

ОЦІНЮВАННЯ РИЗИКІВ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ

Проаналізовано підходи до оптимізації інвестиційного портфеля, які використовуються в моделях Марковіца, Шарпа, методології Value-at-Risk, нечіткому підході на основі теорії можливостей. Детально розглянуто використовувані в них способи оцінки ризику (на основі середньоквадратичного, семіквадратичного та медіанного семіквадратичного відхилення, критичних значень дохідності) та визначено основні недоліки та переваги підходів. Розроблено рекомендації щодо вибору методів оптимізації (і відповідно оцінки ризиків) інвестиційного портфеля в тих чи інших умовах.

Ключові слова: оцінювання ризиків, інвестиційний портфель, модель Марковіца, Шарпа, методологія Value-at-Risk, нечіткий підхід.

ВСТУП

Процеси прийняття рішень під час управління проектами відбуваються, як правило, в умовах впливу в тій чи іншій мірі невизначеності, що визначається такими факторами [1]:

- неповним знанням всіх параметрів, умов, ситуації для вибору оптимального рішення, а також неможливістю адекватного і точного врахування всієї, навіть доступної, інформації та присутністю імовірнісних характеристик поведінки середовища;

- наявністю фактора випадковості, тобто реалізацією факторів, які неможливо передбачити та спрогнозувати навіть під час імовірнісної реалізації;

- наявністю суб'єктивних факторів протидії, коли прийняття рішень виконується в ситуації гри з партнером з протилежними або не співпадаючими інтересами.

Ризик є одним із засобів зняття невизначеності, яка являє собою незнання достовірного, відсутність однозначності [2]. Ризик – діяльність, що пов'язана із подоланням невизначеності в ситуації неминучого вибору, в процесі якої є можливість кількісно та якісно оцінити імовірність досягнення передбачуваного результату, невдачі та відхилення від цілей [3].

В даній роботі розглянемо способи оцінки ризику в процесі оптимізації інвестиційного портфеля (ІП).

ІП [4] – сукупність цінних паперів (ЦП), що розглядаються під час управління як єдине ціле. Під час формування ІП інвестор повинен:

- обрати адекватні ЦП, тобто такі, які б надавали максимально можливу дохідність та мінімально допустимий ризик;

- визначити, в ЦП яких емітентів варто вкладати кошти;

- диверсифікувати ІП: інвестору потрібно вкладати гроші в різноманітні ЦП, а не в один їх вид, з метою зниження ризику вкладів.

Під час вибору ІП важливо правильно оцінити майбутні ризики, адже від обраних фінансових інструментів прямо залежить дохідність затрачених ресурсів. Невірна оцінка ризиків може призвести до зменшення прибутку, який можна було б отримати, або в крайньому випадку до збитків. Тому інвестору важливо обрати той підхід, який би, зважаючи на конкретні умови застосування, дозволив найбільш ефективним шляхом вкласти наявні кошти в інвестиції. Виходячи з цього, актуальною проблемою є аналіз існуючих моделей оптимізації ІП щодо засобів оцінки ризиків в них, а також визначення умов застосування тієї чи іншої моделі та встановлення задач подальшого дослідження проблеми.

1. ОЦІНКА РИЗИКУ В МОДЕЛІ МАРКОВІЦА

Класичною методикою оптимізації ІП є модель Г. Марковіца [5]. В ній за міру ризику прийнято стандартне відхилення величини дохідності. Чим більше значення даного показника, тим більш ризикованим буде портфель.

В своїх дослідженнях Марковіц виходив з того, що значення дохідності ЦП – випадкові величини, що розподілені за нормальним (Гауссівським) законом. Він вважав, що, формуючи свій портфель, інвестор оцінює тільки два показники: очікувану дохідність $E(r)$ та стандартне відхилення δ (лише вони визначають щільність ймовірності випадкових чисел

за умов нормального розподілу). Інвестор повинен оцінити дохідність та стандартне відхилення кожного портфеля і вибрати такий портфель, який забезпечує максимальну дохідність при прийнятному рівні ризику або мінімальний ризик при заданому рівні очікуваної дохідності.

Визначаючи ризик портфеля, варто враховувати, що дисперсія портфеля визначається не тільки середньозваженою величиною дисперсій ЦП, що входять в портфель. Це обумовлено тим, що дисперсія портфеля залежить не тільки від дисперсій ЦП, що входять до його складу, але також і від взаємозалежності дохідності окремих ЦП. Тобто ризик портфеля вимірюється не тільки індивідуальним ризиком кожної окремої ЦП портфеля, але і тим, що існує ризик впливу змін щорічних величин дохідності однієї акції на зміни дохідності інших акцій, що входять до складу ПП.

Як міру взаємозалежності двох випадкових величин використовують коваріацію та коефіцієнт кореляції. Позитивне значення коваріації – індикатор тенденції зміни дохідності двох ЦП в одних і тих самих напрямках, тобто якщо дохідність однієї акції збільшується (зменшується), то і дохідність іншої акції також збільшується (зменшується). Негативна коваріація свідчить відповідно про те, що збільшення (зменшення) дохідності акцій однієї компанії призводить до зниження (збільшення) дохідності акцій іншої компанії.

Якщо розглядаються величини дохідності ЦП за минулі періоди, то коваріація розраховується за такою формулою:

$$\delta_{i,j} = \sum_{t=1}^N [r_{i,t} - E(r_i)] \times [r_{j,t} - E(r_j)] / (N - 1), \quad (1)$$

де $\delta_{i,j}$ – коваріація між величинами дохідності ЦП i та ЦП j ; $r_{i,t}$ та $r_{j,t}$ – дохідність ЦП i та ЦП j в момент часу t ; $E(r_i)$, $E(r_j)$ – очікувана (середньоарифметична) дохідність ЦП i та ЦП j ; N – загальна кількість періодів спостереження.

Задача оптимізації структури відповідного портфеля досягненням заданої дохідності з мінімальним ризиком називається задачею Марковіца і має такий вигляд (дана математична формалізація запропонована Дж. Тобіном):

$$\delta_n^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \delta_i^2 + \sum_i \sum_j w_i w_j P_{i,j} \delta_i \delta_j \rightarrow \min_w, \quad (2)$$

$$E(r_{\text{портфеля}}) = \sum_i w_i E(r_i), \quad (3)$$

$$\sum_{i=0}^n w_i = 1. \quad (4)$$

Аналітично наведена задача мінімізації неперервної функції з двома обмеженнями розв'язується за допомогою методу невизначених множників Лагранжа [6].

Головними недоліками класичного підходу є вимога щодо нормального розподілу значень дохідності, можливість розгляду тільки конкретних значень дохідності та необхідність встановлення ймовірності їх досягнення. Ризиком вважаються всі відхилення від запланованих показників, як у менший, так і у більший бік.

2. ОЦІНКА РИЗИКУ В МОДЕЛІ ШАРПА

У. Шарп запропонував новий метод побудови границі ефективних портфелів – одноіндексну модель Шарпа [7], яка дозволяє значно скоротити обсяг необхідних обчислень. За допомогою даної моделі можливо представити взаємозв'язок між величинами норми віддачі r_m та дохідності i -го ЦП r_i , випадкові значення яких спостерігаються протягом N кроків, в будь-який момент часу t в такому вигляді [8]:

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i r_{m,t} + \varepsilon_{i,t}, \quad (5)$$

де α_i – параметр, що вказує на те, яка частина дохідності i -го ЦП не пов'язана зі змінними значеннями дохідності ринку ЦП r_m ; β_i – параметр, що вказує на чутливість дохідності i -го ЦП до змін ринкової дохідності; $\varepsilon_{i,t}$ – випадкова помилка, яка вказує на те, що реальні значення часом відхиляються від лінійної залежності.

В моделі Шарпа дисперсія портфеля представляється у вигляді:

$$\delta_n^2 = \sum_{i=1}^{n+1} w_i^2 \delta_{\varepsilon,i}^2. \quad (6)$$

При цьому $w_{n+1} = \sum_{i=1}^n w_i \beta_i$, а $\delta_{\varepsilon,n+1}^2 = \delta_m^2$. Тобто дисперсію портфеля, що містить n ЦП, можна представити такою, що складається з 2 компонент:

– середньозважені дисперсії помилок $\sum_{i=1}^{n+1} w_i^2 \delta_{\varepsilon,i}^2$ (власний ризик);

– $\beta_n^2 \delta_m^2$ – зважена величина дисперсії ринкового показника δ_m^2 (ринковий ризик).

Величини β_i та α_i розраховуються таким чином:

$$\beta_i = \frac{\delta_{i,m}}{\delta_m^2}, \quad (7)$$

$$\alpha_i = E(r_i) - \beta_i E(r_m). \quad (8)$$

В моделі Шарпа мета інвестора полягає у мінімізації дисперсії портфеля

$$\delta_n^2 = \sum_{i=1}^{n+1} w_i^2 \delta_{\epsilon,i}^2 \rightarrow \min, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} w_i \alpha_i = E^*, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \beta_i = w_{n+1}. \quad (12)$$

В моделі Шарпа не ліквідовано наведені в моделі Марковіца недоліки, проте зменшено обсяг обчислень за допомогою використання лінійної регресійної моделі.

В портфелі Тобіна [9] враховано можливість наявності в портфелі безризикових паперів, що дозволило спростити процес розв'язання задачі знаходження оптимального портфеля за умов вибору безризикових ЦП, проте підхід для оцінки ризику в даній моделі такий самий, як і в моделі Марковіца.

3. ОЦІНКА РИЗИКУ В МЕТОДОЛОГІЇ VALUE-AT-RISK

Методологія Value-at-Risk (VaR) дозволяє оцінити величину максимально можливих збитків на визначеному горизонті планування із встановленим рівнем ймовірності [10]. На відміну від попередніх моделей, в даній методології під втратами розуміють від'ємну зміну вартості портфеля фінансових інструментів в момент часу t та в момент $t - 1$:

$$\Delta P = P_t - P_{t-1}. \quad (13)$$

Показник VaR може бути оцінений на основі величини абсолютних збитків або величини втрат відносно середнього доходу. Існує три основні методи розрахунку VaR: метод історичного моделювання, метод параметричної оцінки, метод імітаційного моделювання.

В загальному випадку даного підходу, якщо досліджуваний показник необхідно максимізувати, то VaR можна обчислити за допомогою формули:

$$\text{VaR} = m - kM_r, \quad (14)$$

де m – математичне очікування; M_r – міра ризику (в загальному випадку – середньоквадратичне відхилення); k – коефіцієнт, який залежить від обраної довірчої ймовірності (встановлює вартість ризику).

Інвестор розглядає ризик, пов'язаний з несприятливими ситуаціями, як тільки несприятливі відхилення від очікуваних значень. В даному підході запро-

поновано за міру ризику використовувати семіваріацію [11], яка для величини X обчислюється таким чином:

$$SV(X) = \sum_{j=1}^n \alpha_j p_j (x_j - M(X))^2, \quad (15)$$

де n – кількість значень випадкової величини X ; x_j – значення випадкової величини, $j = 1, \dots, n$; p_j – відповідні ймовірності; $M(X)$ – математичне очікування випадкової величини X ; α_j – індикатор несприятливих відхилень, який визначають за формулою:

$$\alpha_j = \begin{cases} 0, & \text{у випадку сприятливого} \\ & \text{відхилення,} \\ 1, & \text{у випадку несприятливого} \\ & \text{відхилення.} \end{cases} \quad (16)$$

Однак, одним із недоліків моделі Марковіца та класичної методології VaR є припущення про нормальність розподілу та наявність симетрії в розподілі. На практиці більшість економічних показників асиметричні. Тому в [12] за базу при розрахунках пропонується замість математичного очікування використати моду або медіану.

В такому випадку міра ризику визначається медіанною семіваріацією, яка обчислюється за допомогою формули:

$$SV_{M_e}(X) = \sum_{j=1}^n \alpha_j p_j (x_j - M_e(X))^2, \quad (17)$$

де $M_e(X)$ – медіана випадкової величини X .

Таким чином, методологія VaR та розглянуті її модифікації дозволяють усунути такі недоліки моделі Марковіца: припущення про нормальність розподілу досліджуваної величини та врахування як негативних, так і позитивних відхилень значень досліджуваної величини під час обчислення міри ризику.

4. ОЦІНКА РИЗИКУ В НЕЧІТКОМУ ПІДХОДІ ДО ОПТИМІЗАЦІЇ ІІІ

В нечіткому підході на основі теорії можливостей [13] дохідність i -го ЦП представляється у вигляді трикутного нечіткого числа

$$r_i = (r_{1i}; \bar{r}_i; r_{2i}), \quad (18)$$

де r_{1i} – нижня межа дохідності i -го ЦП; \bar{r}_i – очікувана дохідність i -го ЦП; r_{2i} – верхня межа дохідності i -го ЦП.

Дохідність портфеля визначається таким чином [14]:

$$r = \left(r_{\min} = \sum_{i=1}^N w_i r_{1i}; \bar{r} = \sum_{i=1}^N w_i \bar{r}_i; r_{\max} = \sum_{i=1}^N w_i r_{2i} \right). \quad (19)$$

Критичний рівень дохідності портфеля на момент часу T представляється як $r^* = (r_1^*; \bar{r}^*; r_2^*)$. Тоді взаємне співвідношення функцій приналежності r_i та критеріального значення r^* дозволяє розрахувати площу фігури, яка утворюється в результаті перетину цих функцій, таким чином:

$$S_\alpha = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ якщо } r_1 \geq r_2^*; \\ \frac{(r_2^* - r_1)^2}{2}, \text{ якщо } r_2^* > r_1 \geq r_1^*; r_2 \geq r_2^*; \\ \frac{(r_1^* - r_1) + (r_2^* - r_1)}{2} (r_2^* - r_1), \\ \text{якщо } r_1 < r_1^*; r_2 > r_2^*; \\ (r_2^* - r_1^*)(r_2 - r_1) - \frac{(r_2 - r_1^*)^2}{2}, \\ \text{якщо } r_1 < r_1^* \leq r_2; r_2 < r_2^*; \\ (r_2^* - r_1^*)(r_2 - r_1), \text{ якщо } r_2 \geq r_1^*. \end{array} \right\} \quad (20)$$

В такому випадку ступінь ризику неефективності $\varphi(\alpha)$ є геометрична ймовірність випадку потрапляння точки (r, r^*) в зону неефективного розподілу капіталу

$$\varphi(\alpha) = \frac{S_\alpha}{(r_2^* - r_1^*)(r_2 - r_1)}. \quad (21)$$

Значення ступеня ризику неефективності портфеля дорівнює

$$\beta = \int_0^{\alpha_1} \varphi(\alpha) d\alpha, \quad (22)$$

де α_1 – ордината точки перетину функцій приналежності r та r^* .

Тоді, використовуючи формули (20)–(22), ступінь ризику буде дорівнювати

$$\beta = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ якщо } r^* < r_{\min}; \\ R \left(1 + \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} \ln(1 - \alpha_1) \right), \\ \text{якщо } r_{\min} \leq r^* \leq \bar{r}; \\ 1 - (1 - R) \left(1 + \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} \ln(1 - \alpha_1) \right), \\ \text{якщо } \bar{r} \leq r^* < r_{\max}; \\ 1, \text{ якщо } r^* \geq r_{\max}, \end{array} \right\} \quad (23)$$

де

$$R = \left\{ \begin{array}{l} \frac{r^* - r_{\min}}{r_{\max} - r_{\min}}, \text{ якщо } r^* < r_{\max}; \\ 1, \text{ якщо } r^* \geq r_{\max}, \end{array} \right\} \quad (24)$$

$$\alpha = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ якщо } r^* < r_{\min}; \\ \frac{r^* - r_{\min}}{\bar{r} - r_{\min}}, \text{ якщо } r_{\min} \leq r^* < \bar{r}; \\ 1, \text{ якщо } r^* = \bar{r}; \\ \frac{r_{\max} - r^*}{r_{\max} - \bar{r}}, \text{ якщо } \bar{r} < r^* < r_{\max}; \\ 0, \text{ якщо } r^* \geq r_{\max}. \end{array} \right\} \quad (25)$$

Таким чином, за умов даного підходу необхідно розв'язати наступну задачу оптимізації:

$$r = \sum_{i=1}^N w_i r_i \rightarrow \max; \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i r_{1i} > r^*; \quad (27)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1, \quad w_i \geq 0; \quad i = \overline{1, N}. \quad (28)$$

В даній моделі ліквідовано недоліки підходів на основі теорії ймовірності. Знято вимоги щодо нормального розподілу значень дохідності, розглядається не можливість досягнення окремих значень показника дохідності, а цілий інтервал значень, ймовірність досягнення яких не потрібно визначати наперед. Окрім того, на відміну від моделі Марковіца, при нечіткому підході за ризик приймаються тільки ті значення дохідності, які виявились менше запланованого.

ВИСНОВКИ

Аналіз існуючих методів оптимізації інвестиційного портфеля дозволив зробити висновки щодо умов їх використання.

У випадку однорідності ринку, коли із впевненістю можуть бути встановлені ймовірності досягнення того чи іншого значення дохідності, варто застосовувати для оптимізації інвестиційного портфеля модель Марковіца. Якщо критичною проблемою є зменшення обсягів обчислень, то кращим варіантом оптимізації є модель Шарпа, де застосовується лінійна регресійна модель.

Коли інвестор бажає враховувати як міру ризику тільки негативні відхилення значень досліджуваного показника, варто застосовувати методологію Value-at-Risk. Окрім того, якщо розподіл значень показника, що розглядається, не відповідає нормальному закону, необхідно використовувати модифіковану методологію Value-at-Risk, в якій за міру ризику прийнято медіанну семіваріацію.

Якщо досліджуваний ринок неоднорідний (що характерно для кризових явищ) і необхідно розглянути

ти весь інтервал можливих значень дохідності (і їх розподіл може не відповідати нормальному закону), потрібно застосувати нечіткий підхід на основі теорії можливостей. Даний метод дозволяє також, як і модифікована методологія Value-at-Risk, за міру ризику враховувати тільки негативні відхилення значень показника.

В процесі подальшого дослідження необхідно виконати такі завдання:

а) розробити програмний комплекс для реалізації проаналізованих методів;

б) дослідити на основі експериментальних даних проаналізовані методи оптимізації та використовувати в них способи оцінки ризику;

в) визначити шляхи застосування математичного апарату для оптимізації інвестиційного портфеля та оцінки ризиків, ґрунтуючись на отриманих результатах практичного дослідження, з метою усунення недоліків;

г) модифікувати нечіткий підхід з метою використання суджень експертів в нечіткій формі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Мазур И. И. Управление проектами: Учебное пособие / И. И. Мазур, В. Д. Шапиро, Н. Г. Ольдерогге; под общ. ред. И. И. Мазура. – 5-е изд., перераб. – М. : Омега-Л, 2009. – 960 с.
2. Шапкин А. С. Теория риска и моделирование рискованных ситуаций: учебник / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин – М. : Дашков и К°, 2007. – 880 с.
3. Альгин А. П. Риск и его роль в общественной жизни / А. П. Альгин – М. : Мысль, 1989. – 187 с.
4. Максимова В. Ф. Портфельные инвестиции / В. Ф. Максимова – М. : Московский международный институт эконометрики, информатики, финансов и права, 2003. – 56 с.
5. Markowitz H. M. Portfolio Selection / H. M. Markowitz // Journal of Finance. – 1952. – № 7. – Pp. 77–91.
6. Климова Е. Н. Математическое моделирование оптимального портфеля ценных бумаг с ограничениями на отдельные активы / Е. Н. Климова, В. Л. Шур, О. В. Москалец // Вестник СамГУ. – 2008. – № 8/2 (67). – С. 263–275.
7. Sharpe W. F. A Simplified Model for Portfolio Analysis / W. F. Sharpe // Management Science. – 1963. – Vol. 9, № 2. – Pp. 277–293.
8. Филатов Д. А. Моделирование и анализ финансовых рынков на основе методов нелинейной динамики: дис. на соискание уч. степени канд. экон. наук: спец. 08.00.13 «Математические и инструментальные методы экономики» / Д. А. Филатов – Воронеж : Институт менеджмента, маркетинга и финансов, 2007. – 162 с.
9. Tobin J. The Theory of Portfolio Selection / J. Tobin; ed. By F. H. Hahn, F.P. R. Brechling // Theory of Interest Rates. – London : MacMillan, 1965. – Pp. 3–51.
10. Буренин А. Н. Управление портфелем ценных бумаг / А. Н. Буренин – М. : Научно-техническое общество имени академика С. И. Вавилова, 2008. – 440 с.
11. Вітлінський В. В. Ризикологія в економіці та підприємстві : монографія / В. В. Вітлінський, Г. І. Великоіваненко – К. : КНЕУ, 2004. – 480 с.
12. Скіцько В. І. Оцінка ризику методом Value-at-Risk / В. І. Скіцько // Економіка: проблеми теорії та практики : зб. наук. праць. – Дніпропетровськ : ДНУ, 2005. – № 202. – С. 158–165.
13. Недосекин А. О. Методологические основы моделирования финансовой деятельности с использованием нечетко-множественных описаний : дис. на соискание уч. степени докт. экон. наук : спец. 08.00.13 «Математические и инструментальные методы экономики» / А. О. Недосекин – СПб. : Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов, 2003. – 280 с.
14. Зайченко Ю. П. Анализ инвестиционного портфеля с использованием аппарата нечетких множеств / Ю. П. Зайченко, М. Есфандиярфард // Матеріали XIII Міжнародної конференції з автоматичного управління «Автоматика – 2006». – Вінниця : Універсум-Вінниця, 2007. – С. 316–324.

Надійшла 11.09.2009

Дубровин В. И., Лёвкин В. Н.

ОЦЕНИВАНИЕ РИСКОВ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

Проанализированы подходы к оптимизации инвестиционного портфеля, используемые в моделях Марковица, Шарпа, методологии Value-at-Risk, нечётком подходе на основе теории возможностей. Детально рассмотрены используемые в них способы оценки риска (на основе среднеквадратического, семиквадратического и медианного семиквадратического отклонения, критических значений доходности) и определены основные недостатки и преимущества подходов. Разработаны рекомендации для выбора методов оптимизации (и соответственно оценки рисков) инвестиционного портфеля в тех или иных условиях.

Ключевые слова: оценка рисков, инвестиционный портфель, модель Марковица, Шарпа, методология Value-at-Risk, нечёткий подход.

Dubrovin V. I., Liovkina V. N.

RISK ASSESSMENT OF INVESTMENT PORTFOLIO

Investment portfolio optimization approaches (proposed in the works by Markowitz, Sharpe and Value-at-Risk methodology, fuzzy approach based on possibility theory) were analyzed. Risk assessment tools (based on standard, semi-quadratic and median semi-quadratic deviation, critical values of profitability), used in these methods, were considered in details and their main shortcomings and advantages were detected. Advices for investment portfolio optimization methods choice (and for risk assessment accordingly) were given under special conditions.

Key words: risk assessment, investment portfolio, Markowitz, Sharpe model, Value-at-Risk methodology, fuzzy approach.