$$

В силу единственности решения системы (7), (8) в $\tilde{l}_2$ и включения (27), уравнение (30) при $\mathbf{y}=0$ имеет в l_1 лишь тривиальное решение.

Введем операторы проектирования R_n (матрица, полученная из I заменой первых n единиц нулями) и $P_n=I-R_n$. Отметим очевидные свойства $P_n^2=P_n$ и $\|P_n\|=1$. Оценки (23), (25) означают существование конечного числа M такого, что

$$\|FR_M\|<1-\vartheta,\ \ \vartheta=\min(\vartheta_1,\vartheta_2)\,. \quad (34)$$

Обозначим $L=FR_M$, $T=FP_M$ и $G=I+L$. Из неравенства (34) следует[17], что оператор G непрерывно обратим. Матрица T представляет вполне непрерывный оператор, в чем легко убедиться (в силу конечности M) с помощью известных [18] критериев. Таким образом, в l_1 матричный оператор $K=I+F=G+T$ является фредгольмовым и в силу альтернативы Фредгольма уравнение (30) обладает единственным решением при любой правой части $\mathbf{y}\in l_1$ [17].

Пусть $n>M$, $X_n=P_nl_1$ – подпространства в l_1, $L_n=P_nLP_n$ и $\mathbf{x}_n\in X_n$. Ясно, что $GX_n\neq X_n$ и $P_nG\mathbf{x}_n=(I+L_n)\mathbf{x}_n\equiv G_n\mathbf{x}_n$ (так как $P_n\mathbf{x}_n=\mathbf{x}_n$). Поскольку $\|L_n\|\le\|L\|<1$, то операторы $G_n:X_n\to X_n$ непрерывно обратимы, а обратные операторы G_n^{-1} ограничены по норме в совокупности: $\|G_n^{-1}\|\le\dfrac{1}{1-\|L\|}$.

Рассмотрим теперь наряду с (30) полученные из него усеченные уравнения:

$$K_n\mathbf{x}_n\equiv G_n\mathbf{x}_n+P_nT\,\mathbf{x}_n=P_n\mathbf{y}\ \ (\mathbf{x}_n\in X_n). \quad (35)$$

Полагая $Y=X=l_1$, $Y_n=X_n$ в условиях известной теоремы ([19], стр. 31, теорема 6.2) и принимая во внимание установленные свойства операторов K, G, T, G_n и P_n, мы приходим к заключению, что для достаточно больших значений n системы (35) однозначно разрешимы и имеет место сходимость последовательности приближенных решений $\mathbf{x}_n^*=K_n^{-1}P_n\mathbf{y}$ к точному решению $\mathbf{x}^*=K^{-1}\mathbf{y}$:

$$\|\mathbf{x}^*-\mathbf{x}_n^*\|=O\left(\inf_{\mathbf{x}_n\in X_n}\|\mathbf{x}^*-\mathbf{x}_n\|\right)=O\left(\|R_n\mathbf{x}^*\|\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0. \quad (36)$$

Введение новых неизвестных по формуле (29) соответствует случаю, когда после усечения из матричных равенств (7) и (8) учитывается одинаковое число уравнений. Вектор $\mathbf{x}$ может быть сформирован и по-другому, чередуя, например, по N_1 и N_2 коэффициентов, последовательно выбираемых из $\{A_n^{(1)}\}$ и $\{A_n^{(2)}\}$ с сохранением порядка их следования. При этом каждый раз, когда отношение $\dfrac{N_1}{N_2}$ будет конечным и не равным нулю, мы (с другим M) будем находиться в пределах применимости теоремы. При численной реализации алгоритма, разумеется, нет необходимости переобозначать искомые величины и переписывать систему в виде (30).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере нагруженного излома волновода исследованы свойства бесконечных систем линейных уравнений, появляющихся в результате применения МПО к решению задач рассеяния волн в волноводных трансформаторах с прямоугольной областью связи. Установлено: 1) возникающую БСЛУ можно рассматривать в пространстве последовательностей l_1 как уравнение с фредгольмовым операторам; 2) при несовпадении волнового числа со значениями (6), а также другими возможными резонансными значениями система разрешима методом редукции, сходящимся по норме этого пространства. Полученные результаты будут полезными для построения обоснованных алгоритмов расчета волноводных узлов описанного типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чумаченко, Я. В.* К обоснованию численного решения одной задачи рассеяния волн для нагруженного излома прямоугольного волновода / Я. В. Чумаченко, В. П. Чумаченко // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2009. – № 2. – С. 32–34; 2011. – № 1. – С. 14.
2. *Чумаченко, Я. В.* О бесконечных системах метода произведения областей для задач рассеяния волн в плоскостных узлах с соединительной полостью прямоугольной формы / Я. В. Чумаченко, В. П. Чумаченко // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2011. – №1. – С. 10–14.
3. *Шестопалов, В. П.* Резонансное рассеяние волн. Т. 2. Волноводные неоднородности / В. П. Шестопалов, А. А. Кириленко, Л. А. Рудь. – Киев : Наукова думка, 1986. – 216 с.
4. *Widarta, A.* Simple and accurate solutions of scattering coefficients of E-plane junctions in rectangular waveguides / A. Widarta, S. Kuwano and K. Kokubun // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1995. – Vol. 43, Dec. – P. 2716–2718.

5. *Rebollar, J. M.* Fullwave analysis of three and four-port rectangular waveguide junctions. / J. M. Rebollar, J. Esteban and J. E. Page // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1994. – Vol. 42, Feb. – P. 256–263.
6. *Esteban, J.* Generalized scattering matrix of generalized two-port discontinuities: application to four-port and nonsymmetric six-port couplers / J. Esteban and J.M. Rebollar // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1991. – Vol. 39, Oct. – P. 1725–1734.
7. *Liang, X.-P.* A rigorous three plane mode-matching technique for characterizing waveguide T-junctions, and its application in multiplexer design / X.-P. Liang, K. A. Zaki and A. E. Atia // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1991. – Vol. 39, Dec. – P. 2138–2147.
8. *Прохода, И. Г.* Расчет H-плоскостного направленного ответвителя с учетом толщины общей стенки между волноводами / И. Г. Прохода, В. И. Лозяной, В. П. Чумаченко // Изв. вузов. Радиофизика. – 1974. – Т. 17, № 8. – С. 1214–1218.
9. *Yakovlev, A. B.* Analysis of microstrip discontinuities using method of integral equations for overlapping regions / A. B. Yakovlev and A. B. Gnilenko // IEE Proceedings. Microwaves, Antennas and Propagation. – 1997. – Vol. 144, Dec. – P. 449–457.
10. *Рудь, Л. А.* Дифракция волн на Т-образном соединении прямоугольных волноводов в *H*-плоскости / Л. А. Рудь / / Радиотехника и электроника. – 1984. – Т. 29, № 9. – С. 1711–1719.
11. *Шестопалов, В. П.* Спектральная теория и возбуждение открытых структур / В. П. Шестопалов. – Киев : Наукова думка, 1987. – 288 с.
12. *Chumachenko, V. P.* Accurate analysis of waveguide junctions with rectangular coupling cavity / V. P. Chumachenko, E. Karaçuha and I. V. Petrusenko // Microwave and Optical Technology Letters. – 2001. – Vol. 31, Oct. – P. 305–308.
13. *Petrusenko, I. V.* Basic Properties of the Generalized Scattering Matrix of Waveguide Transformers / I. V. Petrusenko // Electromagnetics. – 2006. – Vol. 26. – P.601–614.
14. *Шестопалов, В. П.* Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции / В. П. Шестопалов, А. А. Кириленко, С. А. Масалов. – Киев : Наукова думка, 1984.– 296 с.
15. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Наука, 1971. – 1108 с.
16. *Миттра Р.* Аналитические методы теории волноводов / Р. Миттра, С. Ли. – М.: Мир, 1974. – 328 с.
17. *Треногин, В. А.* Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Наука, 1980. – 496 с.
18. *Грибанов, Ю. И.* Координатные пространства и бесконечные системы линейных уравнений. III / Ю. И. Грибанов // Изв. вузов. Математика. – 1963. – № 3 (34). – С. 27–39.
19. *Габдулхаев, Б. Г.* Теория приближенных методов решения операторных уравнений / Б. Г. Габдулхаев. – Казань : Казанский государственный университет, 2006. – 112 с.

Стаття надійшла до редакції 28.11.2011.

Чумаченко Я. В., Чумаченко В. П.

ПРО НЕСКІНЧЕННІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ, ЗВ'ЯЗАНИХ ІЗ ЗАДАЧАМИ РОЗСІЮВАННЯ ХВИЛЬ В ПЛОЩИННИХ ХВИЛЕВОДНИХ ВУЗЛАХ З ОБЛАСТЮ ВЗАЄМОДІЇ ПРЯМОКУТНОЇ ФОРМИ

На прикладі зламу хвилеводу досліджуються властивості нескінченних систем, які виникають при використанні методу добутку областей в задачах розсіювання хвиль в площинних хвилеводних трансформаторах з навантаженою з'єднувальною порожниною прямокутної форми. Показано, що метод приводить до систем, які для нерезонансних значень хвильового числа можна розв'язати методом редукції, збіжним за нормою простору l_1.

Ключові слова: нескінченні системи лінійних рівнянь, метод добутку областей, хвилеводні неоднорідності.

Chumachenko Ya. V., Chumachenko V. P.

ON LINEAR INFINITE SYSTEMS RELATED TO WAVE SCATTERING PROBLEMS FOR PLANAR WAVEGUIDE JUNCTIONS WITH A RECTANGULAR REGION OF INTERACTION

Application of the domain-product technique (DPT) to scalar scattering problems in planar waveguide transformers with rectangular coupling cavities (e.g. right-angle bends, T-junctions, cross-junctions and the like) yields one-type matrix-operator equations for both H- and E-plane configurations. This makes it possible to consider the features of the respective mathematical models through the example of a relatively simple representative, namely, an H-plane bend with a dielectric loaded connecting region.

The problem of scattering of a waveguide mode is formulated in the form of a boundary value-problem for Helmholtz equation with Dirichlet boundary conditions on the periphery of the unit, and with the edge and radiation conductions. In the connecting region, the DPT representation of the sought-for field is used. Matching the tangential electric and magnetic fields across the interfaces and eliminating the unknowns relating to the coupling cavity produce an infinite linear system (ILS) with respect to amplitudes of the scattered waves. The ILS is considered as a functional equation in the space of sequences $l_1 = \left\{ \mathbf{s} = \{s_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} |s_n| < +\infty \right\}$. It has been established that: (a) in the aforesaid functional space, the technique yields a matrix-operator equation with Fredholm operator; (b) for nonresonant frequencies, this equation is solvable in l_1. by means of the truncation method convergent in the norm.

Key words: infinite systems of linear equations, domain-product method, waveguide discontinuities.

REFERENCES

1. Chumachenko Ya. V., Chumachenko V. P. K obosnovaniyu chislennogo resheniya odnoj zadachi rasseyaniya voln dlya nagruzhennogo izloma pryamougol'nogo volnovoda, *Radioelektronika, informaty'ka, upravlinnya,* 2009, No. 2, pp. 32–34; 2011, No.1, pp. 14.
2. Chumachenko Ya. V., Chumachenko V. P. O beskonechny'x sistemax metoda proizvedeniya oblastej dlya zadach rasseyaniya voln v ploskostny'x uzlax s soedinitel'noj polost'yu pryamougol'noj formy', *Radioelektronika, informaty'ka, upravlinnya,* 2011, No.1, pp. 10–14.
3. Shestopalov V. P., Kirilenko A. A., Rud' L. A. Rezonansnoe rasseyanie voln. Vol. 2. Volnovodny'e neodnorodnosti. Kyiv, Naukova Dumka, 1986, 216 p.
4. Widarta A., Kuwano S. Kokubun K. Simple and accurate solutions of scattering coefficients of E-plane junctions in rectangular waveguides. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1995, Vol. 43, Dec., pp. 2716–2718.
5. Rebollar J. M., Esteban J., Page J. E. Fullwave analysis of three and four-port rectangular waveguide junctions, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1994, Vol. 42, Feb. pp. 256–263.

6. Esteban J., Rebollar J. M. Generalized scattering matrix of generalized two-port discontinuities: application to four-port and nonsymmetric six-port couplers, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques,* 1991, Vol. 39, Oct., pp. 1725–1734.
7. Liang X.-P, Zaki K. A., Atia A. E. A rigorous three plane mode-matching technique for characterizing waveguide T-junctions, and its application in multiplexer design. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1991, Vol. 39, Dec., pp. 2138–2147.
8. Prokhoda I. G., Lozyanoj V. I., Chumachenko V. P. Raschet H-ploskostnogo napravlennogo otvetvitelya s uchetom tolshhiny' obshhej stenky' mezhdu volnovodami, *Izv. vuzov. Radiofizika,* 1974, Vol. 17, No. 8, pp. 1214–1218.
9. Yakovlev A. B., Gnilenko A. B. Analysis of microstrip discontinuities using method of integral equations for overlapping regions. *IEE Proceedings. Microwaves, Antennas and Propagation*, 1997, Vol. 144, Dec, pp. 449–457.
10. Rud' L. A. Difrakciya voln na T-obraznom coedinenii pryamougol'ny'x volnovodov v H-ploskosti, *Radiotexnika i e'lektronika*, 1984, Vol. 29, No. 9, pp. 1711–1719.
11. Shestopalov V.P. Spektral'naya teoriya I vozbuzhdenie otkry'ty'x struktur. Kyiv, Naukova Dumka, 1987, 288 p.
12. Chumachenko V. P., Karaçuha E., Petrusenko I. V. Accurate analysis of waveguide junctions with rectangular coupling cavity, *Microwave and Optical Technology Letters*, 2001, Vol. 31, Oct., pp. 305–308.
13. Petrusenko I. V. Basic Properties of the Generalized Scattering Matrix of Waveguide Transformers. *Electromagnetics,* 2006, Vol. 26, pp. 601–614.
14. Shestopalov V. P., Kirilenko A. A., Masalov S.A. Matrichny'e uravneniya tipa svertki v teorii difrakcii. Kyiv, Naukova Dumka, 1984, 296 p.
15. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. Table of integrals, series, and products. New York, Academic Press, 1994, 1204 p.
16. Mittra R., Lee S. W. Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves. New York, Macmillan, 1971, 302 p.
17. Trenogin V.A. Funkcional'ny'j analiz. Moscow, Nauka, 1980, 496 p.
18. Gribanov Yu. I. Koordinatny'e prostranstva i beskonechny'e sistemy' linejny'x uravnenij. III., *Izv. vuzov. Matematika*, 1963, No.3(34), pp.27–39.
19. Gabdulxaev B. G. Teoriya priblizhenny'x metodov resheniya operatorny'x uravnenij. Kazan', Kazansky'j gosudarstvenny'j universitet, 2006, 112 p.

УДК 621.372.81

Самойлик С. С.[1], Бондарев В. П.[2]

[1]Асистент Запорожского национального технического университета
[2] Канд. физ.-мат. наук, доцент Запорожского национального технического университета

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА С КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫМИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

В статье рассмотрено развитие метода интегральных уравнений макроскопической электродинамики, позволяющего строго решать электродинамические задачи для резонаторных структур с произвольным числом диэлектрических неоднородностей. Исследованы структуры поля в резонаторе и возможности получения его равномерного распределения при одномодовом и многомодовом режимах работы. Используя метод интегральных уравнений, вычислены комплексные частоты низших типов резонатора с пятью прямоугольными диэлектрическими вставками, представляющими собой кювету, заполненную веществом. Показано, что даже при больших диэлектрических проницаемостях вещества метод имеет быструю сходимость. Предложенное развитие метода позволяет оптимизировать параметры резонатора при решении конкретных практических вопросов. Расчет параметров таких устройств представляет собой сложную электродинамическую задачу, особенно, если учитывать комплексный характер диэлектрической проницаемости неоднородностей.

Ключевые слова: прямоугольный резонатор, распределение поля, собственная частота.

ВВЕДЕНИЕ

В технике СВЧ широко используются конструкции с диэлектрическим заполнением [1–4]. Для обеспечения равномерности прохождения реакций и соответствующих биологических процессов в СВЧ химии и СВЧ биологии, требуется равномерность нагрева соответствующих структур, что возможно обеспечить только при равномерном распределении поля в резонаторной камере. Представляет интерес исследование структуры поля в резонаторе и возможности получения равномерного распределения напряженности поля. В данной работе рассчитывалась структура поля при одномодовом и многомодовом режимах работы.

В представленной работе рассматривается неполное заполнение резонатора диэлектриками с различными свойствами, геометрической структурой и взаимным расположением внутри резонатора.

Расчет параметров таких устройств представляет собой сложную электродинамическую задачу, особенно, если учитывать комплексный характер диэлектрической проницаемости неоднородностей.

© Самойлик С. С., Бондарев В. П., 2012