

## ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ РИСУНКА ГРАФА

В данной работе рассматривается математическая модель для построения рисунка графа с минимальным числом пересечений. Представлена схема выполнения этапов построения топологического рисунка непланарного графа. Рассмотрена математическая модель перехода от топологического рисунка графа к геометрическому рисунку используя силовую модель, представляющую ребра графа как пружины с заданным модулем упругости.

**Ключевые слова:** граф, рисунок графа, вращение вершин, закон Кирхгофа, множество циклов.

### ОБЗОР МЕТОДОВ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Методы построения рисунка графа (визуализация) широко применяются в таких областях человеческой деятельности как биологические науки, искусственный интеллект, анализ финансовой информации, в процессе проектирования плоских конструктивов где соединения между элементами расположены в нескольких параллельных плоскостях, такие как интегральные микросхемы, печатные платы и т. п.

Первоначально методы, связанные с построением рисунка графа на плоскости, стали применять разработчики систем автоматизированного проектирования плоских конструктивов для радиоэлектронных устройств. В работах отечественных и зарубежных проектировщиков систем [1–8] подробно рассмотрены методы построения рисунка графа и проблемы, возникающие при реализации тех или других подходов. Дальнейшее развитие этих методов рассмотрено в обзорной работе [9], где рассказывается об эволюции методов визуализации графов в связи с потребностями практики.

Исходя из рассмотренного, можно сказать что в настоящее время сложилось два взгляда на методы построения рисунка графа на плоскости: геометрический подход [10–13] и топологический подход. Геометрический способ представления сводится к геометрическому заданию координат вершин тем или другим способом. Заведомо расположив вершины в точках координатной сетки или расположив их в иерархическом порядке по уровням или по окружности (эллипсу) и представив соединения (ребра) прямыми, ломаными линиями или криволинейными отрезками, получают рисунок графа.

Другое представление рисунка графа строится на основе теоретико-множественного описания. Одной из первых публикаций по представлению топологического описания рисунка графа с определением количества пересечений ребер для двух циклических фрагментов была работа [14]. Автору удалось преобразовать данную задачу к решению известной задачи теории графов представления двудольного графа с минимальным числом

пересечения ребер (рис. 1). Данный подход привел к развитию методов цепочечного построения рисунка графа для определения количества пересечений [15]. Однако вопрос поиска оптимальной цепочки соединений для получения рисунка графа с минимальным числом пересечения ребер остался открытым.

Дальнейшее развитие методов расчета количества пересечений соединений представлено в работах Раппопорта Л. И., Мороговского Б. Н., Поливцева С. А. [16]. Они первые высказали мысль, что при построении рисунка графа анализ отношения пересечения ребер может производиться в топологическом пространстве, в котором метрические свойства не определены. Они разработали основы векторной алгебры пересечений, где для полного и непротиворечивого описания рисунка графа авторы вводят понятие координатно-базисной системы (КБС) и относительно ее устанавливают проекции всех соединений с целью определения пересечения ребер по их проекциям.

Как правило, такая координатно-базисная система может быть построена относительно любого дерева графа. Несмотря на революционность подхода, ограничения, накладываемые на построение координатно-базис-

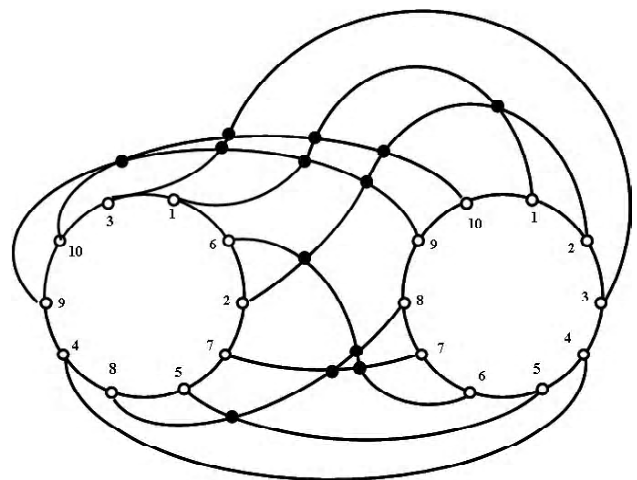


Рис. 1. Пересечения соединений двух фрагментов

ной системы запрещающие соединениям пересекать базовые вектора КБС, несколько сократили применимость метода. Так как различные деревья порождают различные КБС с различным количеством пересечений соединений возникает проблема оптимального, с точки зрения минимального количества пересечения соединений, выбора дерева графа. Выбор такого дерева является труднорешаемой задачей, требующей перебора всех деревьев графа [17].

Одной из основных задач при топологическом подходе к построению рисунка графа является задача планаризации графа. Задача планаризации графа рассматривалась многими исследователями и, в частности, проектировщиками систем автоматизированного проектирования плоских конструктивов [3, 6–8], так как здесь она представлялась наиболее выпуклой.

Граф называется планарным если он изоморфен плоскому графу, т. е. существует возможность получения плоской укладки такого графа. Область плоскости, ограниченная ребрами плоского графа и не содержащая внутри себя ни вершин, ни ребер, называется гранью. Известная формула Эйлера связывает число вершин и ребер плоского графа с числом его граней:  $g - m + n = 2$ , где  $n$  – число вершин,  $m$  – число ребер графа,  $g$  – число граней графа.

Имеется несколько критериев планарности графа, данные Л. С. Понтрягиным, К. Куратовским, К. Вайнером, С. Мак-Лейном. Критерии планарности таковы, что если даже удалось установить планарность графа, то нет информации о том как строить его укладку на плоскости. В тоже время при решении практических задач недостаточно знать, что граф планарен, а необходимо построить его плоское изображение. Все это вызвало появление алгоритмов, которые не только проверяют граф на планарность, но и одновременно должны строить его плоскую укладку.

Практическое использование перечисленных критериев затруднено из-за необходимости полного перебора всех простых циклов для содержательного рассмотрения графа. Поэтому были разработаны эвристические методы определения планарности.

В работе [7] рассмотрен алгоритм В. Бадера для определения планарности графа схемы, когда задан гамильтонов цикл и когда неизвестно его существование. Там же описан алгоритм О. Винга и Ж. Фишера, основанный на аналогичной идее, но выгодно отличающийся от алгоритма Бадера тем, что проверка планарности ведется по видоизмененной матрице инцидентности. В работах Дана, Чена и др. приведены алгоритмы, которые используют матрицу линейно независимых циклов для определения планарности графа. Основным ограничением этого класса алгоритмов является построение, а также избыточное хранение в памяти ЭВМ матрицы циклов больших размеров.

Один из алгоритмов планарности разработан в 1970 г. Хопкрофтом и Тарьяном [18]. Они нашли алгоритм, требующий  $O(SNS \log SNS)$  единиц времени, который они в

конечном счете улучшили до  $O(SNS)$ . Данный алгоритм проверяет граф на планарность и, если он планарен, производит его плоскую укладку. Однако, данный алгоритм лишь косвенно содержит информацию о рисунке графа, а его применение проблематично для дальнейшего решения задачи построения и выделения максимально плоского суграфа из непланарного графа, а также для решения задачи построения рисунка графа с минимальным числом пересечений для непланарного графа.

Трудности, возникающие при применении циклических, матричных и комбинированных алгоритмов, резко сокращают применение этих методов для решения основной задачи планаризации графа. Поэтому, для проведения таких вычислений в настоящее время развиваются эвристические подходы, связанные с реализацией нечетких алгоритмов [15, 19]. В новом, развивающемся научном направлении «имитационное моделирование», исследуются совместные действия многих интеллектуальных искусственных систем, в результате которого возникают новые знания и новые структуры.

Поэтому, цель данной работы схематически, в общем виде (не вдаваясь в подробности математических структур и вычислительных методов) рассмотреть способы построения топологического рисунка графа с минимальным числом пересечений и связать топологические методы с последующими геометрическими построениями рисунка графа.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ ОПИСАНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО РИСУНКА ГРАФА

Традиционно, граф  $G = (X, U; P)$ , как правило, задается множеством вершин  $X$ , множеством ребер  $U$  и трехместным предикатом  $P$  в виде матрицы смежностей или матрицы инцидентности [20–24]. Графически граф  $G$  на плоскости может быть представлен множеством способов [24], в зависимости от расположения вершин (точек) на плоскости, а ребра представляются произвольными отрезками линий соединяющих точки, соответствующие концевым вершинам. Например, граф  $K_5$  можно представить в виде множества следующих рисунков (рис. 2).

И тогда, на повестке дня становится вопрос создания математических структур для топологического описания рисунка графа на плоскости [15, 25]. Необходимым понятием для топологического описания плоского рисунка графа  $G$  является понятие о вращении вершин графа, введенное Г. Рингелем [26].

**Определение 1.** Для данного графа  $G$  вращение вершины  $A$  графа  $G$  – это ориентированный циклический порядок (или циклическая перестановка) всех ребер, инцидентных вершине  $A$ .

**Определение 2.** Вращение  $s$  графа  $G$  – это вращение всех вершин графа  $G$ .

Запись  $(G, \sigma)$  будет обозначать граф  $G$  с некоторым вращением вершин  $\sigma$ , которое характеризует топологический рисунок графа.

**Определение 3.** Циклическое множество – это множество элементов с учетом их циклической перестановки.

Циклическое множество можно записать в виде циклического кортежа.

Вращение вершин принято записывать в виде диаграмм. Например, следующая диаграмма описывает вращение вершин  $s$  рисунка графа, представленного на рис. 3.

Пусть  $X_1$  – вершина, инцидентная ребру  $u_1$  в графе  $G$  с вращением  $(G, \sigma)$ . Мы построим в графе  $G$  замкнутый маршрут

$$X_1, u_1, X_2, u_2, X_3, u_3, \dots, \quad (1)$$

где вершина  $X_2$  – второй конец ребра  $u_1$ , а ребро  $u_2$  следует за ребром  $u_1$  во вращении вершины  $X_2$ , определяемом вращением  $\sigma$ . Затем определяется  $X_3$ , как вершина, инцидентная ребру  $u_2$  и не равная  $X_2$ . После этого в качестве  $u_3$  выбирается ребро, следующее за ребром  $u_2$  во вращении вершины  $X_3$  и т. д. Закончим процесс в точности перед тем моментом, когда должна повториться пара  $X_1, u_1$ . Она должна повториться, ибо граф  $G$  конечный, а наш процесс однозначно определен и в обратном направлении, а именно, если часть  $X_{t-1}, u_t, X_t, \dots$  известна, то ребро  $u_{t-1}$  определяется вращением вокруг вершины  $X_{t-1}$ . Мы назовем такой замкнутый маршрут циклом, порожденным вершиной  $X_1$  и ребром  $u_1$  и индуцированным вращением  $\sigma$ .

Заметим, что во вращении каждое ребро появляется в точности дважды, второй раз – всегда в противоположном направлении.

Если граф планарен и имеется вращение, описывающее плоский рисунок, то циклы, индуцированные вращением, суть простые циклы.

Например, для плоского графа  $G$  с вращением (представленного на рис. 3) имеем следующую систему индуцированных циклов.

Индуцированные циклы:  $\langle x_1, x_3, x_2 \rangle, \langle x_1, x_4, x_3 \rangle, \langle x_2, x_3, x_5 \rangle, \langle x_5, x_3, x_4 \rangle, \langle x_2, x_5, x_6 \rangle, \langle x_6, x_5, x_4 \rangle, \langle x_2, x_6, x_4, x_1 \rangle$  для вершин. Или в виде множества ребер:  $\{u_1, u_2, u_4\}, \{u_2, u_3, u_7\}, \{u_7, u_8, u_9\}, \{u_4, u_5, u_8\}, \{u_5, u_6, u_{11}\}, \{u_9, u_{10}, u_{11}\}, \{u_1, u_3, u_6, u_{10}\}$ . Индуцированный цикл  $\{u_1, u_3, u_6, u_{10}\}$  является ободом графа и равен кольцевой сумме циклов, описывающих границы граней рисунка плоского графа [27].

В случае непланарных графов для топологического описания рисунка графа понятия вращение вершин уже не достаточно, так как вращение вершин не позволяет описывать пересечение ребер. В качестве примера рассмотрим рисунки непланарного графа  $G$  (рис. 4), заданные одним и тем же вращением.

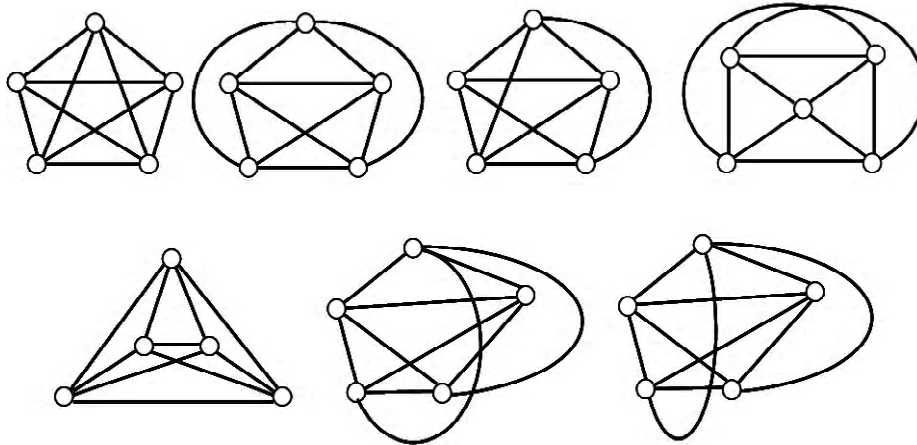


Рис. 2. Различные рисунки графа  $K_5$

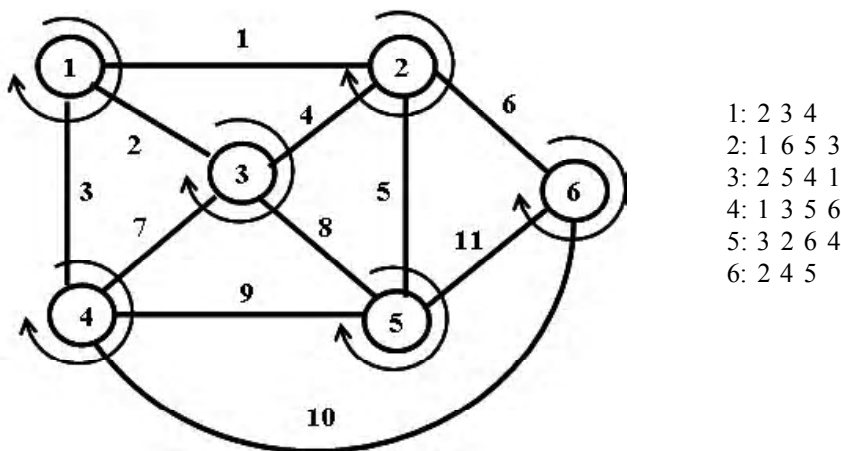


Рис. 3. Граф  $G$  и его вращение вершин

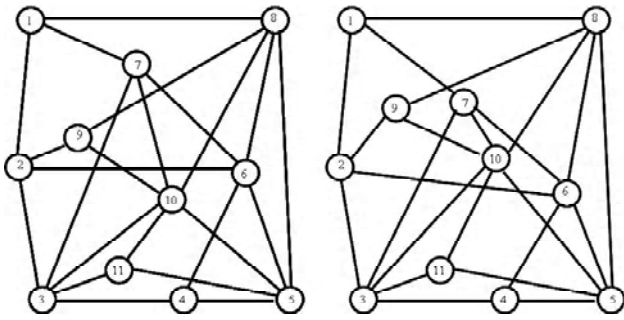


Рис. 4. Рисунки графа G с пересекающимися ребрами

Как видно из приведенного примера, в случае описания рисунка непланарного графа одно и тоже вращение вершин может характеризовать различное пересечение ребер.

На рис. 4 вращение производится по часовой стрелке. Здесь вращение вершин  $\sigma$  можно записать в виде множества циклических подмножеств:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \langle x_8, x_7, x_2 \rangle, \sigma_2 = \langle x_1, x_9, x_6, x_3 \rangle, \\ \sigma_3 &= \langle x_2, x_7, x_{10}, x_{11}, x_4 \rangle, \sigma_4 = \langle x_3, x_6, x_5 \rangle, \\ \sigma_5 &= \langle x_4, x_{11}, x_{10}, x_6, x_8 \rangle, \sigma_6 = \langle x_7, x_8, x_5, x_4, x_2 \rangle, \\ \sigma_7 &= \langle x_1, x_6, x_{10}, x_3 \rangle, \\ \sigma_8 &= \langle x_5, x_6, x_{10}, x_9, x_1 \rangle, \sigma_9 = \langle x_8, x_{10}, x_2 \rangle, \\ \sigma_{10} &= \langle x_9, x_7, x_8, x_5, x_{11}, x_3 \rangle, \sigma_{11} = \langle x_3, x_{10}, x_5 \rangle. \end{aligned}$$

Для описания рисунка графа с пересекающимися ребрами можно ввести понятие мнимой вершины – т. е. вершины, которая характеризует топологическое пересечение ребер. Тогда удастся описывать топологический рисунок графа с помощью понятия вращения вершин  $\sigma$  с его свойством индуцировать простые циклы.

В свою очередь, циклы графа принадлежат линейному подпространству циклов графа [27]. Будем рассматривать трехсвязные и выше, несепарабельные неориентированные графы без петель и кратных ребер, без мостов и точек сочленения, без вершин с локальной степенью два и единица.

**Определение 4.** Мнимая вершина – это топологическое местоположение пересечения двух ребер.

На рис. 5 представлен рисунок графа с мнимыми вершинами. Для идентификации мнимых вершин применяется обозначение, отличное от обозначения вершин графа. Таким образом, запись  $(G, \sigma)$  будет обозначать граф G с некоторым вращением  $\sigma$  и одновременно будет характеризовать рисунок графа на плоскости.

Таким образом, рисунок графа с  $n_e$  исходными и  $n_f$  мнимыми вершинами  $n = n_e + n_f$  можно описывать и представлять следующим образом:

1. Трехместным предикатом, устанавливающим соответствие между ребром и его концевой парой вершин в виде матрицы смежностей, матрицы инцидентий или логической записью соответствия между ребром и вершинами;

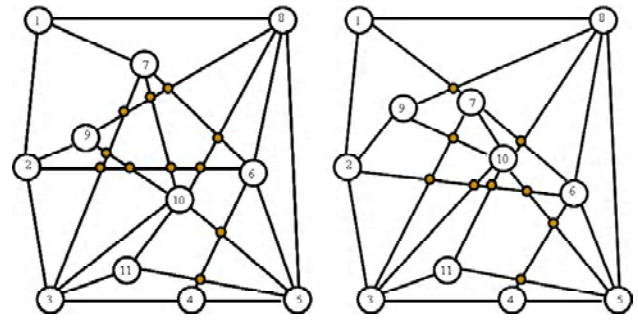


Рис. 5. Рисунок графа G с введенными мнимыми вершинами

2. Вращением вершин  $s$ , записанным в виде множества циклических подмножеств:

$$\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \text{ где } \sigma_i = \langle x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k \rangle, x_i \in X. \quad (2)$$

Для описания заданного топологического рисунка графа на плоскости при заданном трехместном предикате P и вращении вершин  $\sigma$  этого вполне достаточно [28, 29]. Однако, существует и обратная задача, когда вращение вершин исходного графа и вращение мнимых вершин нужно определить при заданном трехместном предикате P.

**Определение 5.** Будем называть максимально плоским суграфом непланарного графа планарный суграф, полученный путем удаления из непланарного графа минимального количества ребер.

Для решения задачи построения топологического рисунка непланарного графа, можно предложить следующую схему выполнения этапов расчета:

- 1) этап выделения единичных циклов графа [28];
- 2) проверка графа на планарность [28];
- 3) если граф непланарен, то выполняется этап выделения максимально плоского суграфа (здесь используются различные методы дискретной оптимизации [25–26, 30–32] для получения нулевого значения функционала Мак-Лейна при соблюдении условия «удаление единичного цикла производится с удалением одного и только одного ребра» [28, 33]);
- 4) этап построения графа циклов;
- 5) этап проведения маршрутов минимальной длины, характеризующих удаленные ребра при выделении максимально плоского суграфа на графе циклов;
- 6) этап разбиения выделенного множества маршрутов минимальной длины на непересекающиеся подмножества с применением методов векторной алгебры пересечений;
- 7) этап построения рисунка графа с минимальным числом пересечений, используя выделенное множество непересекающихся маршрутов минимальной длины методом теории вращений вершин графа [29];
- 8) этап разбиения рисунка графа на минимальное количество непересекающихся по ребрам подмножеств, планарных суграфов (расслоение рисунка графа);
- 9) этап построения геометрического рисунка графа относительно топологического рисунка графа с минимальным числом пересечений;

10) этап корректировки геометрического рисунка графа.

**Пример 1.** На примере графа  $K_7$ , рассмотрим процесс построения рисунка графа для непланарного графа (рис. 6–9).

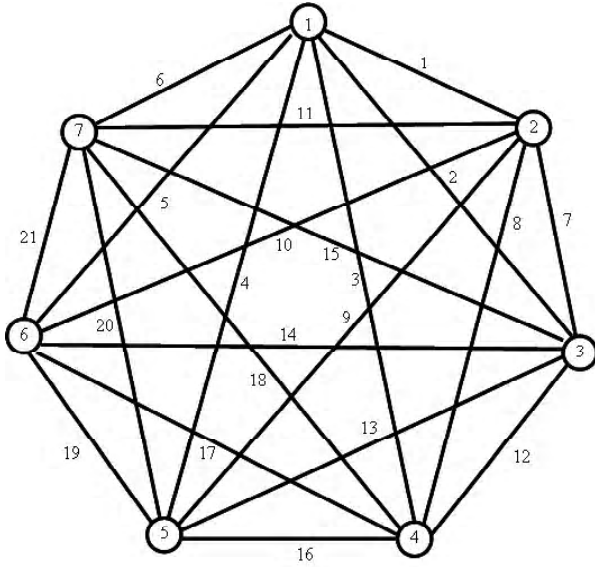


Рис. 6. Полный граф  $K_7$

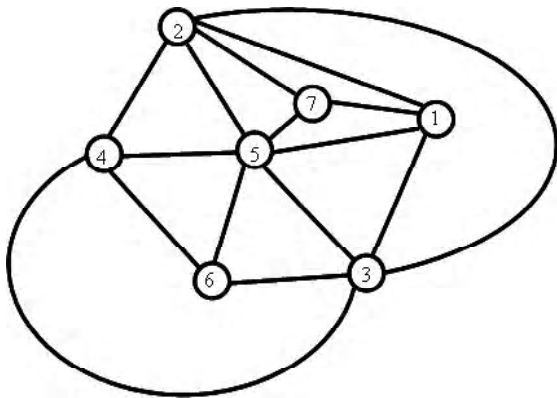


Рис. 7. Максимально плоский суграф для  $K_7$

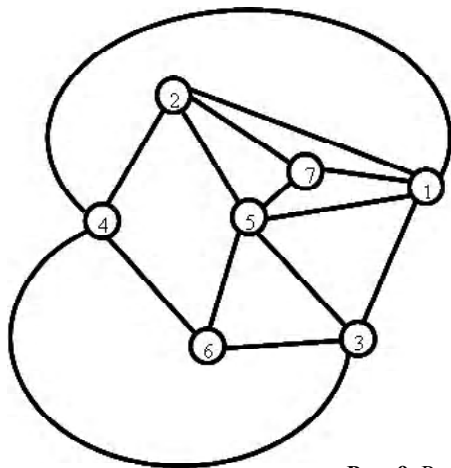


Рис. 9. Разбиение на плоские суграфы

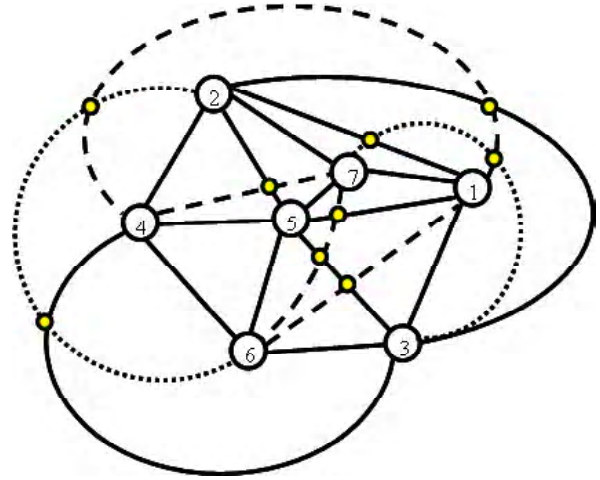


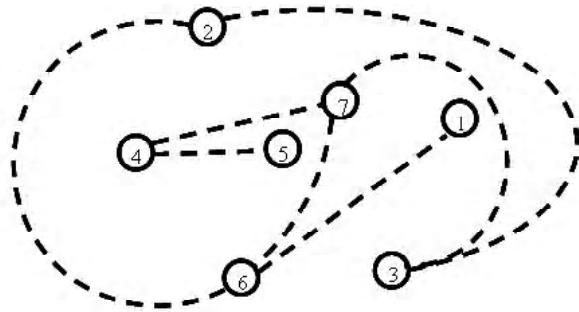
Рис. 8. Минимальное число пересечений ребер для  $K_7$

Первый этап построения максимально плоского суграфа представлен на рис. 7. Здесь множество выделенных простых циклов индуцирует вращение вершин:

- вращение вершины 1: 7 2 3 5 7;
- вращение вершины 2: 7 5 4 3 1 7;
- вращение вершины 3: 2 4 6 5 1 2;
- вращение вершины 4: 2 5 6 3 2;
- вращение вершины 5: 2 7 1 3 6 4 2;
- вращение вершины 6: 4 5 3 4;
- вращение вершины 7: 5 2 1 5.

- $c_1 = \{u_1, u_2, u_7\} \rightarrow \langle x_1, x_3, x_2 \rangle;$
- $c_2 = \{u_1, u_6, u_{11}\} \rightarrow \langle x_7, x_1, x_2 \rangle;$
- $c_3 = \{u_2, u_4, u_{13}\} \rightarrow \langle x_3, x_1, x_5 \rangle;$
- $c_4 = \{u_4, u_6, u_{20}\} \rightarrow \langle x_7, x_5, x_1 \rangle;$
- $c_5 = \{u_8, u_9, u_{16}\} \rightarrow \langle x_4, x_5, x_2 \rangle;$
- $c_6 = \{u_9, u_{11}, u_{20}\} \rightarrow \langle x_5, x_7, x_2 \rangle;$
- $c_7 = \{u_{12}, u_{14}, u_{17}\} \rightarrow \langle x_3, x_6, x_4 \rangle;$
- $c_8 = \{u_{13}, u_{14}, u_{19}\} \rightarrow \langle x_6, x_3, x_5 \rangle;$
- $c_9 = \{u_{16}, u_{17}, u_{19}\} \rightarrow \langle x_6, x_5, x_4 \rangle;$
- $c_0 = \{u_7, u_8, u_{12}\} \rightarrow \langle x_3, x_4, x_2 \rangle$  – это обод.

Второй этап построения рисунка графа с минимальным числом пересечений относительно выделенного максимально плоского суграфа представлен на рис. 7. На рис. 10 представлен окончательный рисунок графа с вращающимися вершинами.



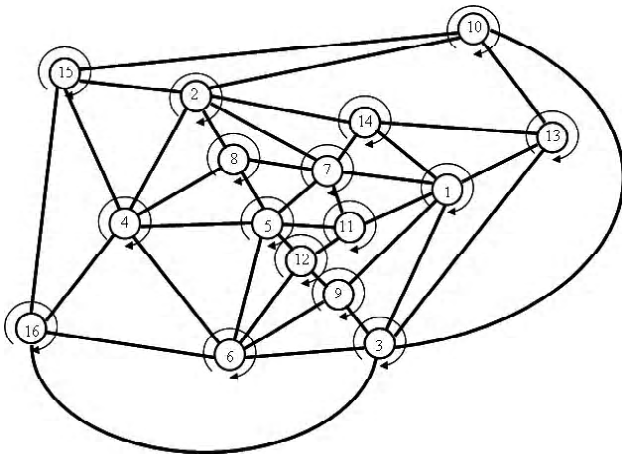


Рис. 10. Вращение вершин графа для рисунка с минимальным числом пересечений ребер

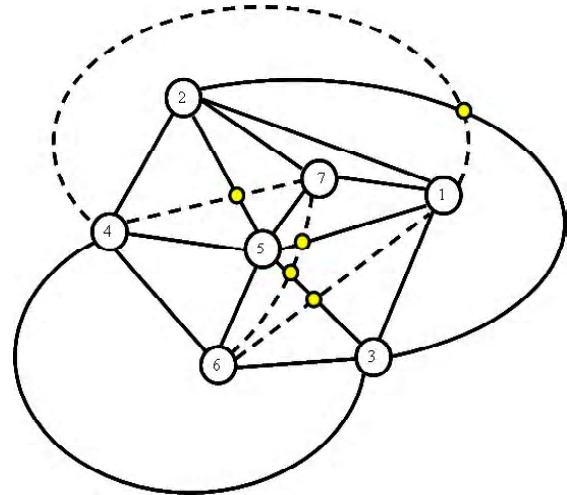


Рис. 12. Введение мнимых вершин (1 проход)

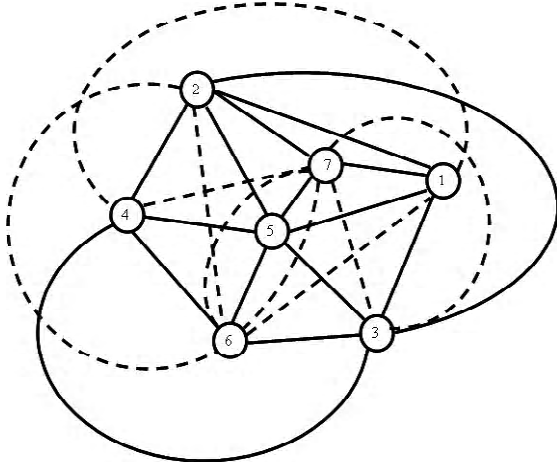


Рис. 11. Построение маршрутов минимальной длины

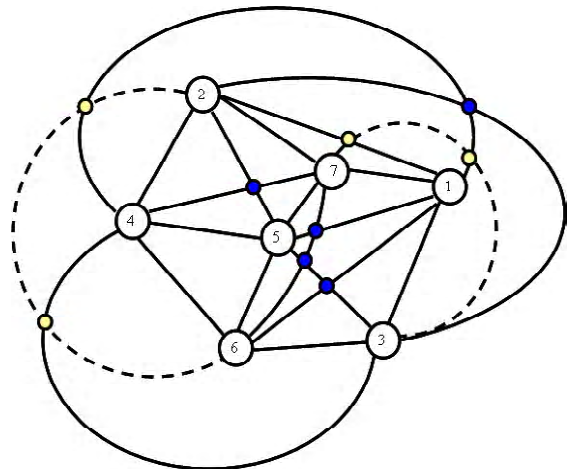


Рис. 13. Введение мнимых вершин (2 проход)

Результат этапа разбиения на минимальное количество планарных суграфов представлен на рис. 9.

После выполнения процедуры построения максимально плоского суграфа, строится граф циклов. При построении графа циклов каждому циклу ставится в соответствие вершина, а ребро определяется истинностью высказывания, если два цикла имеют одно общее ребро. На графе циклов строятся соответствующие маршруты минимальной длины для исключенных ребер в процессе выделения максимально плоского суграфа.

На примере графа  $K_7$  рассмотрим процесс построения маршрутов минимальной длины для исключенных ребер графа (рис. 11).

Методами векторной алгебры пересечений [16] формируем список непересекающихся минимальных маршрутов и определяем топологическое размещение мнимых вершин для первого прохода алгоритма (рис. 12).

Вновь формируем список непересекающихся минимальных маршрутов и определяем топологическое размещение мнимых вершин для второго прохода алгоритма (рис. 13).

Выполняем топологическое размещение мнимых вершин до полного исчерпания списка непроеденных соединений графа.

### РАЗБИЕНИЕ РИСУНКА ГРАФА НА МИНИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ МНОЖЕСТВ ПЛАНАРНЫХ СУГРАФОВ

После построения рисунка графа с минимальным числом пересекающихся ребер, решается задача разбиения рисунка графа на минимальное число непересекающихся планарных подмножеств. Задача разбиения рисунка графа сводится к построению графа реберных пересечений и решению задачи поиска хроматического числа для данного графа. В качестве примера на рис. 14 представлен граф пересечений ребер для графа  $K_7$  на рис. 6.

### ПЕРЕХОД ОТ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО РИСУНКА ГРАФА К ГЕОМЕТРИЧЕСКОМУ РИСУНКУ ГРАФА

На рис. 15 представлен геометрический рисунок графа. Для перехода от топологического рисунка графа с вращающимися вершинами к геометрическому рисунку можно применить все богатство хорошо разработанных методов построения рисунка графа [10–13].

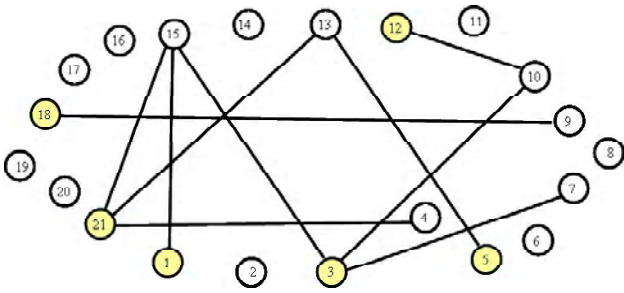


Рис. 14. Граф пересечений ребер

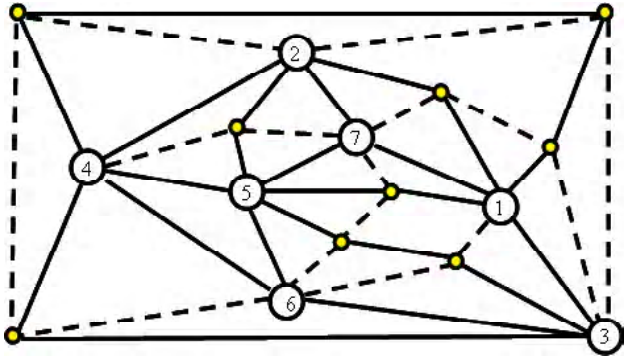


Рис. 15. Геометрический рисунок графа  $K_7$

Математической моделью перехода от топологического рисунка графа к геометрическому рисунку может служить силовая модель, представляющая ребра графа как пружины с заданным модулем упругости, причем, вершины, принадлежащие выделенному циклу (ободу), жестко закреплены. И тогда каждое ребро графа представляется вектором силы прямо пропорциональным его длине:

$$\vec{F} = g\vec{l}, \tag{3}$$

здесь  $\vec{F}$  – вектор силы,  $g$  – модуль упругости,  $\vec{l}$  – вектор длины отрезка.

Для силовой модели сумма векторов сил при равновесии в точке должна быть равна нулю:

$$\sum_{i=1}^p \vec{F}_i = 0, \tag{4}$$

здесь,  $p$  – количество сил, действующих на точку (локальная степень вершины в графе).

К уравнению (3) добавляется условие равенства нулю векторной суммы длин отрезков для любого замкнутого контура (цикла в графе):

$$\sum_{i=1}^k \vec{l}_i = 0, \tag{5}$$

здесь,  $k$  – количество отрезков в контуре (длина цикла в графе).

Уравнения (4–5) аналогичны первому и второму законам Кирхгофа для электрической цепи, в предположении, что сила пружины  $F$  соответствует току ветви  $I$ , а длина пружины  $l$  соответствует падению напряжения  $U$  на ветви. Здесь  $g$  – проводимость ветви. Воспользовавшись данной аналогией, можем составить уравнения равновесия для электрической цепи, а для решения применить хорошо разработанные методы расчета электрических схем. Так как построение осуществляется в двумерном пространстве, то составляется и решается две системы линейных алгебраических уравнений. Одна система уравнений характеризует расположение точек относительно оси абсцисс, другая система уравнений характеризует расположение точек относительно оси ординат. В частности, можно использовать для нахождения решения метод узловых потенциалов.

Недостатком данного подхода является то, что полученный рисунок как бы «стягивает» вершины к центру, неравномерно распределяя их на плоскости. Однако, имеется возможность корректировки решения. Для этого необходимо произвести разбиение вершин на непересекающиеся подмножества топологически равноудаленных от вершин обода.

Топологический рисунок графа с вращающимися вершинами представлен на рис. 16.

На рис. 22 показано распределение вершин по уровням.

Рис. 17 показывает расположение зон для расположения вершин.

На рис. 17–22 показан процесс последовательного расположения вершин по линиям уровня с учетом вращения вершин.

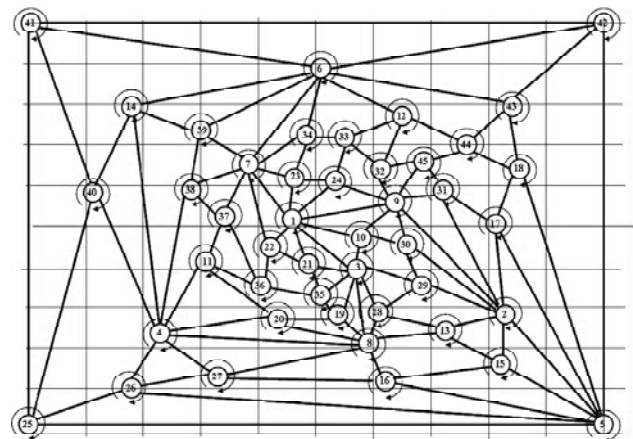


Рис. 16. Рисунок графа

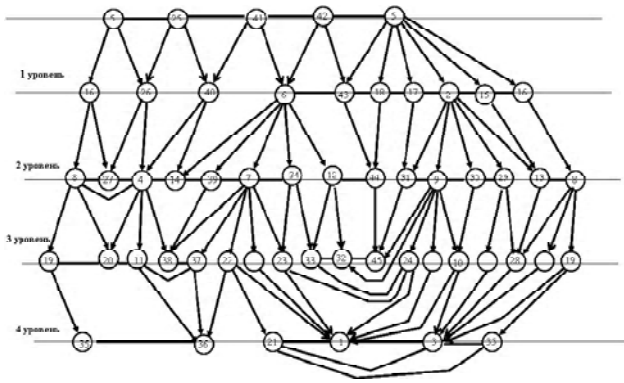


Рис. 17. Уровни вершин

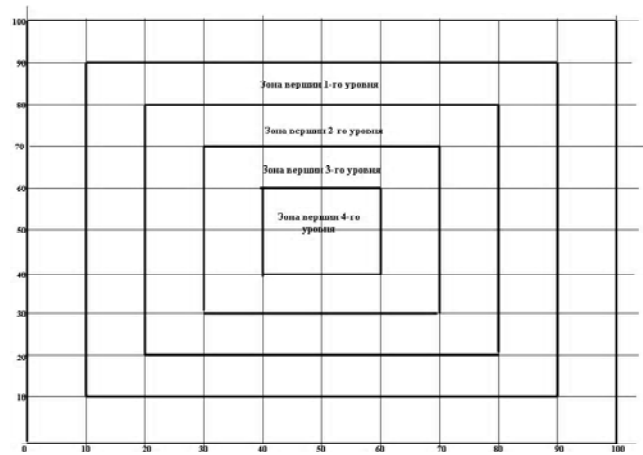


Рис. 18. Зоны уровней

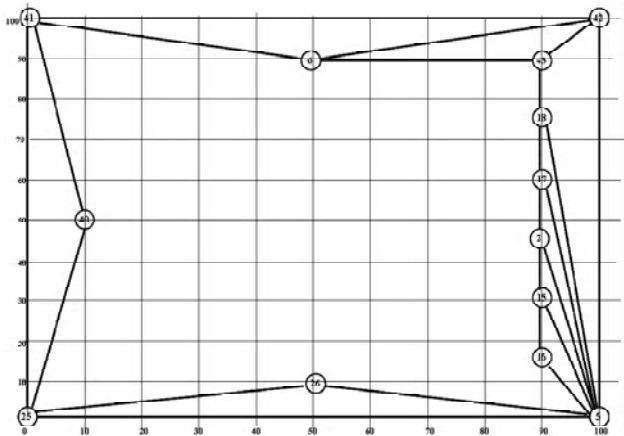


Рис. 19. Вершины 1-го уровня

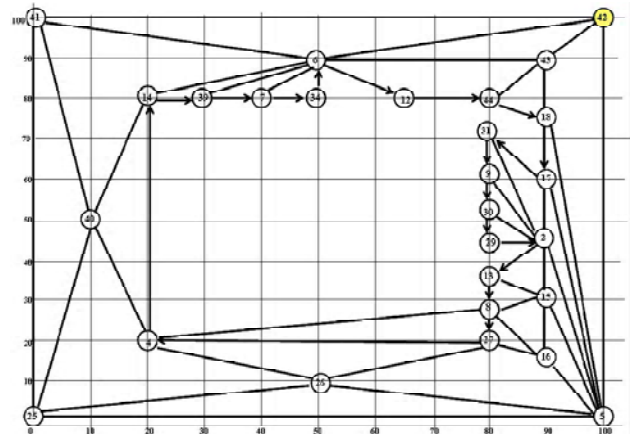


Рис. 20. Вершины 2-го уровня

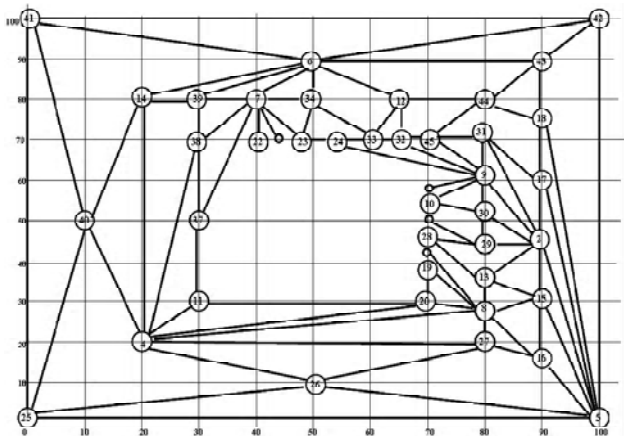


Рис. 21. Вершины 3-го уровня

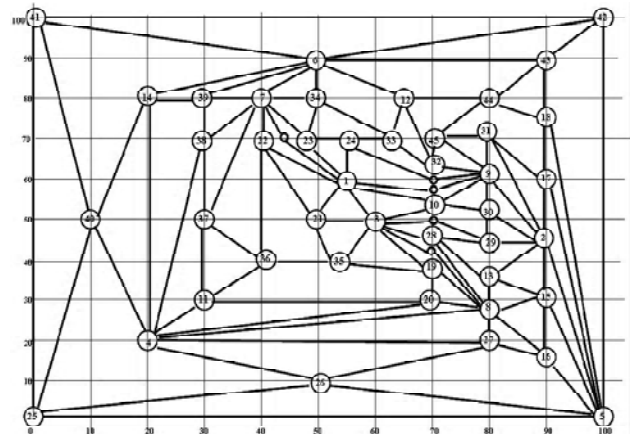


Рис. 22. Вершины 4-го уровня

**ВЫВОДЫ**

Рассмотрены основные этапы и методы построения рисунка графа с минимальным числом пересечения ребер. Приведен пример построения такого рисунка графа.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Абрайтис, Л. Б.* Автоматизация проектирования ЭВМ / Л. Б. Абрайтис, Р. И. Шейнаускас, В. А. Жилевичюс. – М. : Советское радио, 1978. – 272 с.



2. *Баталов, Б. В.* Проектирование топологии интегральных схем на ЭВМ / Б. В. Баталов, В. М. Щемелинин. – М. : Машиностроение, 1979. – 58 с.
3. *Базилевич, Р. П.* Декомпозиционные и топологические методы автоматизированного конструирования электронных устройств / Р. П. Базилевич. – Львов : Вища школа, 1981. – 168 с.
4. *Дамбит, Я. Я.* Алгоритм автоматизированного построения плоского чертежа графа / Я. Я. Дамбит, Э. К. Матисон // Вычислительная техника, Каунас. – 1978, т. 10. – С. 8–9.
5. *Деньдобренько, Б. Н.* Автоматизация конструирования РЭА / Б. Н. Деньдобренько, А. С. Малика. – М. : Высш. школа, 1980. – 384 с.
6. *Курейчик, В. В.* Математическое обеспечение конструкторского и технологического проектирования с применением САПР / В. В. Курейчик. – М. : Радио и связь, 1990. – 352 с.
7. *Мелихов, А. Н.* Применение графов для проектирования дискретных устройств / А. Н. Мелихов, Л. С. Берштейн, В. М. Курейчик. – М. : Наука, ГРФМЛ, 1974. – 304 с.
8. *Норенков, И. П.* Основы автоматизированного проектирования / И. П. Норенков. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 334 с.
9. *Апанович, З. В.* От рисования графов к визуализации информации / З. В. Апанович. – Новосибирск, РАН, 2007. – 24 с.
10. *Di Battista G.* Algorithms for Drawing Graphs: an Annotated Bibliography / G. Di Battista, P. Eades, R. Tamassia, I. G. Tollis // Computational Geometry, Theory and Applications. – 1994. – N 4. – P. 235–282.
11. *Liu, C. L.* On the deletion of nonplanar edges of a graph. / C.L. Liu and R.C. Geldmacher. [1978] – SIAM J.Comput (to appear) / (3.1.4; 3.2.2.; A1.2)
12. *Kozo Sugiyama.* Graph Drawing and applications / Kozo Sugiyama. – New Jersey : World Scientific, 2002. – 128 с.
13. *Takao Nishizeki.* Planar Graph Drawing / Takao Nishizeki, Md. Saidur Rahman. – New Jersey : World Scientific, 2004. – 310 с.
14. *Кристофидес, Н.* Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М. : Мир, 1978. – 432 с.
15. *Емельянов, В. В.* Теория и практика эволюционного моделирования / В. В. Емельянов, В. В. Курейчик, В. М. Курейчик. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 432 с.
16. *Раппопорт, Л. И.* Векторная алгебра пересечений / Л. И. Раппопорт, Б. Н. Мороговский, С. А. Поливцев // Многопроцессорные вычислительные структуры. – 1982. – вып. 2 (11). – С. 53–56.
17. *Гэри, М.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон ; пер. с англ. – М. : Мир, 1982. – 416 с.
18. *Хопкрофт, Дж. Е.* Изоморфизм планарных графов / Дж. Е. Хопкрофт, Р. Е. Тарьян // Кибернетический сборник. Новая серия. – 1975. – вып. 12. – С. 39–61.
19. *Иванов, В. В.* Генетические эвристики для определения планарности графа / В. В. Иванов, Н. В. Курейчик // Перспективные информационные технологии и интеллектуальные системы. – 2000. – № 3. – С. 94–95.
20. *Зыков, А. А.* Теория конечных графов / А. А. Зыков. – Новосибирск : ГРФМЛ, 1963. – 542 с.
21. *Зыков, А. А.* Основы теории графов / А. А. Зыков. – М. : Наука, ГРФМЛ, 1987. – 384 с.
22. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М. : Мир, 1978. – 432 с.
23. *Рейнгольд, Э.* Комбинаторные алгоритмы, теория и практика / Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Дер. – М. : Мир, 1980. – 480 с.
24. *Рингель, Г.* Теорема о раскраске карт / Г. Рингель. – М. : Мир, 1977. – 126 с.
25. *Емеличев, В. А.* Дискретная оптимизация. Последовательные схемы решения. I // Кибернетика. – 1971. – № 6. – С. 97–110.
26. *Емеличев, В. А.* Дискретная оптимизация. Последовательные схемы решения. II // Кибернетика. – 1972. – № 2. – С. 109–121.
27. *Свами, М.* Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхула-сираман; пер. с англ. – М. : Мир, 1984. – 455 с.
28. *Курапов, С. В.* Векторная алгебра и рисунок графа / С. В. Курапов, В. В. Савин. – Запорожье, 2003. – 200 с.
29. *Рингель, Г.* Теорема о раскраске карт / Г. Рингель. – М. : Мир, 1977. – 126 с.
30. *Di Battista, G.* Algorithms for Drawing Graphs: an Annotated Bibliography / G. Di Battista, P. Eades, R. Tamassia, I. G. Tollis // Computational Geometry, Theory and Applications. – 1994. – N 4. – P. 235–282.
31. *Пападимитриу, Х.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц ; пер. с англ. – М. : Мир, 1985. – 512 с.
32. *Сергиенко И. В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации / И. В. Сергиенко. – К. : Наук. думка, 1986. – 384 с.
33. *Takao Nishizeki.* Planar Graph Drawing / Takao Nishizeki, Md. Saidur Rahman. – New Jersey : World Scientific, 2004. – 310 p.

Стаття надійшла до редакції 02.04.2012.

Після доробки 20.11.2012.

Курапов С. В.<sup>1</sup>, Чеченя В. С.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Канд. физ.-мат. наук, доцент, Запорізький національний університету, Україна

<sup>2</sup>Аспірант, Запорізький національний університет, Україна

#### ТОПОЛОГІЧНІ МЕТОДИ ПОБУДОВИ РИСУНКА ГРАФА

У даній роботі розглядається математична модель для побудови рисунка графа з мінімальним числом перетинів. Представлена схема виконання етапів побудови топологічного малюнка непланарного графа. Розглянута математична модель переходу від топологічного малюнка графа до геометричного малюнка використовуючи силову модель, що представляє ребра графа як пружини з заданим модулем пружності.

**Ключові слова:** граф, рисунок графа, обертання вершин, закон Кірхгофа, множина циклів.

Kurapov S. V.<sup>1</sup>, Chechenja V. S.<sup>2</sup><sup>1</sup>Candidate of physical and mathematical sciences, docent, Zaporizhzhya National University, Ukraine<sup>2</sup>Graduate student, Zaporizhzhya National University, Ukraine**TOPOLOGICAL METHODS OF CONSTRUCTION OF GRAPH DRAWING**

In this work a mathematical model for the construction drawing of a graph with the minimum number of intersections is presented. The construction of picture of graph is executed in a few stages, in the beginning is maximally planar sugraph for a nonplanar count, on the second stage the construction of picture of graph is produced, with the minimum number of intersections in relation to selected maximally planar sugraph. After the construction of picture of graph with the minimum number of intersecting ribs, the task of breaking up of picture of graph decides on the minimum number of non-overlapping planar subsets.

Next the process of transition from the topological picture of the graph is further executed with the revolved tops to the geometrical picture. For the geometrical image of picture of graph on a plane it is required to find the coordinates of every top of graph. For this purpose as a power model, presenting the ribs of count as springs with the set module of resiliency, serves as a mathematical model of transition from the topological picture of graph to the geometrical picture, thus, tops, belonging to the selected cycle (to the rim), are hardly fastened. And then every rib of graph appears the vector of force straight proportional his length.

**Keywords:** graph, graph drawing, spinning tops, Kirchhoff's law, number of cycles.

**REFERENCES**

1. Abrajtis L. B., Shejnauskas R. I., Zhilevichjus V. A. *Avtomatizacija proektirovanija JeVM*. Moscow, Sovetskoe radio, 1978, 272 p.
2. Batalov B. V., Shhemelinin V. M. *Proektirovanie topologii integral'nyh shem na JeVM* Moscow, Mashinostroenie, 1979, 58 p.
3. Bazilevich R. P. *Dekompozicionnye i topologicheskie metody avtomatizirovannogo konstruovaniya jelektronnyh ustrojstv*, L'vov, Vishha shkola, 1981, 168 p.
4. Dambit Ja.Ja., Matison Je. K. *Algoritm avtomatizirovannogo postroeniya ploskogo chertezha grafa Vychislitel'naja tehnika, Kaunas*, 1978, Vol. 10, pp. 8–9.
5. Den'dobren'ko B. N., Malika A. S. *Avtomatizacija konstruovaniya RJeA*, Moscow, Vyssh. Shkola, 1980, 384 p.
6. Kurejchik V. V. *Matematicheskoe obespechenie konstruktorskogo i tehnologicheskogo proektirovanija s primeneniem SAPR*, Moscow, Radio i svjaz', 1990, 352 p.
7. Melihov A. N., Bershtejn L. S., Kurejchik V. M. *Primenenie grafov dlja proektirovanija diskretnykh ustrojstv*, Moscow, Nauka, GRFML, 1974, 304 p.
8. Norenkov I. P. *Osnovy avtomatizirovannogo proektirovanija*, Moscow, MGTU im. N. Je. Bauman, 2002, 334 p.
9. Apanovich Z. V. *Ot risovaniya grafov k vizualizacii informacii*. Novosibirsk, RAN, 2007, 24 p.
10. Di Battista G., Eades P., Tamassia R., Tollis I. G. *Algorithms for Drawing Graphs: an Annotated Bibliography Computational Geometry, Theory and Applications*, 1994, No. 4, pp. 235–282.
11. Liu C. L., Geldmacher R. C. *On the deletion of nonplanar edges of a graph*. [1978], *SIAM J. Comput (to appear)* (3.1.4; 3.2.2.; A1.2)
12. Kozo Sugiyama. *Graph Drawing and applications*, New Jersey, World Scientific, 2002, 128 p.
13. Takao Nishizeki, Md. Saidur Rahman. *Planar Graph Drawing*, New Jersey, World Scientific, 2004, 310 p.
14. Kristofides N. *Teorija grafov. Algoritmicheskij podhod*. Moscow, Mir, 1978, 432 p.
15. Emel'janov V. V., Kurejchik V. V., Kurejchik V. M. *Teorija i praktika jevoljucionnogo modelirovanija*. Moscow, FIZMATLIT, 2003, 432 p.
16. Rappoport L. I., Morogovskij B. N., Polivcev S. A. *Vektornaja algebra peresechenij Mnogoproцessornye vychislitel'nye struktury*, Taganrog, 1982, vyp. 2(11), pp. 53–56.
17. Gjeri M., Dzhonson D. *Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi*. Per. s angl., Moscow, Mir, 1982, 416 p.
18. Hopkroft Dzh. E., Tar'jan R. E. *Izomorfizm planarnykh grafov Kiberneticheskij sbornik. Novaja serija*, 1975, vyp. 12, pp. 39–61
19. Ivanov V. V., Kurejchik N. V. *Geneticheskie jevristiki dlja opredelenija planarnosti grafa Perspektivnye informacionnye tehnologii i intelektual'nye sistemy*, Taganrog, 2000, No. 3, pp. 94–95.
20. Zykov A. A. *Teorija konechnykh grafov*, Novosibirsk, GRFML, 1963, 542 p.
21. Zykov A. A. *Osnovy teorii grafov*, Moscow, Nauka, GRFML, 1987, 384 p.
22. Kristofides N. *Teorija grafov. Algoritmicheskij podhod*, Moscow, Mir, 1978, 432 p.
23. Rejngol'd Je, Nivergel't Ju., Der N. *Kombinatornye algoritmy, teorija i praktika*, Moscow, Mir, 1980, 480 p.
24. Ringel' G. *Teorema o raskraske kart*, Moscow, Mir, 1977, 126 p.
25. Emelichev V. A. *Diskretnaja optimizacija. Posledovatel'nye shemy reshenija*. I. *Kibernetika*, No. 6, 1971, pp. 97–110.
26. Emelichev V. A. *Diskretnaja optimizacija. Posledovatel'nye shemy reshenija*. II. *Kibernetika*, No. 2, 1972, pp. 109–121.
27. Svami M., Thulasiraman K. *Grafy, seti i algoritmy*; per. s angl. Moscow, Mir, 1984, 455 p.
28. Kurapov S. V., Savin V. V. *Vektornaja algebra i risunok grafa*, Zaporozh'e, 2003, 200 p.
29. Ringel' G. *Teorema o raskraske kart*, Moskow, Mir, 1977, 126 p.
30. Di Battista G., Eades P., Tamassia R., Tollis I. G. *Algorithms for Drawing Graphs: an Annotated Bibliography Computational Geometry, Theory and Applications*, 1994, No. 4, pp. 235–282.
31. Papadimitriou H., Stajglic K. *Kombinatornaja optimizacija. Algoritmy i slozhnost'*. per. s angl., Moscow, Mir, 1985, 512 p.
32. Sergienko I. V. *Matematicheskie modeli i metody reshenija zadach diskretnoj optimizacii*, Kiev, Nauk. dumka, 1986, 384 p.
33. Takao Nishizeki, Md. Saidur Rahman. *Planar Graph Drawing*, New Jersey, World Scientific, 2004, 310 p.