

# УПРАВЛІННЯ У ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ

# УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

# CONTROL IN TECHNICAL SYSTEMS

УДК 629.764

## ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЇ ПРО ВЕКТОР СТАНУ ВИКОНАВЧОГО ПРИСТРОЮ В СИСТЕМІ СТАБІЛІЗАЦІЇ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ РАКЕТИ

**Авдєєв В. В.** – д-р техн. наук, професор, професор кафедри систем автоматизованого управління Дніпровського національного університету ім. О. Гончара, Дніпро, Україна.

### АНОТАЦІЯ

**Актуальність.** Розроблена методика отримання оцінок залежності запасу стійкості і приведенної роботи на перехідному процесі компенсації постійного збурювального прискорення від наявності в законі регулювання даних про поточні кінематичні параметри виконавчого пористою при умові забезпечення заданого значення статичної похибки, що дасть можливість обґрунтовано приймати рішення про рівень складності відповідних блоків системи стабілізації.

**Мета роботи** – оцінка впливу спрощення закону регулювання за рахунок вилучення з нього даних про вектор стану виконавчого пористою на вимоги до його потужності і запасу стійкості.

**Метод.** Прийнята лінійна стаціонарна в околі певної точки траєкторії модель плоского обертального руху ракети космічного призначення із врахуванням інерції виконавчого пористою. Оцінка запасу стійкості проводиться на площинах коренів характеристичного поліному і двох коефіцієнтів закону регулювання. Віднесена до квадрату постійного збурювального прискорення робота виконавчого пористою визначена шляхом аналітичного розв'язку диференціальних рівнянь збуреного обертального руху в одній із площин стабілізації. Для статично стійкої і нестійкої ракети наведені приклади залежності названих показників від коефіцієнтів закону регулювання при координатах вектору стану.

**Результати.** На прикладі ракети космічного призначення вперше встановлена залежність названих показників системи стабілізації від наявності в законі регулювання сигналів про приведений кут повороту рульового органу і його швидкість.

**Висновки.** Показана можливість вдосконалення системи стабілізації шляхом включення в закон регулювання координат вектору стану виконавчого пористою з погляду показників: запасу стійкості та енергетичні витрати на перехідних процесах.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** стабілізація руху, вектор стану, закон регулювання.

### АБРЕВІАТУРИ

ВП – виконавчий пристрій;  
ЗР – закон регулювання;  
ОУ – об'єкт управління;  
РКП – ракета космічного призначення;  
СС – система стабілізації;  
ХП – характеристичний поліном.

### НОМЕНКЛАТУРА

$A$  – робота ВП на перехідному процесі;  
 $a, b, c$  – коефіцієнти параболи, яка обмежує область стійкості;  
 $am, bm, cm$  – матриці моделі об'єкту управління;  
 $a_{\psi\psi}, a'_{\psi\psi}, a_{\psi\delta}$  – коефіцієнти рівнянь обертального руху ракети у площині ристання;

$B$  – постійна складова аналітичного розв'язку кута повороту рульового органу;

$c1$  – жорсткість поворотного пристрою еквівалентного рульового органу;

$D_0...D_3$  – коефіцієнти аналітичного розв'язку кута повороту рульового органу;

$d$  – коефіцієнт демпфування поворотного пристрою рульового органу;

$e0$  – статична похибка СС при постійному збурювальному прискоренні;

$I$  – момент інерції рульового органу, приведений до осі його повороту;

$k_{\psi}, k'_{\psi}$  – коефіцієнти ЗР;

$k_{\delta}, k'_{\delta}$

$k_{\psi 0}, k'_{\psi 0}$  – номінальні значення двох коефіцієнтів ЗР;

$k_{\psi h}, k_{\psi l}$  – верхнє і нижнє значення  $k_{\psi}$  в області стійкості на прямій  $y = k_{\psi 0}$ ;

$k'_{\psi h}, k'_{\psi l}$  – верхнє і нижнє значення  $k'_{\psi}$  в області стійкості на прямій  $x = k'_{\psi 0}$ ;

$M$  – обертальний момент рульового органу;

$m_0$  – постійне збурювальне прискорення;

$Q, q_0 - q_3$  – ХП, його коефіцієнти;

$q$  – вектор коефіцієнтів ХП;

$s$  – змінна комплексного типу;

$S_{xh}, S_{yh}$  – запас стійкості на площині  $k_{\psi}, k'_{\psi}$  щодо обмежень справа і зверху;

$S_{xl}, S_{yl}$  – запас стійкості на площині  $k_{\psi}, k'_{\psi}$  щодо обмежень знизу і зліва;

$T$  – тривалість перехідного процесу;

$t$  – поточний час з моменту прикладання збурювального прискорення;

$Tac$  – постійна часу ВП;

$u$  – управління – сигнал на виході регулятора;

$x, y$  – абсциса і ордината в рівнянні параболи, яка обмежує область стійкості;

$xv$  – вектор стану ОУ;

$\delta, \dot{\delta}$  – кут повороту рульового органу, його похідна за часом;

$\eta$  – запас стійкості на площині коренів ХП;

$\eta f$  – функція в алгоритмі пошуку максимуму запасу стійкості;

$\xi$  – коефіцієнт демпфування ВП;

$\psi, \dot{\psi}$  – кут рискання ракети, його похідна за часом.

руху РКП, як правило, суперечливі, тому при виборі рівня складності ЗР і коефіцієнтів при координатах вектору стану приймаються компромісні рішення. Від кількості доданків ЗР залежить число датчиків у системі, спираючись на сигнали яких визначаються координати вектору стану. На початковому етапі розробки СС першочерговою є задача забезпечення стійкості обертального руху РКП як твердого тіла, при цьому приймається припущення про незалежність рухів у різних площинах. Завдяки тому, що діапазон частот, характерний для обертального руху, в першому наближенні відокремлений від частот руху центру мас, коливань палива та пружних коливань корпусу, математична модель збуреного обертального руху РКП із врахуванням інерції ВП в околі певної точки траєкторії може бути прийнята у вигляді системи лінійних диференціальних рівнянь четвертого порядку. Методи синтезу ЗР, при яких забезпечується мінімум інтегрального критерію якості перехідного процесу, передбачають врахування всіх координат вектору стану відповідно до прийнятої моделі: кут повороту корпусу, його кутова швидкість, еквівалентний кут повороту рульового органу і його кутова швидкість. Реалізація такого закону передбачає наявність датчиків усіх координат вектору стану, що не є завжди необхідним для забезпечення заданих характеристик [4]. Тому для обґрунтованого вибору ЗР доцільно встановити залежність названих показників СС від врахування в ЗР тих координат вектору стану, які з погляду технічних характеристик РКП не є найбільш пріоритетними, а саме еквівалентний кут повороту рульового органу і його швидкість.

Об'єктом дослідження є контур управління СС плоского обертального руху РКП, предметом дослідження є залежність оцінок запасу стійкості і приведенної роботи ВП від параметрів контуру управління. Метою роботи є встановлення залежності названих показників СС від наявності в ЗР доданків, пропорційних кінематичним параметрам ВП.

## ВСТУП

Рівень складності математичної моделі руху РКП залежить від задачі дослідження. Кількість координат вектору стану може змінюватися від двох, коли розглядається обертальний рух РКП як твердого тіла в одній площині без врахування інерції ВП, до 20 і більше, коли беруться до уваги коливальні контури, обумовлені кінцевою жорсткістю корпусу та коливаннями рідкого палива [1]. До основних показників СС відносяться запас стійкості, точність і якість перехідного процесу при компенсації збурень. Кількісно запас стійкості може бути визначений на площинах коренів ХП, частотної характеристики розімкненої системи або двох вибраних коефіцієнтів ЗР [2]. Для оцінки точності можуть бути використані вектори коефіцієнтів помилок [3], якість перехідного процесу прийнято характеризувати інтегральним критерієм, до якого входять координати вектору стану. Вимоги до запасу стійкості і точності стабілізації програмного

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Під ОУ мається на увазі збурений обертальний рух ракети як твердого тіла у площині рискання. Аналогічно [5] до ОУ включені кінематичні параметри ВП. Відповідно до цього координатами вектору стану  $xv$  є кут рискання  $\psi$ , кутова швидкість  $\dot{\psi}$ , кут повороту руля курсу  $\delta$  і кутова швидкість  $\dot{\delta}$ , тобто  $xv^T = [\psi \ \dot{\psi} \ \delta \ \dot{\delta}]$ . В околі певної точки траєкторії модель ОУ описується рівнянням:

$$\frac{dxv}{dt} = am \cdot xv + bm \cdot u + cm \cdot m_0, \quad (1)$$

де елементи матриці  $am$  залежать від параметрів РКП і траєкторії ( $a_{\psi\psi}, a'_{\psi\psi}, a_{\psi\delta}$ ), постійної часу  $Tac$  ВП і коефіцієнту демпфування  $\xi$ :

$$am = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{\psi\psi} & a'_{\psi\psi} & a_{\psi\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\mu & -\xi \cdot \mu \cdot T_{ac} \end{bmatrix}, \mu = 1/T_{ac}^2.$$

Особливість даного ОУ в тому, що управління

$$u = k_{\psi} \cdot \psi + k'_{\psi} \cdot \dot{\psi} + k_{\delta} \cdot \delta + k'_{\delta} \cdot \dot{\delta}, \quad (2)$$

безпосередньо впливає тільки на кінематичні параметри ВП, тоді як збурювальне прискорення  $m_0$  діє на корпус РКП, тому  $4 \times 1$  – матриці  $b$  і  $c$  такі:

$$bm^T = [0 \ 0 \ 0 \ \mu], \quad cm^T = [0 \ 1 \ 0 \ 0]. \quad (3)$$

Еквівалентні кінематичні параметри рульового органу  $\delta, \dot{\delta}$  можуть бути розраховані також без використання відповідних датчиків спираючись на таблицю функції сигналів  $\psi, \dot{\psi}$ , яка з необхідним рівнем швидкодії поновлюється у реальному часі.

Ставиться задача розробити методику визначення оцінки впливу спрощення ЗР (2) за рахунок вилучення з нього доданків, пропорційних куту повороту рульового органу  $\delta$  або/та його кутовій швидкості  $\dot{\delta}$  на запас стійкості, точність стабілізації і приведену роботу ВП при дії постійного збурювального прискорення.

Наявність такої методики дасть можливість на початковому етапі розробки СС визначати коефіцієнти ЗР виходячи із вимог запасу стійкості і якості перехідного процесу при умові забезпечення заданої точності.

## 2 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Питанням стабілізації руху РКП і космічних апаратів присвячені десятки робіт, перші з них з'явилися в середині минулого сторіччя. Основні отримані результати щодо проектування СС як складової частини системи управління рухом ракети і вибору ЗР містить монографія [1]. Встановлені вимоги до частотної характеристики ВП з урахуванням осциляторів, обумовлених кінцевою жорсткістю корпусу та рідким паливом у баках.

Коливання рідини в баках або в конструкціях корисного навантаження суттєво ускладнює стабілізацію руху і вимагає спеціальних заходів при розробці проекту, зокрема, раціональний вибір форми баків і установку демпферів [6].

Коли в математичній моделі СС беруться до уваги коливання рідкого палива і кінцева жорсткість корпусу, то, як правило, розмірність вектору стану більше числа доданків ЗР, що не дає можливості безпосередньо використати описаний у роботах Красовського відомий метод аналітичного конструювання регуляторів, де коефіцієнти ЗР розраховуються виходячи з критерію якості перехідного процесу. Але необхідний запас стійкості може бути забезпечений при умові

достатнього демпфування в осциляторах і належному виборі частотної характеристики регулятора [7].

Розроблена методика оптимізації ЗР за критерієм «ймовірність стійкості», оскільки параметри РКП відомі з певною похибкою [8]. Її ефективність підтверджена на моделі восьмого порядку, в якій, крім обертового, беруться до уваги рух центру мас, пружність корпусу та динамічні характеристики ВП.

СС обертового руху РКП і космічних апаратів мають спільні особливості з погляду вимог до їхніх характеристик, побудови структурної схеми і математичної моделі, в якій залежно від поставленої задачі необхідно приймати до уваги динамічні властивості ВП.

Для зменшення похибок СС обертового руху низькоорбітального супутника запропонований варіант використання підсистеми зміщення центру мас [9] і нелінійного ЗР, параметри якого визначені методом Ляпунова. Цей метод знаходить також використання в малих супутниках, коли обертовий момент управління створюється взаємодією магнітного поля Землі з магнітним полем соленоїда, жорстко зв'язаного з корпусом. Для цього варіанту СС розроблений алгоритм кусочно постійного моменту управління, у якому відокремлені інтервали часу виміру параметрів магнітного поля Землі і поданням відповідного струму в соленоїд [10]. Як відомо, універсальний метод визначення функції Ляпунова відсутній, тому сфера використання отриманих результатів обмежується структурою вибраних математичних моделей.

Одним із методів розрахунку коефіцієнтів лінійного ЗР, при яких стає найменшою кількісна оцінка (критерій) якості перехідного процесу компенсації збурень СС, є використання системи нелінійних рівнянь Ріккати. В роботі [5] ця система наведена для моделі СС четвертого порядку, а у роботі [11] для моделі другого порядку отриманий її аналітичний розв'язок і запропонований алгоритм визначення елементів симетричної матриці критерія, при яких забезпечуються задані показники СС, зокрема, глобальна стійкість.

В названих вище роботах відсутнє обґрунтування необхідного для забезпечення заданих показників СС рівня складності ЗР, зокрема, включення в нього кінематичних параметрів ВП.

Із врахуванням заданого запасу стійкості аналітичними методами визначені залежності показників, які характеризують похибку компенсації лінійного у часі збурювального прискорення від коефіцієнтів рівнянь руху, параметрів виконавчого і корегувального пристроїв [3]. Результати отримані для моделі СС плоского обертового руху п'ятого порядку, в ЗР якої, крім традиційних, присутні доданки, пропорційні кутовому прискоренню корпусу і кутовій швидкості повороту еквівалентного рульового органу. Ці складові дають можливість збільшити область стійкості на площині решти двох коефіцієнтів ЗР і зменшити окремі координати вектору похибок, але в сигналі

регулятора зростає рівень високочастотної складової перешкод.

Розроблена методика визначення кількісних оцінок запасу стійкості СС плоского обертального руху із врахуванням динамічних характеристик ВП і включенням його кінематичних параметрів в ЗР [2]. Як відомо, на площині коренів ХП запас стійкості величиною дійсної частини найближчого до уявної осі кореня, тоді як на площині двох коефіцієнтів ЗР він визначається обмеженнями області стійкості (зліва, справа, знизу і зверху), віднесеними до номінальних значень координат робочої точки. Запас стійкості за фазою і амплітудою згідно критерію Найквіста розраховується спираючись на відповідну до прийнятої моделі частотну характеристику розімкненої СС. Дослідження ефекту врахування в ЗР кінематичних характеристик ВП з погляду названих показників і якості перехідного процесу при умові заданого значення статичної похибки не проводиться.

Отримані оцінки точності компенсації лінійного збурювального прискорення у вигляді нескладних аналітичних залежностей від параметрів РКП і коефіцієнтів ЗР [12]. Показана можливість компромісного узгодження суперечливих вимог до точності і запасу стійкості. Аналіз вимог до потужності ВП на перехідних процесах компенсації збурень не проводиться.

Аналіз доступних джерел показує, що задача визначення впливу рівня складності ЗР на показники СС обертального руху РКП і космічних апаратів ще не має остаточного розв'язку.

### 3 МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ

В даній роботі шляхом математичного моделювання проводиться оцінка впливу рівня складності ЗР (2) на запас стійкості СС і приведена робота її ВП протягом перехідного процесу компенсації постійного збурювального прискорення.

Названі показники визначаються при умові забезпечення заданого значення статичної похибки  $e_0$ , від якого залежить кут ризику після закінчення перехідного процесу. Аналіз векторів помилок [12] показує, що при цій умові між коефіцієнтами  $k_\psi$  і  $k_\delta$  ЗР (2) має місце лінійна залежність:

$$k_\psi = \frac{(1-k_\delta)}{g}; \quad g = \frac{e_0 \cdot |a_{\psi\delta}|}{(1+a_{\psi\psi} \cdot e_0)}, \quad (4)$$

тому розмірність простору пошуку бажаних значень показників СС зменшується до трьох ( $k_\delta, k'_\delta, k'_\psi$ ).

Математичний апарат для виконання поставленої задачі спирається на рівняння ОУ (1–3) і відомі методи теорії управління.

Так для пошуку максимуму запасу стійкості на площині коренів ХП і з метою його організації при використанні існуючого програмного забезпечення створюється функція

$$\eta f(k_\delta, k'_\delta, k'_\psi), \quad (5)$$

при виконанні якої відповідно до (1–4) проводиться розрахунок вектору  $q$  коефіцієнтів ХП

$$Q(s) = \sum_{i=0}^3 q_i \cdot s^i + s^4, \quad (6)$$

$$q(k_\delta, k'_\delta, k'_\psi) = \begin{bmatrix} q_0(k_\delta) \\ q_1(k_\delta, k'_\delta, k'_\psi) \\ q_2(k_\delta, k'_\delta) \\ q_3(k'_\delta) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \cdot (1-k_\delta) \cdot (|a_{\psi\delta}| / g - a_{\psi\psi}) \\ \mu \cdot [a_{\psi\psi} \cdot (k'_\delta - \xi \cdot Tac) - a_{\psi\delta} \cdot k'_\psi - a'_{\psi\psi} \cdot (1-k_\delta)] \\ \mu \cdot [a'_{\psi\psi} \cdot (k'_\delta - \xi \cdot Tac) + 1 - k_\delta] - a_{\psi\psi} \\ - [a'_{\psi\psi} + \mu \cdot (k'_\delta - \xi \cdot Tac)] \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

його чотирьох коренів  $s_0 \dots s_3$  і запасу стійкості

$$\eta = \min[-\operatorname{Re}(s_0), -\operatorname{Re}(s_1), -\operatorname{Re}(s_2), -\operatorname{Re}(s_3)],$$

де  $\min$  – ім'я процедури визначення найменшого числа в заданому наборі.

В області пошуку повинні виконуватися як необхідні так і достатні умови стійкості. Необхідна умова полягає в тому, щоб коефіцієнти (7) ХП (6) були більшими нуля. Обмеження зверху коефіцієнтів  $k_\delta$  і  $k'_\delta$  ЗР (2) дають нерівності  $q_0 > 0$ ,  $q_3 > 0$ :

$$k_\delta < 1, \quad k'_\delta < \xi \cdot Tac - a'_{\psi\psi} / \mu, \quad (8)$$

Друге обмеження зверху коефіцієнта  $k_\delta$  визначається з нерівності  $q_2 > 0$ , воно може бути розраховане, коли відповідно до (7, 8) вибраний коефіцієнт  $k'_\delta$ :

$$k_\delta < 1 + a'_{\psi\psi} \cdot (k'_\delta - \xi \cdot Tac) - a_{\psi\psi} / \mu. \quad (9)$$

З необхідної умови стійкості  $q_1 > 0$  слідує обмеження знизу коефіцієнта  $k'_\psi$  ЗР (2) при фіксованих  $k_\delta$  і  $k'_\delta$ , вибраних з урахуванням нерівностей (8, 9):

$$k'_\psi > [a'_{\psi\psi} \cdot (1-k_\delta) - a_{\psi\psi} \cdot (k'_\delta - \xi \cdot Tac)] / |a_{\psi\delta}| = k'_{\psi 1}. \quad (10)$$

Таким чином отримані нерівності (8–10) обмежують простір ітераційного пошуку найбільшого значення функції (5).

Щоб дослідити вплив включення в ЗР (2) координат вектору стану ВП  $\delta$  і  $\dot{\delta}$  на запас стійкості на

площині двох коефіцієнтів ЗР –  $k_{\Psi} k'_{\Psi}$ , необхідно використати його кількісні характеристики.

Як відомо, на площині  $k_{\Psi} k'_{\Psi}$  ЗР (2) область стійкості СС замкнута. Для моделі (1–3) її розташування визначене шляхом використання необхідних умов стійкості та відомим методом D – розподілу, тобто відображенням на цю площину уявної осі площини коренів ХП [2].

Обмеження зліва дає необхідна умова  $q_0 > 0$ :

$$k_{\Psi} > k_{\Psi l} = \frac{a_0}{\mu \cdot a_{\Psi \delta}}, \quad a_0 = \mu \cdot a_{\Psi \Psi} \cdot (k_{\delta} - 1), \quad (11)$$

Одне із обмежень знизу визначено в (10). Друге обмеження знизу та обмеження області стійкості справа і зверху дає рівняння параболи, яка є відображенням на площину  $k_{\Psi} k'_{\Psi}$  уявної осі площини коренів ХП:

$$x = k_{\Psi} = a \cdot y^2 + b \cdot y + c, \quad y = k'_{\Psi}, \quad (12)$$

де

$$a = \frac{\mu \cdot a_{\Psi \delta}}{q_3^2}, \quad b = \frac{q_2 - 2a_1 / q_3}{q_3},$$

$$c = (a_0 - \frac{q_2}{q_3} a_1 + \frac{a_1^2}{q_3^2}) / (\mu \cdot a_{\Psi \delta}),$$

$$a_1 = \mu \cdot [a_{\Psi \Psi} \cdot (k_{\delta} - \xi \cdot T_{AC}) + a'_{\Psi \Psi} \cdot (k_{\delta} - 1)].$$

Друге обмеження знизу  $k'_{\Psi 2}$  може бути встановлене після вибору в області стійкості номінального положення робочої точки з координатами  $k_{\Psi 0}, k'_{\Psi 0}$ ,

$$k'_{\Psi 2} = \min(y_1, y_2),$$

де  $y_1, y_2$  корені рівняння  $k_{\Psi 0} = a \cdot y^2 + b \cdot y + c$ . Очевидно до уваги слід прийняти більше із цих обмежень, тобто

$$k'_{\Psi} > k'_{\Psi l} = \max(k'_{\Psi 1}, k'_{\Psi 2}).$$

З рівняння (12) можуть бути знайдені обмеження області стійкості справа і зверху відносно положення робочої точки:

$$k_{\Psi} < k_{\Psi h} = a \cdot (k'_{\Psi 0})^2 + b \cdot k'_{\Psi 0} + c,$$

$$k'_{\Psi} < k'_{\Psi h} = \max(y_1, y_2).$$

Для кількісної оцінки залежності запасу стійкості СС на площині коефіцієнтів ЗР (2)  $k_{\Psi} k'_{\Psi}$  від включення в нього координат вектору стану ВП  $\delta$  і  $\dot{\delta}$  можуть бути використані чотири безрозмірні показники, визначені спираючись на наведені вище обмеження:

$$s_{xh} = \frac{k_{\Psi h} - k_{\Psi 0}}{k_{\Psi 0}}, \quad s_{yh} = \frac{k'_{\Psi h} - k'_{\Psi 0}}{k'_{\Psi 0}}, \quad (13)$$

$$s_{xl} = \frac{k_{\Psi 0} - k_{\Psi l}}{k_{\Psi 0}}, \quad s_{yl} = \frac{k'_{\Psi 0} - k'_{\Psi l}}{k'_{\Psi 0}}.$$

Перші два показники (13) характеризують запас стійкості на площині  $k_{\Psi} k'_{\Psi}$  відносно обмежень зверху і справа, другі два – відносно обмежень зліва і знизу.

Одним із варіантів кількісної оцінки якості перехідного процесу є приведена робота ВП, пропорційна втратам енергії при компенсації збурення. Різні способи управління кутовим положення корпусу ракети в першому наближенні можна описати диференціальним рівнянням другого порядку:

$$I \cdot \ddot{\delta} + d \cdot \dot{\delta} + c_1 \cdot \delta = M.$$

Робота за інтервал часу  $dt$  очевидно є добуток обертого моменту на кут повороту рульового органу, тобто  $M \cdot \dot{\delta} \cdot dt$ , а протягом перехідного процесу тривалістю  $T$  вона дорівнює

$$A = \int_0^T |M(t) \cdot \dot{\delta}(t)| \cdot dt. \quad (14)$$

Для її визначення може бути використаний розв'язок системи диференціальних рівнянь (1–3) в аналітичному вигляді при постійній величині збурювального прискорення  $m_0$  і нульових початкових значеннях. Так кут повороту рульового органу має зручний для отримання похідних за часом вигляд:

$$\delta(t) = B + \sum_{i=0}^3 D_i \cdot e^{s_i t},$$

де  $s_i$  – корені ХП (6), а величини  $B, D_i$  можуть бути визначені операторним методом.

Робота (14) пропорційна  $m_0^2$ , тому для кількісної характеристики якості перехідного процесу компенсації постійного збурення з погляду енергетичних витрат ВП доцільно використати цю величину, віднесену до квадрату збурювального прискорення, тобто  $A/m_0^2$ .

Таким чином алгоритм оцінки ефекту використання в ЗР (2) сигналів  $\delta$  і  $\dot{\delta}$  з погляду запасу стійкості і вимог до потужності ВП при умові забезпечення заданого значення статичної похибки  $e_0$  будується спираючись на запропоновані кількісні характеристики названих показників (5, 13, 14).

#### 4 ЕКСПЕРИМЕНТИ

Експеримент проводиться чисельним шляхом з використанням моделі СС (1–3) і кількісних характеристик її показників (5, 13, 14) на прикладі (табл. 1) статично стійкої ракети ( $a_{\psi\psi} < 0$ ) і статично нестійкої ( $a_{\psi\psi} > 0$ ). Необхідні для розрахунку приведеної роботи параметри ВП наведені у табл. 2. Задане значення статичної похибки  $e_0 = 0,6378 \text{ c}^2$ .

Таблиця 1 – Параметри моделі ОУ

№ варіанту	$a_{\psi\psi}$	$a_{\psi\delta}$	$a'_{\psi\psi}$	$Tac$	$\xi$
	$\text{c}^2$		$\text{C}^{-1}$	$\text{c}$	–
1	–0,30	–0,200	–0,110	0,15	0,8
2	1,12	–0,256	–0,041	0,20	1,1

Таблиця 2 – Параметри ВП

$I$	$c1$	$d$
$\text{кг}\cdot\text{м}^2$	$\text{Н}\cdot\text{м}/\text{рад}$	$\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$
478	3 372 678	2 486

Згідно плану експерименту першим кроком є пошук максимуму запасу стійкості  $\eta$  на площині коренів ХП в обмеженому нерівностями (8–10) тривимірному просторі  $k_\delta k'_\delta k'_\psi$  коефіцієнтів ЗР (2).

Коли кут повороту рульового органу і його швидкість не беруться до уваги, то  $k_\delta = 0$  і  $k'_\delta = 0$ , тому другим кроком експерименту був пошук максимуму  $\eta$  залежно тільки від  $k'_\psi$ , оскільки згідно (4) коефіцієнт  $k'_\psi$  визначається заданим значенням статичної похибки  $e_0$ . Порівняння екстремальних значень  $\eta$ , отриманих на цих кроках дає можливість кількісно оцінити ефект використання в ЗР сигналів  $\delta$  і  $\dot{\delta}$  з погляду цього показника.

Наступні два кроки експерименту проводилися з метою визначення ефекту використання в ЗР сигналів  $\delta$  і  $\dot{\delta}$  з погляду запасу стійкості на площині  $k_\psi k'_\psi$  – чотирьох кількісних оцінок (13) і приведеної роботи ВП. Для порівняння були взяті екстремальні точки коефіцієнтів ЗР, визначені ітераційним шляхом на перших двох кроках.

#### 5 РЕЗУЛЬТАТИ

Використання на першому кроці експерименту процедури пошуку максимуму функції (5) – запасу

стійкості  $\eta$  на площині коренів ХП – у тривимірному просторі  $k_\delta k'_\delta k'_\psi$  коефіцієнтів ЗР (2) показує, що вона має декілька локальних екстремумів, вихід на які залежить від вибору початкової точки пошуку. Для двох прикладів даних в табл. 1 початкові точки з координатами  $k_{\delta 0}, k'_{\delta 0}, k'_{\psi 0}$ , які привели до найбільшого значення  $\eta$ , і кінцеві, наведені в табл. 3.

Особливість знайдених екстремальних точок в тому, що врахування в координатах тільки двох цифр після коми може дати зменшення знайденого максимуму до 25%.

Дослідження залежності запасу стійкості  $\eta$  тільки від одного коефіцієнта ЗР  $k'_\psi$  на другому кроці експерименту при нульових значеннях  $k_\delta$  і  $k'_\delta$  показує, що функція  $\eta(k'_\psi)$  унімодальна і вихід на екстремум (табл. 4) не залежить від початкової точки. На відміну від екстремальної точки у тривимірному просторі, при врахуванні в значенні  $k'_\psi$  двох цифр після коми зменшення запасу стійкості не перевищує десятих часток процента.

Таблиця 3. – Координати початкової і кінцевої точки пошуку максимуму запасу стійкості  $\eta$  на площині коренів ХП

№ варіанту	$k_{\delta 0}$	$k'_{\delta 0}$	$k'_{\psi 0}$	$\eta_0$
	$k_\delta$	$k'_\delta$	$k'_\psi$	$\eta$
	–	$\text{c}$	–	$\text{c}^{-1}$
1	–0,31	–0,17	15	0,9279
	–0,32334	–0,16888	12,66306	2,58876
2	0	–0,17	40	–0,09902
	–0,76885	–0,18778	15,27949	2,50063

Як слідує з порівняння запасу стійкості СС  $\eta$  в табл. 3 і табл. 4, врахування в ЗР (2) кінематичних параметрів ВП може дати суттєву перевагу з погляду цього показника. Для прикладу даних в табл. 1 при дотриманні точності координат екстремальної точки дві цифри після коми ця перевага становить 44% для статично стійкого ОУ і 60% для нестійкого.

Для варіанту даних статично стійкого ОУ (табл. 1) і коефіцієнтів, при яких має місце найбільший запас стійкості на площині коренів ХП (табл. 3, 4), визначений на третьому кроці експерименту ефект включення в ЗР доданків, пропорційних  $\delta$  і  $\dot{\delta}$ , з погляду показників (13) кількісно характеризується першими двома стовпцями табл. 5: показник  $S_{yh}$  збільшився приблизно у чотири рази, тоді як показник  $S_{xh}$  – зменшився на 32%,  $S_{yl}$  – на 7,6%,  $S_{xl}$  залишився без змін.

Таблиця 4 – Найбільше значення запасу стійкості при  $k_{\delta} = 0$  і  $k'_{\delta} = 0$

№ варіанту	$k'_{\psi}$	$\eta$
	с	с <sup>-1</sup>
1	10,88	1,361
2	7,91	1,385

Для варіанту даних статично нестійкого ОУ (другий рядок табл. 1) кількісна характеристика ефекту включення в ЗР доданків з  $\delta$  і  $\delta'$  в стовпцях 3 і 4 табл. 5: показник  $S_{xh}$  зріс на 42%,  $S_{yh}$  – на 123%,  $S_{yl}$  – на ~2%, тоді як  $S_{xl}$  залишився без змін.

Врахування в значеннях коефіцієнтів тільки двох знаків після коми дає варіацію результату не більше одного процента.

На підставі проведених розрахунків встановлено, що екстремальні точки показників запасу стійкості на площині  $k_{\psi}$   $k'_{\psi}$  не збігаються з екстремумом  $\eta$  у тривимірному просторі  $k_{\delta}$   $k'_{\delta}$   $k'_{\psi}$  на площині коренів ХП. Включення в ЗР доданків, пропорційних координатам  $\delta$  і  $\delta'$  вектору стану СС, може збільшити або зменшити окремі показники запасу стійкості (13) на десять і більше процентів.

Таблиця 5 – Оцінки запасу стійкості у відносних одиницях на площині  $k_{\psi}$   $k'_{\psi}$

№	1	2	3	4
$k_{\delta}$	0	-0,32	0	-0,77
$k'_{\delta}$	0	-0,17	0	-0,19
$k_{\psi}$	6,34	8,39	10,50	18,57
$k'_{\psi}$	10,88	12,66	7,91	15,28
$S_{xh}$	7,637	5,205	1,359	1,936
$S_{xl}$	1,237	1,237	0,583	0,583
$S_{yh}$	1,390	5,634	1,546	3,445
$S_{yl}$	0,977	0,903	0,707	0,721

Значення приведеної роботи ВП протягом перехідного процесу компенсації збурювального прискорення залежно від включення в ЗР координат вектору стану ВП (табл. 5) наведені у табл. 6 для коефіцієнтів, при яких має місце найбільший запас стійкості на площині коренів ХП (табл. 3, 4), заданих з точністю дві цифри після коми.

В рядках 1, 2 табл. 6 наведені результати розрахунків приведеної роботи ВП для статично стійкого ОУ ( $a_{\psi\psi} < 0$ ): врахування в ЗР координат  $\delta$  і  $\delta'$  дало зниження приведеної роботи ВП майже на 9%, тоді як для статично нестійкого ОУ ( $a_{\psi\psi} > 0$ , рядки 3, 4 у табл. 6) зниження приведеної роботи  $A/m_0^2$  становить 27%. При врахуванні тільки двох цифр після коми в коефіцієнтах ЗР величини  $A/m_0^2$  змінюються не більше, ніж на один відсоток.

Таблиця 6 – Приведена робота на перехідному процесі ( $T = 5$ ,  $m_0 = 0,00132 \text{ c}^{-2}$ )

№	$k_{\delta}$	$k'_{\delta}$	$k_{\psi}$	$k'_{\psi}$	$A/m_0^2 \cdot 10^{-7}$
	–	с	–	с	Н·м·с <sup>4</sup>
1	0	0	6,34	10,88	9,36
2	-0,32	-0,17	8,39	12,66	8,61
3	0	0	10,50	7,91	14,86
4	-0,77	-0,19	18,57	15,28	11,68

На підставі розрахунків приведеної роботи для двох варіантів даних ОУ встановлено:

а) використання в ЗР вектору стану ВП може привести до зменшення витрат енергії на перехідному процесі компенсації збурювального прискорення;

б) екстремальні точки у тривимірному просторі  $k_{\delta}$   $k'_{\delta}$   $k'_{\psi}$  запасу стійкості на площині коренів ХП і приведеної роботи не збігаються.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ

Забезпечення стійкості обертального руху ракети без врахування кінцевої жорсткості корпусу, коливання рідкого палива і збуреного руху центру мас – одна із основних задач початкового етапу розробки СС. Похибка компенсації збурень обернено пропорційна коефіцієнтам ЗР, але вони обмежені зверху динамічними характеристиками ВП, наближена модель якого у більшості випадків являє собою диференційне рівняння другого порядку. Тому розмірність вектору стану СС у цьому варіанті моделі дорівнює чотирьом, з яких основними його координатами є кут і кутова швидкість повороту корпусу ракети. Якщо в ЗР, крім них, враховуються координати вектору стану ВП, то в СС потрібно збільшити кількість датчиків або в бортовій обчислювальній машині мати відповідної швидкодії програму їх відновлення, що не завжди необхідно для забезпечення заданих значень її показників, зокрема, запасу стійкості і вимог до енергетичних характеристик ВП.

Матеріали даної роботи можуть бути корисними для вибору рівня складності ЗР в СС обертального руху ракети та космічного апарату.

## ВИСНОВКИ

1. Розроблений алгоритм визначення найбільшого запасу стійкості на площині коренів ХП у тривимірному просторі коефіцієнтів ЗР при умові забезпечення заданого значення статичної похибки.

2. На прикладах статично стійкої і нестійкої ракети показана можливість шляхом включення в ЗР координат вектору стану ВП вдосконалення СС з погляду показників: запас стійкості на площині коренів ХП і на площині двох коефіцієнтів ЗР, а також енергетичних витрат ВП протягом перехідного процесу компенсації збурювального прискорення.

3. Якщо в ЗР не входять координати ВП, то при умові забезпечення заданої статичної похибки пошук компромісного рішення між показниками запасу стій-

кості і якості перехідного процесу проводиться вибором коефіцієнта ЗР при кутовій швидкості ракети.

### ПОДЯКИ

Робота виконана на основі матеріалів держбюджетної науково-дослідної теми № ФТФ-30-13 Дніпровського національного університету ім. О. Гончара «Методичне забезпечення систем керування і зв'язку. Моделювання і оптимізація складних процесів і систем», № держ. реєстрації 0114 U000189.

Автор висловлює подяку колективу кафедри систем автоматизованого управління і її філіалу у державному конструкторському бюро «Південне» за підтримку.

### ЛІТЕРАТУРА / LITERATURA

1. Dynamic designing of rockets. Dynamics problems of rockets and space stages: monograph / I. M. Igdalov, L. D. Kuchma, N. V. Poliakov, Ju. D. Sheptun ; under the editorship by academician S. N. Konyukhov. – Dnipro : ЛІРА, 2013. – 280 p.
2. Авдеев В. В. Запас устойчивости системы стабилизации вращательного движения ракеты / В. В. Авдеев // Техническая механика. – 2016. – № 4. – С. 62–69.
3. Авдеев В. В. Коэффициенты ошибок стабилизации вращательного движения ракеты / В. В. Авдеев // Техническая механика. – 2014. – № 3. – С. 71–78.
4. Avdejev V. Law of control and characteristics of a stabilizing system / 6th international conference “Space technologies : present and future” 23–26 May 1917, Dnipro. – P. 113–114.
5. Авдеев В. В. Критерій якості перехідного процесу і показники точності системи стабілізації ракети / В. В. Авдеев // Авиационно-космическая техника и технология. – 2017. – № 1 (136) – С. 4–10.
6. Rogers J. Design consideration for stability of liquid payload projectiles / J. Rogers, M. Castello, G. Cooper // Journal of spacecraft and rockets. – 2013. – No 1, Vol. 50. – P. 169–178. DOI: 10.2514/1.A32292.
7. Хрусталеv М. М. Простой алгоритм стабилизации ориентации спутника с гибким элементом / М. М. Хрусталеv, А. С. Халина // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2012. – Выпуск № 55. www.mai.ru/science/trudy.
8. Сухореврый В. Г. Оптимизация параметров системы стабилизации ракет-носителей с помощью метода вариаций / В. Г. Сухореврый, А. А. Цветкова, А. Б. Шопина // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – 2015. – № 68. – С. 5–12. Режим доступа: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/vikt\\_2015\\_68\\_3](http://nbuv.gov.ua/UJRN/vikt_2015_68_3).
9. Chesi S. Aerodynamic three-axis attitude stabilization of a spacecraft by center-of-mass shifting / S. Chesi, O. Gong, M. Romano // Journal of guidance, control, and dynamics. – 2017. – No. 7, Vol. 40. – P. 1613–1626. DOI: 10.2514/1.G002460.
10. Celani F. Spacecraft attitude stabilization with piecewise-constant magnetic dipole moment / F. Celani // Journal of guidance, control, and dynamics. – 2016. – No 5, Vol. 39. – P. 1140–1146. DOI: 10.2514/1.G001388.
11. Chen C., Liang Y., Jhu W. Global stability of a system with state-dependent Riccati equation controller / C. Chen, Y. Liang, W. Jhu // Journal of guidance, control, and dynamics. – 2015. – No. 10, Vol. 38. – P. 2050–2054. DOI: 10.2514/1.G000989.
12. Авдеев В. В. Точність і запас стійкості системи стабілізації обертального руху ракети / В. В. Авдеев // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2016. – № 3. – С. 93–98. DOI: 10.15588/1607-3274-2016-3-12.

Стаття надійшла до редакції 18.01.2018.  
Після доробки 06.02.2018.

УДК 629.764

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИИ О ВЕКТОРЕ СОСТОЯНИЯ ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА В СИСТЕМЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

**Авдеев В. В.** – д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры систем автоматизированного управления Днепропетровского национального университета им. О. Гончара, Днепр, Украина.

**Актуальность.** Разработана методика получения оценок зависимости запаса устойчивости и приведенной работы на переходном процессе компенсации постоянного возмущающего ускорения от наличия в законе регулирования данных о текущих кинематических параметрах исполнительного устройства при условии обеспечения заданного значения статической ошибки, что даст возможность обоснованно принимать решения про уровень сложности соответствующих блоков системы стабилизации.

**Цель работы** – оценить влияние упрощения закона регулирования за счет исключения из него данных о векторе состояния исполнительного устройства на требования к его мощности и запас устойчивости.

**Метод.** Принята линейная стационарная в окрестности определенной точки траектории модель плоского вращательного движения ракеты космического назначения с учетом инерции исполнительного устройства. Оценка запаса устойчивости проводится на плоскостях корней характеристического полинома и двух коэффициентов закона регулирования. Отнесенная к квадрату постоянного возмущающего ускорения работа исполнительного устройства определена путем аналитического решения дифференциальных уравнений возмущенного вращательного движения в одной из плоскостей стабилизации. Для статически устойчивой и неустойчивой ракеты приведены примеры зависимости названных показателей от коэффициентов закона регулирования при координатах вектора состояния.

**Результаты.** На примере ракеты космического назначения впервые установлена зависимость названных показателей системы стабилизации от наличия в законе регулирования сигналов о приведенном угле поворота рулевого органа и его скорости.

**Выводы.** Показана возможность усовершенствования системы стабилизации путем включения в закон регулирования координат вектора состояния исполнительного устройства с точки зрения показателей: запас устойчивости и энергетические затраты на переходных процессах.



**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** стабилизация движения, вектор состояния, закон регулирования.

UDC 629.764

## USE OF INFORMATION ABOUT STATE VECTOR OF EXECUTIVE DEVICE IN STABILIZING SYSTEM OF A ROCKET ROTATION MOTION

Avdejev V. V. – Dr. Sc., Professor, Professor of O. Gontchar Dniprovsk National University, Dnipro, Ukraine.

**Context.** A method for obtaining estimates of the dependence of stability factor and reduced work during the transient process for compensation of a constant disturbing acceleration on the presence in law of control data about current kinematic parameters of the executive device under condition of ensuring a prescribed static error is developed. It will give a possibility to take decision about level of complexity for appropriate units in stabilizing system.

**Objective.** The purpose of the research is to estimate the influence of the law of control reduction by means of exclusion from one the data about state vector of the executive device on requirements to its power and stability factor.

**Method.** A linear stationary in the vicinity of a certain point of the trajectory model of a plane rotational motion of a rocket for space purposes has been adopted, with taking into account the inertia of the executive device. Estimation of the stability factor is carried out on the plane of the roots of the characteristic polynomial and two coefficients of the law of control. Divided to the square of constant perturbation acceleration, the work of the executive device is determined by analytical solution of the differential equations of perturbed rotational motion in one of the stabilization planes. For statically stable and unstable rocket the dependence examples of the named performances on coefficients of the law of control by coordinates of the state vector are made.

**Results.** For the application of the rocket for space purposes for the first time the dependence of the named indices of stabilizing system on availability in the law of control data about angle of rotation of steering gear and its velocity is established.

**Conclusions.** It is proven the ability of improvement the stabilizing system by means of inclusion in law of control kinematic parameters of the executive device from the point of view of such performances as a stability factor and energy costs during transient processes.

**KEYWORDS:** stabilization of motion, state vector, law of control.

### REFERENCES

1. Igdalov I. M., Kuchma L. D., Poliakov N. V., Sheptun Ju. D.; under the editorship by academician S. N. Konyukhov. Dynamic designing of rockets. Dynamics problems of rockets and space stages: monograph. Dnipro, JIIPA, 2013, 280 p.
2. Avdejev V. V. Zapas ustojchivosti sistemy stabilizacii vrashatel'nogo dvizhenija rakety, *Tekhnicheskaja mehanika*, 2016, No. 4, pp. 62–69.
3. Avdejev V. V. Kojefficienty oshibok stabilizacii vrashatel'nogo dvizhenija rakety, *Tekhnicheskaja mehanika*, 2014, No. 3, pp. 71–78.
4. Avdejev V. Law of control and characteristics of a stabilizing system, *6th international conference "Space technologies: present and future" 23–26 May 1917. Dnipro*, pp. 113–114.
5. Avdejev V. V. Kriterij jakosti perechidnogo processu i pokazniki tochnosti sistemy stabilizacii obertalnogo ruchu rakety, *Aviazionno-kosmicheskaja tehnika i tehnologija*, 2017, No. 1 (136), pp. 4–10.
6. Rogers J., Castello M., Cooper G. Design consideration for stability of liquid payload projectiles, *Journal of spacecraft and rockets*, 2013, No. 1, Vol. 50, pp. 169–178. DOI: 10.2514/1.A32292.
7. Hrustaljov M. M., Halina A. S. Prostoij algoritm stabilizacii orientacii sputnika s gibkim jelementom, *Jeletkronnyj zhurnal «Trudy MAI»*, Vypusk No. 55, 2012. www.mai.ru/science/trudy.
8. Suhorebryj V. G., Cvetkova A. A., Shopina A. B. Optimizacija parametrov sistemy stabilizacii raket-nositelej s pomoshh'ju metoda variacij, *Otkrytye informacionnye i komp'juternye integrirovannye tehnologii*, 2015, No. 68, pp. 5–12. Rezhim dostupu: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/vikt\\_2015\\_68\\_3](http://nbuv.gov.ua/UJRN/vikt_2015_68_3).
9. Chesi S., Gong O., Romano M. Aerodynamic three-axis attitude stabilization of a spacecraft by center-of-mass shifting, *Journal of guidance, control, and dynamics*, 2017, No. 7, Vol. 40, pp. 1613–1626. DOI: 10.2514/1.G00246.
10. Celani F. Spacecraft attitude stabilization with piecewise-constant magnetic dipole moment, *Journal of guidance, control, and dynamics*, 2016, No. 5, Vol. 39, pp. 1140–1146. DOI: 10.2514/1.G001388.
11. Chen C., Liang Y., Jhu W. Global stability of a system with state-dependent Riccati equation controller, *Journal of guidance, control, and dynamics*, 2015, No. 10, Vol. 38, pp. 2050–2054. DOI: 10.2514/1.G000989.
12. Avdejev V. V. Tochnist' i zapas stijkosti sistemi stabilizacii obertalnogo ruchu rakety, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2016, No. 3, pp. 93–98. DOI: 10.15588/1607-3274-2016-3-12.