

## СХЕМА КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ В СИСТЕМЕ МІРЕЛА+

В статье предложена постановка контактной задачи в трехмерной постановке. Для решения поставленной задачи был использован метод конечных элементов на основе интерполяционного полинома Эрмита. Численные расчеты проведены в рамках системы МІРЕЛА+. В работе приведены тестовые примеры расчета параметров контактного взаимодействия эластомерных элементов конструкций. Полученные результаты сравнены с имеющимися классическими решениями.

**Ключевые слова:** контактная задача, метод конечных элементов, классическая постановка контактной задачи, вариационная постановка контактной задачи, интерполяционный полином Эрмита, параметры контактных взаимодействий.

### ВВЕДЕНИЕ

В общей постановке решение контактной задачи сводится к отысканию контактных напряжений и области контактной площадки, взаимодействующих тел. Необходимость расчета напряженно-деформированного состояния тел сложной геометрической формы приводит к применению численных методов. Одним из наиболее распространенных является вариационный метод – метод конечных элементов.

В вариационной постановке решение контактной задачи сводится к минимизации функционала полной энергии с линейными ограничениями в виде неравенств. В частности, если вариационная задача есть задача минимизации полной энергии системы контактирующих линейно упругих тел, то ограничение – неравенство, отражающее физическое требование непроникания. Значительный вклад в развитие данного подхода был сделан такими учеными, как А. С. Кравчук [1, 2], Г. И. Львов [3], А. М. Хлуднев [4], Э. Калкер [5], В. И. Кузьменко [6, 7], В. И. Моссаковский, В. С. Гудрамович [8], В. П. Малков [9], Е. Бетц [10] и др.

Стремительное развитие подходов к решению контактных задач методом конечных элементов послужило толчком к появлению различных программных комплексов, реализующих предложенные подходы на ЭВМ. Наибольшее распространение получили такие вычислительные системы: PLAXIS 3D Foundation [11], ЛИРА-Windows [12], COSMOSWORKS [13], MSC.Nastran [14], ИСПА [15], ANSYS [16], ASKA [17] и др.

МІРЕЛА+ [18], представленная в данной работе, является специализированной системой по расчету эластомерных конструкций на прочность, разрушение и долговечность, предназначена для расчета напряженно-деформированного состояния эластомерных конструкций модифицированным методом конечных элементов – моментной схемой конечного элемента [19]. В рамках данного комплекса разработана подсистема КОЭРМА,

которая позволяет проводить исследования контактных взаимодействий элементов из слабосжимаемых материалов на базе усовершенствованного метода конечных элементов [20].

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНТАКТА

В работе рассматриваются эластомерные элементы, взаимодействующие с другими деталями конструкций, математически условия таких взаимодействия задаются не только классическими краевыми условиями, но и условиями в виде неравенств на границе области.

На рис. 1 изображено тело  $V$ , ограниченное функцией  $z_0 = f_0(x, y)$ , в недеформированном состоянии. Область  $V$  контактирует с абсолютно жестким телом, которое ограничено функцией  $z_2 = g(x, y)$ . Первоначальный зазор между телами в недеформированном состоянии отсутствует, и тела имеют контакт в некоторой области (рис. 1 – точка А).

Нагрузка, действующая со стороны поверхностных сил  $p_i(x, y, z)$ , вызывает перемещение точек тела  $\bar{u}(x, y, z)$  и после деформации функция, описывающая

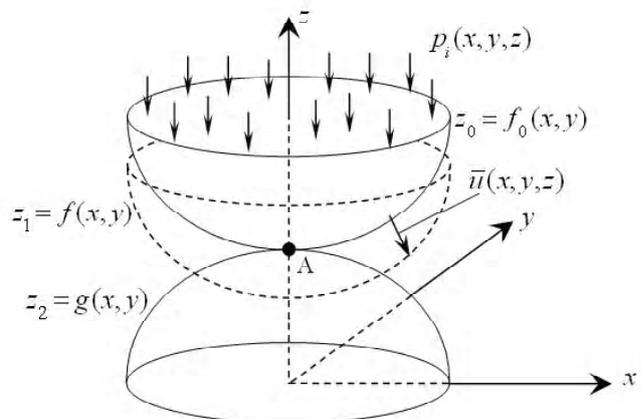


Рис. 1.

тело  $V$  имеет вид  $z_1 = f(x, y)$ . Если в некоторой точке  $(x, y, z) \in S$  происходит контакт двух тел, то в этой точке  $f(x, y) - g(x, y) = 0$ . Кроме того, нормальные напряжения должны быть сжимающими  $\sigma_v(x, y, z) < 0$ . Если же в точке  $(x, y, z) \in S$  контакт отсутствует, то  $f(x, y) - g(x, y) > 0$ ,  $\sigma_v(x, y, z) = 0$ .

Таким образом, для всех точек поверхности должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} f(x, y) - g(x, y) = 0; \\ \sigma_v(x, y, z) < 0; \\ f(x, y) - g(x, y) > 0; \\ \sigma_v(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Выражения (1) моделируют граничные условия контактного взаимодействия двух тел, здесь указаны условия непроникания без указания площадки контактной области.

Таким образом, постановка краевой задачи заключается в определении напряжений и деформаций по площадке контакта и во всем объеме контактирующего тела с учетом условий (1).

Вариационная постановка, соответствующая классической краевой задаче, заключается в отыскании полей перемещений, для которых вариация полной потенциальной энергии принимает минимальное значение. Условия взаимодействия эластомерных элементов конструкций задаются не только классическими краевыми условиями, но и условиями в виде неравенств на границе области. Следовательно, вместо вариационного уравнения получаем вариационное неравенство [21].

В работе [20] представлен аппроксимирующий полином Эрмита, который был применен для построения основных соотношений матрицы жесткости конечного элемента. Введение интерполяционного полинома, учитывающего непрерывность компонент перемещений и их частных производных, позволило улучшить сходимость результатов. В работе на основе приведенной схемы метода конечного элемента был разработан итерационный процесс решения контактных задач для взаимодействия эластомерных элементов конструкций и абсолютно жесткого металлического элемента.

### ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Изложенный подход для расчета напряженно-деформированного состояния эластомерных конструкций в условиях контактного взаимодействия [21] реализован в пакете прикладных программ «КОЭРМА», который написан на языке программирования Фортран и является одной из составных частей вычислительного комплекса «МИРЕЛА+» [18]. «МИРЕЛА+» предназначен для решения задач строительной механики и механики деформированного твердого тела и состоит из нескольких подсистем.

«КОЭРМА» предназначен для расчета напряженно-деформированного состояния эластомерных элементов

в условиях контактных взаимодействий. В подсистеме реализована моментная схема конечного элемента с применением интерполирующего полинома Эрмита.

Эластомерный элемент разбивается на конечные элементы, в узлах которых отыскиваются значения перемещений, нормальных и касательных напряжений по трем направлениям. Контактные взаимодействия моделируются условиями непроникновения точек контактирующих тел.

Процесс расчета, реализованный в данной системе, состоит из трех взаимосвязанных этапов. На первом этапе задается конечно-элементная дискретизация расчетной схемы, топология и граничные условия исследуемого объекта, физические характеристики материала. На втором этапе рассчитываются локальные матрицы жесткости конечных элементов, строится глобальная матрица жесткости конструкции, составляется разрешающая система уравнений. На завершающем этапе находятся вектор узловых перемещений с учетом вектора дополнительной нагрузки, определяются поля деформаций, напряжений, их производных.

Для проведения расчета напряженно-деформированного состояния конструкции в системе «КОЭРМА» необходимо задать входную информацию: топологию дискретной модели, граничные и начальные условия, физико-механические характеристики, геометрию и силовые воздействия.

Расчетная схема конструкции строится путем задания геометрических координат конструкции в базисной декартовой системе координат  $z^k$ . В этой же системе координат вводятся поля нагрузок и граничных условий.

В местной криволинейной системе координат  $x^i$  задается нумерация и сеточные координаты узлов. Значения узловых координат хранятся в массиве  $X(NUX, 3)$ .

Количество разбиений по каждому направлению выбирается в соответствии с размерами конструкции и определяется значениями  $M1, M2, M3$ , где  $M1$  – количество узлов разбиений по оси  $x^1$ ,  $M2$  – по оси  $x^2$ ,  $M3$  – по оси  $x^3$ .

Топология исследуемого объекта задается подпрограммой TELOS( $N1, N2, N3, K1, K2, K3, NF$ ), где  $N1, N2, N3$  – начальные и  $K1, K2, K3$  – конечные сеточные координаты области.  $NF$  – признак, принимающий значения: 71, если для узла в положительном направлении всех осей есть конечный элемент, 7 – для узлов не имеющих конечного элемента в положительном направлении.

В подпрограмме ZAKREP( $N1, N2, N3, K1, K2, K3, IZ, NF$ ) формируются граничные условия, рассчитываемой задачи. Переменная  $IZ$  определяет тип граничного закрепления.

Поле узловых нагрузок  $Q(NUX, 3)$  определяется в подпрограмме HAGPO3( $N1, N2, N3, K1, K2, K3, IZ, NUX, NF, X, Q$ ), где  $IZ$  – номер грани к которой прикладывается нагрузка. Данный вектор определяет интенсивность и направление действия нагрузки на определенный узел.

Упругие постоянные: коэффициент Пуассона, модуль сдвига задаются в подпрограммах ETEM и ANUT.

В подпрограмме FOMAKR формируется глобальная матрица жесткости путем сложения соответствующих коэффициентов локальных матриц жесткости отдельных конечных элементов.

Локальная матрица жесткости формируется на основе вариации упругого потенциала в подпрограмме AKOFM. Коэффициенты матрицы преобразования базисных координат к местным находятся в подпрограмме СКPRO и заносятся в массив СК(MNL), где MNL – количество узлов конечного элемента. Затем строится тензор упругой деформации, его компоненты для традиционной схемы метода конечных элементов находятся в DEFOR1, а для моментной схемы в DEFCUE.

Для построения тензора напряжений используется линейный закон теории упругости – закон Гука. Компоненты функции напряжения формируются в SIGMAT.

Применение кратных интегралов в методе конечных элементов приводит к необходимости использования численного интегрирования. В системе КОЭРМА такие интегралы вычисляются с помощью квадратурной формулы Гаусса:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \approx \sum_i \sum_j \sum_k B_i B_j B_k f(x_i, x_j, x_k), \quad (2)$$

где  $B_i, B_j, B_k$  – весовые коэффициенты,  $x_i, x_j, x_k$  – узлы интегрирования.

На основе коэффициентов матрицы жесткости составляется система линейных алгебраических уравнений. Количество уравнений данной системы находится по формуле  $NEQ=4*M1*M2*M3$ .

Полученная система решается методом Гаусса с помощью подпрограмм GAUSSBL, TRING, DELING, OBRHOD, в которых матрица приводится к треугольному виду и обратным ходом находится ее решение.

Полученные результаты выводятся в файл функцией PRINKS.

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ**

Для исследования сходимости результатов расчетов, проведенных в системе «КОЭРМА», рассмотрим ряд контактных задач, решенных ранее аналитическими методами. Точные решения сравним с численными, которые получены с помощью моментной схемы конечного элемента с учетом контактных взаимодействий.

Задача 1. В эластомерный параллелепипедный элемент вдавливается металлический шар радиусом  $R = 0,03$  м. Расчетная схема элемента приведена на рис. 2. Размеры эластомерного элемента следующие:  $l = 0,17$  м,  $h = 0,3$  м,  $L = 0,275$  м.

Аналитическое решение предложенной задачи было получено А. Н. Динником [22]. При вдавливании металлического шара в плоскость давлением  $p$  им была выведена следующая формула для максимального нормального напряжения:

$$\sigma_Z = \frac{3}{\pi} \sqrt[3]{\frac{32p}{9R^2(\theta_1 + \theta_2)^2}}, \quad (3)$$

где  $\theta_i = \frac{4(1-\nu_i^2)}{E_i} (i = 1, 2)$ .

По данным формулам для металлического шара ( $\nu_1 = 0,3, E_1 = 2 \cdot 10^5$  МПа), вдавливаемого в резиновый параллелепипедный элемент ( $\nu_2 = 0,499, E_2 = 10$  МПа) давлением  $p$ , получены значения напряжений, возникающих в бруске. Аналогичные значения нормальных напряжений были рассчитаны моментной схемой конечного элемента. Сравнение численных результатов с аналитическими показано на рис. 3.

Сходимость приведенного контактного алгоритма исследована численно, в табл. 1 приведены значения

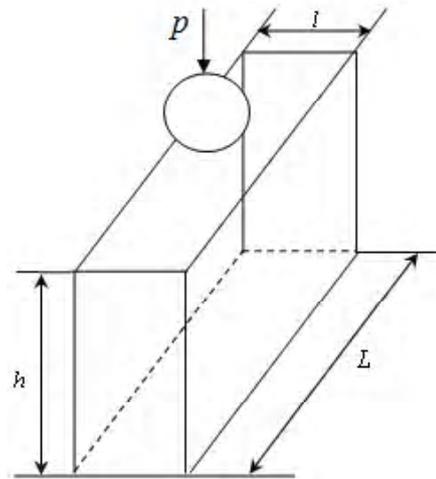


Рис. 2.

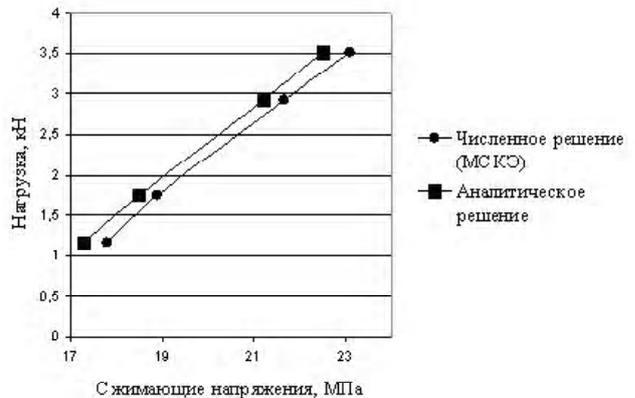


Рис. 3.

**Таблиця 1.** Значення максимальних сжимающих напряжений

Сетка разбиения	МСКЭ		Аналитическое решение, $\sigma_{zz}$ , МПа
	$\sigma_{zz}$ , МПа	$\epsilon$ , %	
Величина нагрузки 2,9 кН			
7x8x5	18,8	11,32	21,2
7x13x5	19,9	6,13	21,2
10x8x5	19,6	7,55	21,2
10x13x5	21,66	2,17	21,2
Величина нагрузки 3,5 кН			
7x8x5	19,89	11,71	22,53
7x13x5	21,05	6,56	22,53
10x8x5	20,73	7,99	22,53
10x13x5	23,1	2,53	22,53
Величина нагрузки 4,7 кН			
7x8x5	22,06	11,04	24,80
7x13x5	23,45	5,43	24,80
10x8x5	23,15	6,64	24,80
10x13x5	25,3	2,03	24,80

максимальных напряжений, рассчитанных при различных значениях величины нагрузки и при различных сетках разбиения на конечные элементы при расчете.

Результаты, приведенные в табл. 1, показывают устойчивую сходимость решений, полученных с применением моментной схемы конечного элемента на основе аппроксимации Эрмита при учете контактных взаимодействий. Причем улучшение получаемого решения дает сгущение сетки по направлению действия нагрузки.

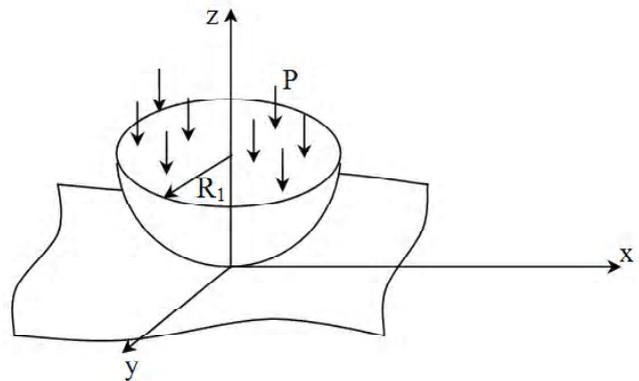
Задача 2. Рассмотрим задачу о контакте упругого полушара с абсолютно жестким полупространством. Радиус полушара  $R_1=0,03$  м, физико-механические характеристики материалов полушара и полупространства следующие: модули упругости  $E_1 = 2 \cdot 10^6$  Па,  $E_2 \rightarrow \infty$ , коэффициенты Пуассона  $\nu_1 = 0,46, \nu_2 = 0,3$  (рис. 4). Полупространство представляется как сфера с радиусом  $R_2 = \infty$ .

Упругий шар вдавливается в абсолютно жесткое полупространство под действием нагрузки  $P$ . Радиус контактной области рассчитывается по формулам [22]:

$$a = P^{\frac{1}{3}} \left( \frac{1}{K} R_1 P \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (4)$$

где  $\frac{1}{K} = \frac{3}{4} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)$  – эффективный модуль Юнга.

Для материала полупространства  $E_2 = \infty$ , тогда  $\frac{1-\nu_2^2}{\infty} = 0$  и  $\frac{1}{K} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1-\nu_1^2}{E_1}$ . Значения величины радиуса контакта были получены моментной схемой конечного элемента с учетом контактных взаимодействий при различных сетках разбиения на конечные элементы при величине нагрузки  $P=0,1$  МПа. Данные результаты были сравнены со значением, рассчитанным по формуле (4) (табл. 2)  $a=0,0134181$  м.



**Рис. 4.**

**Таблиця 2.** Радиусы зоны контакта, рассчитанные моментной схемой конечного элемента

Сетка	Радиус зоны контакта, м	Погрешность, %
6x7x8	0,019	41,6
6x8x8	0,0188	40,1
6x10x8	0,0175	30,4
6x15x8	0,0155	15,5
6x20x8	0,0148	10,3
6x23x8	0,0146	8,8

Как видно из приведенных результатов при сгущении сетки разбиения численное решение, полученное на основе метода конечных элементов, стремится к решению, полученному аналитически.

Сравнение величин радиуса контактной области, рассчитанных аналитическим и численным методом при варьировании нагрузки (рис. 5), также подтверждает правильность приведенного подхода учета контактных взаимодействий.

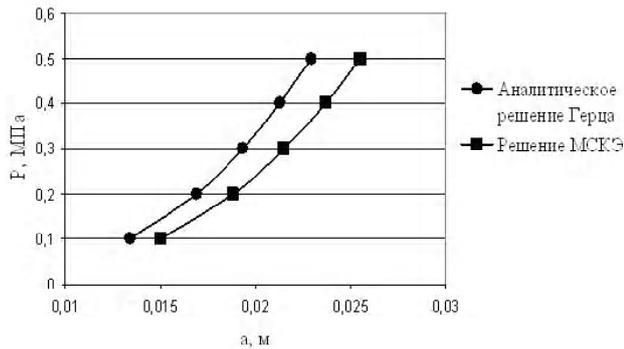


Рис. 5.

## ВЫВОДЫ

В статье приведена математическая модель контактных взаимодействий элементов конструкций в трехмерной постановке. Научной новизной исследования является то, что предложенный итерационный процесс уточнения контактной площадки, реализован в моментной схеме конечного элемента, предназначенной для расчета слабосжимаемых материалов конструкций.

Данная схема контактных взаимодействий реализована в подсистеме «КОЭРМА» – в одной из составных частей вычислительного комплекса «МИРЕЛА+». Особенностью такой системы является то, что она основана на единой методике расчета эластомерных элементов методом конечных элементов, позволяющей учитывать жесткие смещения, эффект ложного сдвига и слабую сжимаемость данного материала.

Подсистема «КОЭРМА» производит расчеты параметров контактных взаимодействий эластомерных элементов с другими элементами конструкций методом конечных элементов. Аппроксимация полей перемещений задается уточняющей аппроксимирующей функцией Эрмита, позволяющей улучшить сходимость численного метода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кравчук, А. С. Решение контактных задач с известной функцией Грина / А. С. Кравчук // Прикладная математика и механика. – 1983. – № 46. – С. 283–288.
2. Кравчук, А. С. Численная реализация вариационного подхода к решению контактных задач теории упругости методом потенциалов / А. С. Кравчук, Е. Р. Ахужанов // Расчеты на прочность. – 1983. – № 25. – С. 12–18.
3. Львов, Г. И. Вариационная постановка контактной задачи для линейно-упругих и физически нелинейных пологих оболочек / Г.И. Львов // Прикладная математика и механика. – 1983. – Т. 46, вып. 5. – 841–846.
4. Хлуднев, А. М. О вариационном неравенстве для оператора пологих оболочек с ограничением на границе / А. М. Хлуднев // Прикладная математика и механика. – 1987. – Т. 51, вып. 3. – С. 345–348.
5. Kalker, J. J. Aspects of contact mechanics / J.J. Kalker // Mech. Contact. Deform. Bodies. Delft. – 1975. – P. 1–25.
6. Кузьменко, В. И. О вариационном подходе в теории контактных задач для нелинейно-упругих тел / В. И. Кузь-

менко // Прикладная математика и механика. – 1979. – Т. 43, вып. 5. – С. 893–901.

7. Кузьменко, В. И. О контактных задачах теории пластичности при сложном нагружении / В.И. Кузьменко // Прикладная математика и механика. – 1984. – Т. 48, вып. 3. – С. 473–481.
8. Моссаковский, В. И. Контактные задачи теории оболочек и стержней / В. И. Моссаковский, В. С. Гудрамович, Е. М. Макеев. – М. : Машиностроение, 1978. – 243 с.
9. Малков, В. П. Оптимизация упругих систем / В. П. Малков, А. Г. Угодчиков. – М. : Наука, 1981. – 288 с.
10. Betz, E. A method for the numerical solution of contact problems / E. Betz, M. A. Levinson // Mech. Res. Commun. – 1976. – Vol. 3. – N 4. – P. 307–313.
11. Программный комплекс конечно-элементных расчетов [Электронный ресурс]: Plaxis представляет собой пакет конечно-элементных программ для двухмерных и трехмерных расчетов напряженно-деформированного состояния. – Электрон. дан. – Режим доступа: [http://www.pinfor.ru/software/plaxis8/plaxis\\_foundation.htm](http://www.pinfor.ru/software/plaxis8/plaxis_foundation.htm) – Загл. с экрана.
12. Прокопович, А. А. Сопротивление изгибу железобетонных конструкций с различными условиями сцепления продольной арматуры с бетоном / Прокопович А. А. – Самара : НВФ «Сенсоры. Модули. Системы», 2000. – 567 с.
13. COSMOSWorks [Электронный ресурс]: мощный и простой в использовании программный комплекс для проведения инженерных расчетов. – Электрон. дан. – Режим доступа: <http://www.solidworks.ru/products/cosmos>. – Загл. с экрана.
14. MSC.NASTRAN [Электронный ресурс]: расчет и оптимизация конструкций. – Электрон. дан. – Режим доступа: <http://www.bee-pitron.com.ua/cae/nastran.htm>. – Загл. с экрана.
15. Интегрированная Система Прочностного Анализа (ИСПА) [Электронный ресурс]: систему расчета напряженно-деформированного состояния конструкций. – Электрон. дан. – Режим доступа: <http://www.ispa-soft.ru/statxi/statxq1.htm>. – Загл. с экрана.
16. Чигарев, А. В. ANSYS для инженеров. Справ. Пособие / А. В. Чигарев, А. С. Кравчук, А. Ф. Смалюк. – М. : Машиностроение-1, 2004. – 512 с.
17. Скрим, Э. Автоматическая система кинематического анализа / Э. Скрим, Дж. Р. Рой // Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ/ Пер. англ. под ред. А. П. Филина : В 2-х т. – Л. : Судостроение, 1974. – Т. 2. – С. 36–67.
18. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+» / [Киричевский В. В., Дохняк Б. М., Козуб Ю. Г. и др.]. – К. : Наук. думка, 2005. – 403 с.
19. Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров / В. В. Киричевский. – К. : Наук. думка, 2002. – 655 с.
20. Решевская, Е. С. Моделирование напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций на основе метода конечных элементов с интерполирующим полиномом Эрмита / Е. С. Решевская, С. Н. Гребенюк // Радиоелектроніка, інформатика. управління. – 2008. – № 1. – С. 85–91.
21. Решевская, Е. С. Исследование параметров контактного взаимодействия элементов конструкций сложной геометрической формы / Е. С. Решевская // Геотехнічна механіка : міжвід. зб. наук. праць. Ін-т геотехнічної механіки ім. М. С. Полякова НАН України. – Дніпропетровськ, 2012. – Вип. 106. – С. 146–150.

22. Динник, А. Н. Удар и сжатие упругих тел / А. Н. Динник. – К. : АН УССР .Механика, 1953. – 151 с.
23. Ландау, Л. Д. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. – М. : Наука, 1987. – 246 с.

Стаття надійшла до редакції 25.12.2012.

Після доробки 16.01.2013.

Решевська К. С.

Канд. техн. наук, старший викладач, Запорізький національний університет, Україна

#### СХЕМА КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ У ТРИВИМІРНІЙ ПОСТАНОВЦІ В СИСТЕМІ MIRELA+

У статті запропоновано постановку контактної задачі в тривимірній постановці. Для вирішення поставленого завдання був використаний метод скінченних елементів на основі інтерполяційного полінома Ерміта. Чисельні розрахунки проведені в рамках системи MIRELA+. У роботі наведені тестові приклади розрахунку параметрів контактної взаємодії еластомерних елементів конструкцій. Отримані результати порівняні з наявними класичними рішеннями.

**Ключові слова:** контактна задача, метод скінченних елементів, класична постановка контактної задачі, варіаційна постановка контактної задачі, інтерполяційний поліном Ерміта, параметри контактних взаємодій.

Reshevskaya E. S.

Ph.D., Senior Lecturer, Zaporizhia National University, department of information technology, Ukraine

#### THE SCHEME CONTACT INTERACTION IN THREE-DIMENSIONAL FORMULATION OF THE SYSTEM MIRELA+

The paper proposes a formulation of the contact problem in the three-dimensional formulation. To solve the problem the finite element method based on the Hermite interpolation polynomial was used. Introduced Hermite polynomial approximation yielded faster convergence than conventional Lagrange polynomials. For the solution of the contact problem by the finite element problem is presented in the form of a variational inequality. Numerical calculations are carried out within the MIRELA+, which is a specialized system for the calculation of weak-materials. The paper presents the test cases for calculating the parameters of contact interaction of elastomeric structural elements. The results are compared with the existing classical solutions.

**Keywords:** contact problem, finite element method, the classical formulation of the contact problem, the variational formulation of the contact problem, the Hermite interpolation polynomial, the parameters of contact interactions.

#### REFERENCES

1. Kravchuk A. S. Reshenie kontaktny'x zadach s izvestnoj funkciej Grina, *Prikladnaya matematika s mehanika*, 1983, Vol. 46, pp. 283–288.
2. Kravchuk A. S. Chislennaya realizaciya variacionnogo podhoda k resheniyu kontaktnuh zadach teorii uprugosti metodom potencialov, *Raschyotu na prochnost'*, 1983, No. 25, pp. 12–18.
3. L'vov G. I. Variacionnaya postanovka kontaktnoj zadachi dlya linejno-uprugih i fizicheski nelinejnih pologih oboloček, *Prikladnaya matematika s mehanika*, 1983, Vol. 46, No. 5, pp. 841–846.
4. Hludnev A. M. O variacionnom neravenstve dlya operatora pologih oboloček s ogranicheniem na granice, *Prikladnaya matematika s mehanika*, 1987, Vol. 51, No. 3, pp. 345–348.
5. Kalker J. J. Aspects of contact mechanics, *Mech. Contact. Deform. Bodies*. Delft, 1975, pp. 1–25.
6. Kuz'menko V. I. O variacionnom podhode v teorii kontaktnuh zadach dlya linejno-uprugih tel, *Prikladnaya matematika i mehanika*, 1979, Vol. 43, No. 5, pp. 893–901.
7. Kuz'menko V. I. O kontaktny'h zadachah teorii plastichnosti pri slozhnom nagruzhennii, *Prikladnaya matematika i mehanika*, 1984, Vol. 48, No. 3, pp. 473–481.
8. Mossakovskij V. I., Gudramovich V. I. Kontakny'e zadachi teorii oboloček i sterzhnej. Moscow, Mashinostroenie, 1978, 243 p.
9. Malkov V. P., Ugodchikov A. G. Optimizaciya uprugih system. Moscow, Nauka, 1981, 288 p.
10. E. Betz, M. A. Levinson A method for the numerical solution of contact problems. *Mech. Res. Commun*, 1976, Vol. 3, No. 4, P. 307–313.
11. [http://www.pinfor.ru/software/plaxis8/plaxis\\_foundation.htm](http://www.pinfor.ru/software/plaxis8/plaxis_foundation.htm)
12. Prokopovich A. A. Soprotivlenie szgibu zhelezobetonny'x konstrukcij s razlichny'mi usloviaymi sčepeniya prodol'noj armatury' s betonom. Samara, NVF «Sensory. Moduli. Sistemu», 2000, 567 p.
13. <http://www.solidworks.ru/products/cosmos>.
14. <http://www.bee-pitron.com.ua/cae/nastran.htm>.
15. <http://www.ispa-soft.ru/statxi/statxq1.htm>.
16. Chigarev A. V., Kravchuk A. V., Smalyuk A. F. ANSYS dlya ingenerov. Moscow, 2004, Mashinostroenie, 512 p.
17. Skrim E', Roj G. Avtomaticheskaya sistema kineticheskogo analiza, Leningrad, Sudostroenie, 1974, N 2, pp.36–37.
18. Kirichevskij V. V., Doxnyak B.M., Kozub Yu.G., Gomenyuk S.I., Kirichevskij R.V., Grebenyuk S.N. Metod konechny'x e'lementov v vy'chislitel'nom komplekse «MIRELA+», Kiev, 2005, 403 p.
19. Kirichevskij V. V. Metod konechnux e'lementov v mexanike e'lastomerov. Kiev, Naukova dumka, 2002, 655 p.
20. Reshevskaya E. S., Grebenyuk S. N. Modelirovanie napryazhyonno-deformirovannogo sostoyaniya tryoxmerny'x konstrukcij na osnove metoda konechny'x elementov s interpoliruyushhim polinomom Ermita, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2008, No. 1, pp. 85–89.
21. Reshevskaya E. S. Issledovanie parametrov kontaktnogo vzaimodejstviya e'lementov konstrukcij slozhnoj geometricheskoy formy', *Geotexnicheskaya mexanika*, 2012, vol. 106, pp. 146–150.
22. Dinnik A. N. Udar i sshatie uprugix tel, Kiev, Izdatel'stvo AN USSR. *Mechanika*, 1953, 151 p.