

## ВЕРИФИКАЦИЯ ПРОТОКОЛОВ ТРЕУГОЛЬНЫХ КОММУНИКАЦИОННЫХ РЕШЕТОК БЕСКОНЕЧНЫМИ СЕТЯМИ ПЕТРИ

**Шмелева Т. Р.** – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры коммутационных систем Одесской национальной академии связи им. А. С. Попова, Одесса, Украина.

### АННОТАЦИЯ

**Актуальность.** Вычислительные и коммуникационные решетки являются мощным средством повышения производительности и качества обслуживания современных сетей. В двумерных решетках основными формами ячейки являются треугольник, четырехугольник и шестиугольник. Треугольные решетки применяются при решении краевых задач с треугольными конечными элементами в системах радиовещания и телевидения. Наиболее простые и эффективные способы реализации решеток могут обладать скрытыми дефектами и уязвимостями с точки зрения безопасного обмена информации. Таким образом, верификация решеток является актуальной задачей.

**Цель работы** – построение моделей треугольных коммуникационных решеток в форме бесконечных сетей Петри и исследование их свойств для доказательства корректности (верификации) протоколов.

**Методы исследований** базируются на основных положениях теории графов, линейной алгебры, теоретических основах сетей Петри, математического и имитационного моделирования.

**Результаты.** Построено параметрическое описание треугольной коммуникационной решетки на плоскости в прямой и двойственной форме. Узел коммутации реализует полнодуплексный режим работы и буферизацию пакетов с ограниченным размером внутреннего буфера. Получены аналитические выражения для оценки числа компонентов модели. Решение бесконечной системы линейных уравнений в параметрической форме позволило доказать инвариантность модели произвольного размера. Инвариантность является одним из основных свойств модели идеального протокола, определяющих безопасность работы сети. Практическая значимость полученных результатов заключается в построении схем безопасных решеток для дальнейшей программной и аппаратной реализации, что официально подтверждено включением моделей треугольных решеток в архив моделей сетей Петри Лаборатории Информатики университета Париж 6.

**Выводы.** Впервые построена математическая модель треугольных коммуникационных решеток с регулярной структурой произвольного размера в форме бесконечных сетей Петри для верификации протоколов передачи информации в решетках. Применение методики для верификации треугольных коммуникационных структур позволяет выполнить дальнейшее развитие теории бесконечных сетей Петри для построения и исследования моделей произвольных решеток с регулярной структурой.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** вычислительные решетки, треугольная коммуникационная структура, бесконечная сеть Петри, параметрическое представление, линейный инвариант, верификация протоколов.

### НОМЕНКЛАТУРА

$i$  – номер уровня (строки) в треугольной решетке;  
 $j$  – номер столбца в  $i$ -м уровне треугольной решетки;  
 $k$  – размер треугольной решетки;  
 $N_{arc}$  – количество дуг в треугольной решетке размера  $k$ ;  
 $N_{max}$  – максимальное количество фишек в любой маркировке;  
 $N_p$  – количество позиций в треугольной решетке размера  $k$ ;  
 $N_i$  – количество переходов в треугольной решетке размера  $k$ ;  
 $p_{max}$  – максимальное количество фишек в буфере коммутатора;  
 $R^{i,j}$  – узел треугольной решетки;  
 $S_k$  – общее число ячеек в решетке с уровнями;  
 $S_{k1}$  – общее число основных ячеек в решетке с уровнями;  
 $S_{k2}$  – общее число дополнительных ячеек в решетке с уровнями;  
 $u$  – номер текущего порта узла;  
 $v$  – номер порта назначения для передачи пакетов в сети;

$W_i$  – число ячеек на уровне  $i$ ;  
 $W_{i1}$  – число основных ячеек на уровне  $i$ ;  
 $W_{i2}$  – число дополнительных ячеек на уровне  $i$ .

### ВВЕДЕНИЕ

Конечные сети Петри являются традиционным средством верификации телекоммуникационных протоколов. Общие вопросы спецификации протоколов изучены в [1]; основные методы верификации, основанные на пространстве состояний и линейных инвариантах сети Петри, представлены в [2]. Решетчатые структуры, организация которых исследована в [3], требуют верификации сети произвольного размера с неограниченным числом взаимодействующих узлов. Для решения таких задач был предложен формализм бесконечных сетей Петри. Параметризация структуры решетки и решение бесконечных систем уравнений в параметрической форме позволяют находить свойства решеток произвольного размера. В работах [5, 7] исследованы свойства прямоугольных решеток на плоскости и в многомерных пространствах. Практическое использование треугольных решеток в системах связи делает актуальной задачу построения и верификации моделей треугольных решеток, решению которой посвящена настоящая работа.

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть рассматриваются методы верификации телекоммуникационных протоколов бесконечными сетями Петри. Модель идеального телекоммуникационного протокола должна обладать свойствами ограниченности и консервативности, безопасности, живости и стационарной повторяемости. Исследуем треугольные коммуникационные решетки произвольного размера с регулярной структурой.

Тогда задача доказательства корректности протоколов треугольных коммуникационных решеток заключается в нахождении инвариантов позиций и переходов (для анализа ограниченности и живости соответственно) моделей треугольных коммуникационных решеток, представленных в форме бесконечных сетей Петри. Построение моделей базируется на правилах композиции треугольной решетки произвольного размера. Для расчета инвариантов сети Петри используем прямое и двойственное параметрические представления.

## 2 ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

Телекоммуникационные системы и сети, общая организация которых изучена в [1], занимают ведущее место в современном информационном пространстве. Надежность, скорость и достоверность передаваемой информации обеспечивается сложнейшими аппаратными и программными средствами. Безопасность используемых средств подтверждается специальными процедурами проверки корректности телекоммуникационных протоколов [2] и оборудования. Новый этап развития телевидения и радиовещания [4], повсеместное использование, внедрение и разработка очередных поколений мобильной связи [6], вычисления на решетках [3] требуют развития методов верификации протоколов сложных телекоммуникационных систем с неограниченным количеством взаимодействующих узлов [5].

В общем случае коммуникационную сеть можно представить в виде решетки [3] с коммутающим (вычислительным) узлом [5, 7]. Вопросы построения и верификации моделей протоколов в форме сетей Петри [9] исследовано для современных сетевых протоколов в [2] и для структур решеток в [7] с различными граничными условиями [8]. Ранее были изучены четырехугольные решетки [7] на плоскости и  $n$ -мерном пространстве с помощью бесконечных сетей Петри. Для построения моделей указанного размера в формате моделирующей системы Типа [10] были предложены генераторы [11] моделей сетей Петри, используемые для проверки параметрических решений.

В настоящей работе построено прямое и двойственное параметрическое описание модели треугольной коммуникационной решетки, которое позволяет автоматизировать генерацию [12] модели решетки произвольного размера и в дальнейшем провести исследование [10, 13] структурных и поведенческих свойств [9] модели.

## 3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Статья развивает новую методологию верификации протоколов бесконечными сетями Петри, которая является решением научной проблемы верификации протоколов с неограниченным количеством взаимодействующих систем. В статье показано практическое применение методологии для верификации треугольных решеток и указана связь таких структур с действующими и перспективными сетевыми решениями.

Для решения поставленных задач введены правила композиции треугольной коммуникационной решетки произвольного размера, определены типы узлов и их количество на разных уровнях решетки. Построены прямое и двойственное параметрические представления треугольной коммуникационной решетки.

Рассмотрим композицию треугольной решетки в соответствии с рис. 1а; для композиции использованы две разновидности устройств, изображенных на рис. 1б и 1в, отличающиеся нумерацией портов и графическим расположением, что в дальнейшем влияет лишь на порядок соединения портов.

Выполним композицию треугольной решетки. Занумеруем ячейки (узлы) сверху вниз и слева направо. Для композиции решетки необходимо ввести обозначение двух разновидностей ячеек: основной ячейкой будем называть начальную ячейку решетки с номером  $R^{1,1}$ ; дополнительной ячейкой будем называть ее нижнего соседа с номером  $R^{2,2}$ .

Утверждение 1. Число ячеек на уровне  $i$  (1) равно:

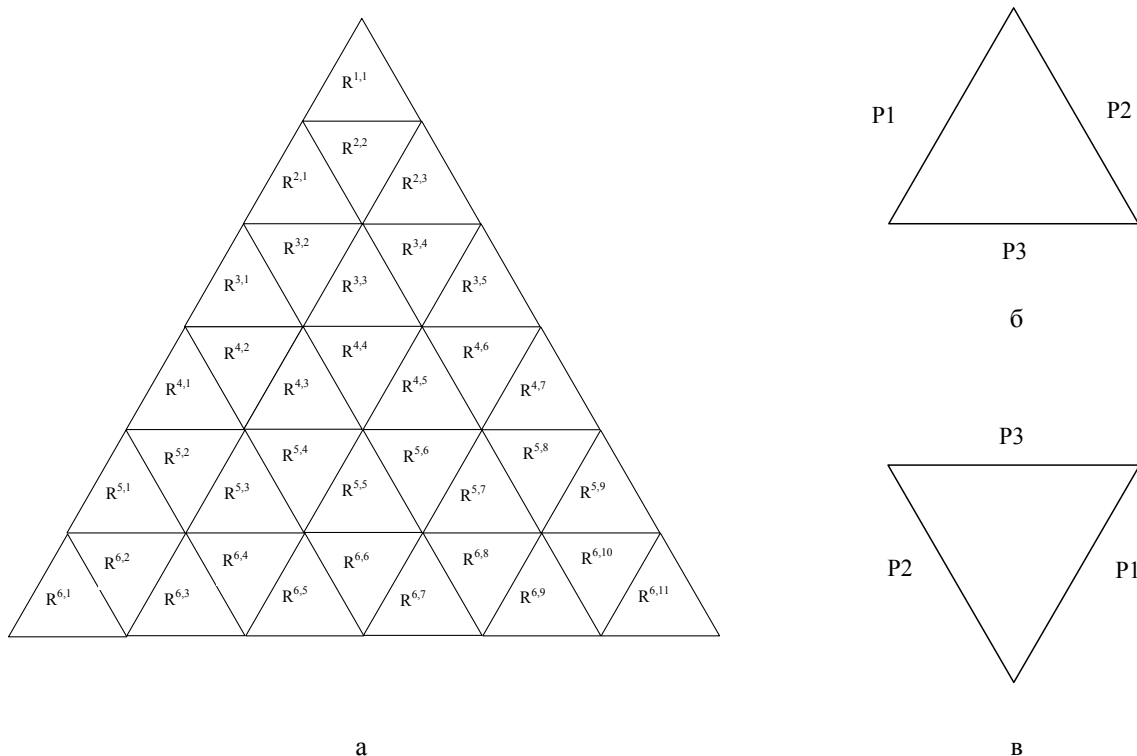
$$W_i = 2 \cdot i - 1. \quad (1)$$

Доказательство. Количество ячеек на первом уровне равно единице,  $W_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ ; количество ячеек на втором уровне равно трем,  $W_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ ; количество ячеек на третьем уровне равно пяти,  $W_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ . Далее выполним доказательство по индукции, предположим, что количество ячеек на  $i$ -м уровне равно  $W_i = 2 \cdot i - 1$ . Подсчитаем количество ячеек на уровне  $(i+1)$ . По построению треугольной решетки на каждом последующем уровне добавляются две новые ячейки,  $W_{i+1} = W_i + 2 = 2 \cdot i - 1 + 2 = 2(i+1) - 1$ .

Утверждение 2. Общее число ячеек в решетке с  $k$  уровнями (2) равно:

$$S_k = \sum_{i=1}^k W_i = \sum_{i=1}^k (2 \cdot i - 1) = \sum_{i=1}^k 2 \cdot i - k = k^2. \quad (2)$$

Доказательство. Количество ячеек в одноуровневой решетке  $k=1$  равно  $1=1^2=k^2$ .



а  
 Рисунок 1 – Схема композиции треугольной решетки:  
 а – композиция решеток; б – основной узел; в – дополнительный узел

Количество ячеек в двухуровневой решетке  $k=2$  равно  $4=2^2 = k^2$ ; количество ячеек в трехуровневой решетке  $k=3$  равно  $9=3^2 = k^2$ . Далее выполним доказательство по индукции, предположим, что количество ячеек на  $k$ -м уровне равно (2). Подсчитаем количество ячеек на уровне  $(k+1)$ . На следующем уровне в решетку добавляется количество ячеек в соответствии с (1), тогда

$$S_{k+1} = S_k + W_{k+1} = k^2 + 2(k+1) - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Утверждение 3. Число основных и дополнительных ячеек на уровне  $i$  (3) равняется:

$$W_{i1} = i, W_{i2} = i - 1. \quad (3)$$

Доказательство. На первом уровне решетки  $i=1$  число основных ячеек равно  $W_{11} = 1 = i$  и дополнительных  $W_{12} = 0 = i - 1$ ; на втором уровне  $i=2$  число основных ячеек равно  $W_{21} = 2 = i$  и дополнительных  $W_{22} = 1 = i - 1$ ; количество ячеек на третьем уровне  $i=3$  равно основным  $W_{31} = 3 = i$  и дополнительных  $W_{32} = 2 = i - 1$ . Далее выполним доказательство по индукции, предположим, что количество основных и дополнительных ячеек на уровне  $i$  равняется  $W_{i1} = i, W_{i2} = i - 1$ . Подсчитаем количество ячеек на уровне  $(i+1)$ . По построению треугольной решетки на каждом последующем уровне добавляются одна основная и

одна дополнительная ячейки, тогда  $W_{(i+1)1} = W_{i1} + 1 = i + 1, W_{(i+1)2} = W_{i2} + 1 = i + 1 - 1 = i$ . Тогда общее число основных и дополнительных ячеек (4) в решетке с  $k$  уровнями равняется:

$$S_{k1} = \sum_{i=1}^k W_{i1} = \sum_{i=1}^k (i) = \frac{k \cdot (k+1)}{2}, \quad (4)$$

$$S_{k2} = \sum_{i=1}^k W_{i2} = \sum_{i=1}^k (i-1) = \sum_{i=1}^k i - k = \frac{k \cdot (k-1)}{2}.$$

Для описания композиции решетки занумеруем порты двух указанных типов ячеек: основной и дополнительной в соответствии с рис. 1 и [5, 12]. При такой нумерации портов в композиции соседних ячеек всегда соединяется пара портов с одинаковыми номерами. Таким образом, для формального описания композиции необходимо указать индексы соседних узлов произвольного заданного узла решетки  $R^{i,j}$ .

Если  $j$  нечетное ( $j \bmod 2 \neq 0$ ), то это текущий узел основного типа, он может иметь соседей справа, снизу, слева. Если  $j$  четное ( $j \bmod 2 = 0$ ), то текущий узел дополнительного типа и может иметь соседей справа, слева, сверху.

Итак, для ячейки  $R^{i,j}$  ( $j \bmod 2 \neq 0$ ) соседними ячейками являются  $R^{i,j-1}, R^{i,j+1}, R^{i+1,j+1}$ , все до-

полнительного типа. Для ячейки  $R^{i,j}$  ( $j \bmod 2 = 0$ ) соседними ячейками являются  $R^{i,j-1}$ ,  $R^{i,j+1}$ ,  $R^{i-1,j-1}$ , все основного типа. Заметим, что в случае  $i-1 < 1$ ,  $j-1 < 1$ ,  $i+1 > k$ ,  $j+1 > k$  соответствующие соседние ячейки отсутствуют; возможно, лишь присоединение терминальных ячеек на границах.

Заметим, что в треугольной решетке достаточно лишь использование имен контактных позиций узлов основного типа, поскольку они окружают узлы дополнительного типа. Таким образом, мы избегаем двойной нумерации позиций, которые объединяются при образовании решетки. Кроме того, на границах решетки находятся только узлы основного типа. Описание композиции (5) открытой треугольной решетки размера  $k$ :

$$\left( \begin{array}{l} pi_1^{i,j} := pi_1^{i,j} \cup po_1^{i,j-1}, \\ pil_1^{i,j} := pil_1^{i,j} \cup pol_1^{i,j-1}, \\ po_1^{i,j} := po_1^{i,j} \cup pil_1^{i,j-1}, \\ pol_1^{i,j} := pol_1^{i,j} \cup pil_1^{i,j-1}, j > 1; \\ pi_2^{i,j} := pi_2^{i,j} \cup po_2^{i,j+1}, \\ pil_2^{i,j} := pil_2^{i,j} \cup pol_2^{i,j+1}, \\ po_2^{i,j} := po_2^{i,j} \cup pil_2^{i,j+1}, \\ pol_2^{i,j} := pol_2^{i,j} \cup pil_2^{i,j+1}, j < W_i; \\ pi_3^{i,j} := pi_3^{i,j} \cup po_3^{i+1,j+1}, \\ pil_3^{i,j} := pil_3^{i,j} \cup pol_3^{i+1,j+1}, \\ po_3^{i,j} := po_3^{i,j} \cup pil_3^{i+1,j+1}, \\ pol_3^{i,j} := pol_3^{i,j} \cup pil_3^{i+1,j+1}, i < k \end{array} \right), \quad (5)$$

$i = \overline{1, k}, j = \overline{1, W_i}, j \bmod 2 \neq 0$

В представленном описании (5) не используются функции, возвращающие значение индекса для соседнего устройства или номер соседнего порта, не требуются специальные соглашения по именованию позиций портов в отличие от [5].

Построим прямое параметрическое представление треугольной решетки. На основании композиции решетки (5) прямое параметрическое представление открытой треугольной решетки размера имеет вид (6).

Для структурного анализа модели решетки в форме сети Петри и исследования свойств модели идеального телекоммуникационного протокола добавим в модель терминальные устройства [8], которые выполняют простейшую обработку сообщений. Прямое параметрическое представление закрытой треугольной решетки размера  $k$  состоит из представления (6) к которому добавлено параметрическое описание терминальных устройств (7).

$$\left( \begin{array}{l} (to_u^{i,j} : pol_u^{i,j}, pb_u^{i,j} \rightarrow po_u^{i,j}, pbl^{i,j}), \\ (ti_{u,v}^{i,j} : pi_u^{i,j}, pbl^{i,j} \rightarrow pb_v^{i,j}, pil_u^{i,j}), \\ v = 1, 3, v \neq u \\ u = \overline{1, 3}, j \bmod 2 \neq 0 \\ (to_1^{i,j} : pil_1^{i,j+1}, pb_1^{i,j} \rightarrow pi_1^{i,j+1}, pbl^{i,j}), \\ (ti_{1,v}^{i,j} : po_1^{i,j+1}, pbl^{i,j} \rightarrow pb_v^{i,j}, pol_1^{i,j+1}), \\ v = 1, 3, v \neq 1, \\ (to_2^{i,j} : pil_2^{i,j-1}, pb_2^{i,j} \rightarrow pi_2^{i,j-1}, pbl^{i,j}), \\ (ti_{2,v}^{i,j} : po_2^{i,j-1}, pbl^{i,j} \rightarrow pb_v^{i,j}, pol_2^{i,j-1}), \\ v = 1, 3, v \neq 2, \\ (to_3^{i,j} : pil_3^{i-1,j-1}, pb_3^{i,j} \rightarrow \\ pi_3^{i-1,j-1}, pbl^{i,j}), \\ (ti_{3,v}^{i,j} : po_3^{i-1,j-1}, pbl^{i,j} \rightarrow \\ pb_v^{i,j}, pol_3^{i-1,j-1}), \\ v = 1, 3, v \neq 3 \\ j \bmod 2 = 0 \\ i = \overline{1, k}, j = \overline{1, W_i} \end{array} \right), \quad (6)$$

На рис. 2 представлены модели узлов треугольной решетки в форме сети Петри. Графические изображения модели основного узла с терминальными переходами показано на рис. 2а; модели дополнительного узла на рис. 2б.

$$(t^{i+1,j} : po_3^{k,j}, pil_3^{k,j} \rightarrow pol_3^{k,j}, pi_3^{k,j}),$$

$j = 1, W_i, j \bmod 2 \neq 0;$

$$\left( \begin{array}{l} (t^{i,0} : po_1^{i,j}, pil_1^{i,j} \rightarrow pol_1^{i,j}, pi_1^{i,j}), j = 1, \\ (t^{i,W_i+1} : po_2^{i,j}, pil_2^{i,j} \rightarrow pol_2^{i,j}, pi_2^{i,j}), j = W_i \end{array} \right), \quad (7)$$

$i = \overline{1, k}.$

Прямое параметрическое представление используется для расчета инвариантов переходов ( $p$ -инвариантов) сети Петри и нахождения свойств ограниченности и консервативности.

Построим двойственное параметрическое представление [5, 7] треугольной решетки в форме бесконечных сетей Петри с регулярной структурой, по модели узла и правилам композиции решетки. Двойственное параметрическое представление используется для расчета  $t$ -инвариантов (или инвариантов переходов) сети Петри и нахождения свойства стационарной повторяемости. Описание состоит из строк следующего вида:

$$p_j : tin_{i_k} * atin_{i_k}, \dots \rightarrow tout_{i_1} * atout_{i_1}, \dots; \text{indices\_range},$$

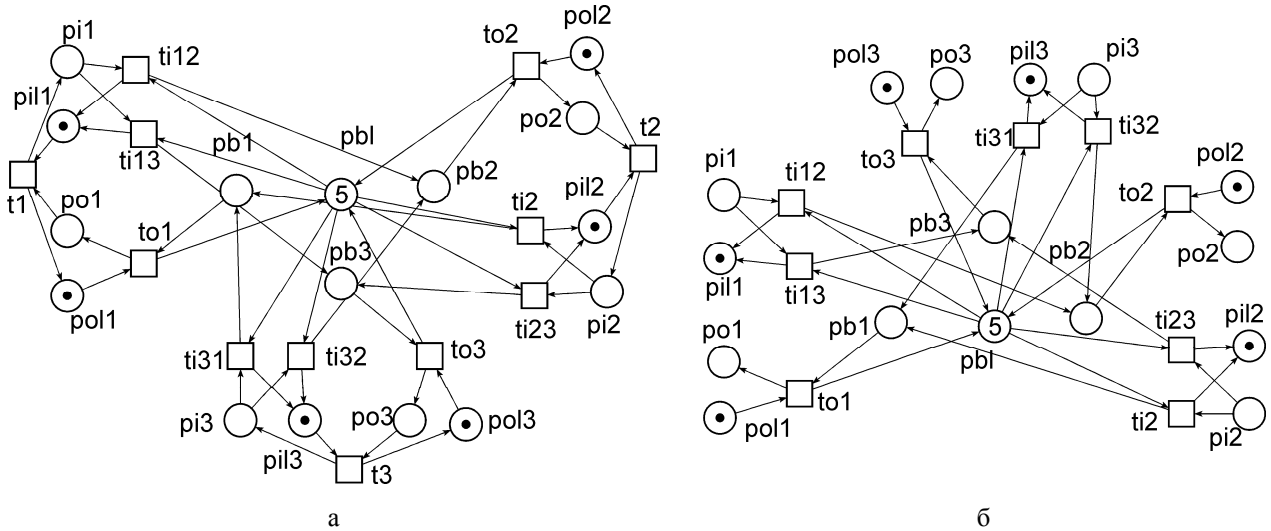


Рисунок 2 – Модели узлов треугольной решетки:  
 а – основной узел с терминальными переходами; б – дополнительный

где  $p_j$  – описываемая позиция;  $tin_{ik}$  – ее входные переходы;  $tout_{ik}$  – ее выходные переходы; величины  $atin_{ik}$ ,  $atout_{ik}$  определяют кратность соответствующих дуг;  $indices\_range$  – диапазон изменения индексов; если вес дуги равен единице, то величины не указываются и такая сеть называется ординарной сетью Петри.

Двойственное параметрическое описание замкнутого узла основного типа, представленного на рис. 2а, треугольной решетки имеет форму (8):

$$\left( \left( \begin{array}{l} (po_u : to_u \rightarrow t^u) \\ (pol_u : t^u \rightarrow to_u) \\ (pi_u : t^u \rightarrow (ti_{u,v}, v = \overline{1,3}, v \neq u)) \\ (pil_u : (ti_{u,v}, v = \overline{1,3}, v \neq u) \rightarrow t^u) \\ (pb_u : (ti_{v,u}, v = \overline{1,3}, v \neq u) \rightarrow to_u) \end{array} \right)_{u = \overline{1,3}} \right) \left( \begin{array}{l} (pbl : (to_u, u = \overline{1,3}) \rightarrow (ti_{v,u}, v = \overline{1,3}, v \neq u)) \\ (u = \overline{1,3}) \end{array} \right) \quad (8)$$

Представление (8) является также спецификацией решетки при  $k=1$ , где  $t^u$  граничные переходы, индекс  $u$  это номер текущего порта узла, индекс  $v$  – номер порта назначения для передачи пакетов в сети. Опишем двойственное параметрическое представление замкнутой треугольной решетки, показанной на рис. 1а, используя последовательность выражений (9)–(13). В (9) показано представление всех внутренних дополнительных и основных узлов решетки:

$$\left( \left( \begin{array}{l} (pb_u^{i,j} : (ti_{v,u}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq u) \rightarrow to_u^{i,j}), u = \overline{1,3}, \\ (pbl^{i,j} : (to_u^{i,j}, u = \overline{1,3}) \rightarrow (ti_{v,u}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq u)) \\ (u = \overline{1,3}) \end{array} \right) \right) \left( \begin{array}{l} i = \overline{2,k}, j \bmod 2 = 0, j = \overline{2, W_i - 1} \end{array} \right)$$

$$\left( \left( \begin{array}{l} (po_1^{i,j} : to_1^{i,j} \rightarrow (ti_{1,v}^{i,j-1}, v = \overline{2,3})), \\ (pol_1^{i,j} : (ti_{1,v}^{i,j-1}, v = \overline{2,3}) \rightarrow to_1^{i,j}), \\ (pi_1^{i,j} : to_1^{i,j-1} \rightarrow (ti_{1,v}^{i,j}, v = \overline{2,3})), \\ (pil_1^{i,j} : (ti_{1,v}^{i,j}, v = \overline{2,3}) \rightarrow to_1^{i,j-1}), \\ (po_2^{i,j} : to_2^{i,j} \rightarrow (ti_{2,v}^{i,j+1}, v = \overline{1,3}, v \neq 2)), \\ (pol_2^{i,j} : (ti_{2,v}^{i,j+1}, v = \overline{1,3}, v \neq 2) \rightarrow to_2^{i,j}), \\ (pi_2^{i,j} : to_2^{i,j+1} \rightarrow (ti_{2,v}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq 2)), \\ (pil_2^{i,j} : (ti_{2,v}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq 2) \rightarrow to_2^{i,j+1}), \\ (po_3^{i,j} : to_3^{i,j} \rightarrow (ti_{3,v}^{i+1,j+1}, v = \overline{1,2})), \\ (pol_3^{i,j} : (ti_{3,v}^{i+1,j+1}, v = \overline{1,2}) \rightarrow to_3^{i,j}), \\ (pi_3^{i,j} : to_3^{i+1,j+1} \rightarrow (ti_{3,v}^{i,j}, v = \overline{1,2})), \\ (pil_3^{i,j} : (ti_{3,v}^{i,j}, v = \overline{1,2}) \rightarrow to_3^{i+1,j+1}), \\ (pb_u^{i,j} : (ti_{v,u}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq u) \rightarrow to_u^{i,j}), u = \overline{1,3}, \\ (pbl^{i,j} : (to_u^{i,j}, u = \overline{1,3}) \rightarrow (ti_{v,u}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq u)), u = \overline{1,3} \end{array} \right) \right) \left( \begin{array}{l} i = \overline{3, k-1}, j \bmod 2 \neq 0, j = \overline{3, W_i - 2} \end{array} \right) \quad (9)$$

Левые основные граничные узлы (10) без узлов первого и последнего уровня:

$$\left( \left( \begin{array}{l} (po_1^{i,j} : to_1^{i,j} \rightarrow t^{i,j-1}), \\ (pol_1^{i,j} : t^{i,j-1} \rightarrow to_1^{i,j}), \\ (pi_1^{i,j} : t^{i,j-1} \rightarrow (ti_{1,v}^{i,j}, v = \overline{2,3})), \\ (pil_1^{i,j} : (ti_{1,v}^{i,j}, v = \overline{2,3}) \rightarrow t^{i,j-1}), \\ (po_2^{i,j} : to_2^{i,j} \rightarrow (ti_{2,v}^{i,j+1}, v = \overline{1,3}, v \neq 2)), \\ (pol_2^{i,j} : (ti_{2,v}^{i,j+1}, v = \overline{1,3}, v \neq 2) \rightarrow to_2^{i,j}), \\ (pi_2^{i,j} : to_2^{i,j+1} \rightarrow (ti_{2,v}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq 2)), \\ (pil_2^{i,j} : (ti_{2,v}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq 2) \rightarrow to_2^{i,j+1}), \\ (po_3^{i,j} : to_3^{i,j} \rightarrow (ti_{3,v}^{i+1,j+1}, v = \overline{1,2})), \\ (pol_3^{i,j} : (ti_{3,v}^{i+1,j+1}, v = \overline{1,2}) \rightarrow to_3^{i,j}), \\ (pi_3^{i,j} : to_3^{i+1,j+1} \rightarrow (ti_{3,v}^{i,j}, v = \overline{1,2})), \\ (pil_3^{i,j} : (ti_{3,v}^{i,j}, v = \overline{1,2}) \rightarrow to_3^{i+1,j+1}), \\ (pb_u^{i,j} : (ti_{v,u}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq u) \rightarrow to_u^{i,j}), u = \overline{1,3}, \\ (pbl_u^{i,j} : (to_u^{i,j}, u = \overline{1,3}) \rightarrow \\ ((ti_{v,u}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq u), u = \overline{1,3})) \end{array} \right) \right) \\ i = \overline{2, k-1}, j = 1$$

(10)

Основные узлы решетки  $k$ -го уровня (12) без первого и последнего элементов:

$$\left( \left( \begin{array}{l} (po_1^{i,j} : to_1^{i,j} \rightarrow (ti_{1,v}^{i,j-1}, v = \overline{2,3})), \\ (pol_1^{i,j} : (ti_{1,v}^{i,j-1}, v = \overline{2,3}) \rightarrow to_1^{i,j}), \\ (pi_1^{i,j} : to_1^{i,j-1} \rightarrow (ti_{1,v}^{i,j}, v = \overline{2,3})), \\ (pil_1^{i,j} : (ti_{1,v}^{i,j}, v = \overline{2,3}) \rightarrow to_1^{i,j-1}), \\ (po_2^{i,j} : to_2^{i,j} \rightarrow (ti_{2,v}^{i,j+1}, v = \overline{1,3}, v \neq 2)), \\ (pol_2^{i,j} : (ti_{2,v}^{i,j+1}, v = \overline{1,3}, v \neq 2) \rightarrow to_2^{i,j}), \\ (pi_2^{i,j} : to_2^{i,j+1} \rightarrow (ti_{2,v}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq 2)), \\ (pil_2^{i,j} : (ti_{2,v}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq 2) \rightarrow to_2^{i,j+1}), \\ (po_3^{i,j} : to_3^{i,j} \rightarrow t^{i+1,j}), \\ (pol_3^{i,j} : t^{i+1,j} \rightarrow to_3^{i,j}), \\ (pi_3^{i,j} : t^{i+1,j} \rightarrow (ti_{3,v}^{i,j}, v = \overline{1,2})), \\ (pil_3^{i,j} : (ti_{3,v}^{i,j}, v = \overline{1,2}) \rightarrow t^{i+1,j}), \\ (pb_u^{i,j} : (ti_{v,u}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq u) \rightarrow to_u^{i,j}), u = \overline{1,3}, \\ (pbl_u^{i,j} : (to_u^{i,j}, u = \overline{1,3}) \rightarrow \\ ((ti_{v,u}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq u), u = \overline{1,3})) \end{array} \right) \right) \\ i = k, j \bmod 2 \neq 0, j = \overline{3, W_i - 2}$$

(12)

Правые основного типа граничные узлы (11) без узлов первого и последнего уровня:

$$\left( \left( \begin{array}{l} (po_1^{i,j} : to_1^{i,j} \rightarrow (ti_{1,v}^{i,j-1}, v = \overline{2,3})), \\ (pol_1^{i,j} : (ti_{1,v}^{i,j-1}, v = \overline{2,3}) \rightarrow to_1^{i,j}), \\ (pi_1^{i,j} : to_1^{i,j-1} \rightarrow (ti_{1,v}^{i,j}, v = \overline{2,3})), \\ (pil_1^{i,j} : (ti_{1,v}^{i,j}, v = \overline{2,3}) \rightarrow to_1^{i,j-1}), \\ (po_2^{i,j} : to_2^{i,j} \rightarrow t^{i,j+1}), \\ (pol_2^{i,j} : t^{i,j+1} \rightarrow to_2^{i,j}), \\ (pi_2^{i,j} : t^{i,j+1} \rightarrow (ti_{2,v}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq 2)), \\ (pil_2^{i,j} : (ti_{2,v}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq 2) \rightarrow t^{i,j+1}), \\ (po_3^{i,j} : to_3^{i,j} \rightarrow (ti_{3,v}^{i+1,j+1}, v = \overline{1,2})), \\ (pol_3^{i,j} : (ti_{3,v}^{i+1,j+1}, v = \overline{1,2}) \rightarrow to_3^{i,j}), \\ (pi_3^{i,j} : to_3^{i+1,j+1} \rightarrow (ti_{3,v}^{i,j}, v = \overline{1,2})), \\ (pil_3^{i,j} : (ti_{3,v}^{i,j}, v = \overline{1,2}) \rightarrow to_3^{i+1,j+1}), \\ (pb_u^{i,j} : (ti_{v,u}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq u) \rightarrow to_u^{i,j}), u = \overline{1,3}, \\ (pbl_u^{i,j} : (to_u^{i,j}, u = \overline{1,3}) \rightarrow \\ ((ti_{v,u}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq u), u = \overline{1,3})) \end{array} \right) \right) \\ i = \overline{2, k-1}, j = W_i$$

(11)

Три вершины треугольной решетки (13), которым соответствуют узлы с индексами (1,1) – описание (13.1),  $(k,1)$  – описание (13.2),  $(k, W_k)$  – описание (13.3):

$$\left( \left( \begin{array}{l} (po_1^{i,j} : to_1^{i,j} \rightarrow t^{i,j-1}), \\ (pol_1^{i,j} : t^{i,j-1} \rightarrow to_1^{i,j}), \\ (pi_1^{i,j} : to_1^{i,j-1} \rightarrow (ti_{1,v}^{i,j}, v = \overline{2,3})), \\ (pil_1^{i,j} : (ti_{1,v}^{i,j}, v = \overline{2,3}) \rightarrow t^{i,j-1}), \\ (po_2^{i,j} : to_2^{i,j} \rightarrow t^{i,j+1}), \\ (pol_2^{i,j} : t^{i,j+1} \rightarrow to_2^{i,j}), \\ (pi_2^{i,j} : t^{i,j+1} \rightarrow (ti_{2,v}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq 2)), \\ (pil_2^{i,j} : (ti_{2,v}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq 2) \rightarrow t^{i,j+1}), \\ (po_3^{i,j} : to_3^{i,j} \rightarrow (ti_{3,v}^{i+1,j+1}, v = \overline{1,2})), \\ (pol_3^{i,j} : (ti_{3,v}^{i+1,j+1}, v = \overline{1,2}) \rightarrow to_3^{i,j}), \\ (pi_3^{i,j} : to_3^{i+1,j+1} \rightarrow (ti_{3,v}^{i,j}, v = \overline{1,2})), \\ (pil_3^{i,j} : (ti_{3,v}^{i,j}, v = \overline{1,2}) \rightarrow to_3^{i+1,j+1}), \\ (pb_u^{i,j} : (ti_{v,u}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq u) \rightarrow to_u^{i,j}), u = \overline{1,3}, \\ (pbl_u^{i,j} : (to_u^{i,j}, u = \overline{1,3}) \rightarrow \\ ((ti_{v,u}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq u), u = \overline{1,3})) \end{array} \right) \right) \\ i = 1, j = 1$$

(13.1)

Узел с индексами  $(k, 1) - (13.2)$ :

$$\left( \left( \begin{array}{l} (po_1^{i,j} : to_1^{i,j} \rightarrow t^{i,j-1}) \\ (pol_1^{i,j} : t^{i,j-1} \rightarrow to_1^{i,j}) \\ (pi_1^{i,j} : t^{i,j-1} \rightarrow (ti_{1,v}^{i,j}, v = \overline{2,3})) \\ (pil_1^{i,j} : (ti_{1,v}^{i,j}, v = \overline{2,3}) \rightarrow t^{i,j-1}) \\ (po_2^{i,j} : to_2^{i,j} \rightarrow (ti_{2,v}^{i,j+1}, v = \overline{1,3}, v \neq 2)) \\ (pol_2^{i,j} : (ti_{2,v}^{i,j+1}, v = \overline{1,3}, v \neq 2) \rightarrow to_2^{i,j}) \\ (pi_2^{i,j} : to_2^{i,j+1} \rightarrow (ti_{2,v}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq 2)) \\ (pil_2^{i,j} : (ti_{2,v}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq 2) \rightarrow to_2^{i,j+1}) \\ (po_3^{i,j} : to_3^{i,j} \rightarrow t^{i+1,j}) \\ (pol_3^{i,j} : t^{i+1,j} \rightarrow to_3^{i,j}) \\ (pi_3^{i,j} : t^{i+1,j} \rightarrow (ti_{3,v}^{i,j}, v = \overline{1,2})) \\ (pil_3^{i,j} : (ti_{3,v}^{i,j}, v = \overline{1,2}) \rightarrow t^{i+1,j}) \\ (pb_u^{i,j} : (ti_{v,u}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq u) \rightarrow to_u^{i,j}), u = \overline{1,3}, \\ (pbl^{i,j} : (to_u^{i,j}, u = \overline{1,3}) \rightarrow \\ ((ti_{v,u}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq u), u = \overline{1,3})) \end{array} \right) \right), \quad (13.2)$$

$i = k, j = 1$

Узел с индексами  $(k, W_k) - (13.3)$ :

$$\left( \left( \begin{array}{l} (po_1^{i,j} : to_1^{i,j} \rightarrow (ti_{1,v}^{i,j-1}, v = \overline{2,3})) \\ (pol_1^{i,j} : (ti_{1,v}^{i,j-1}, v = \overline{2,3}) \rightarrow to_1^{i,j}) \\ (pi_1^{i,j} : to_1^{i,j-1} \rightarrow (ti_{1,v}^{i,j}, v = \overline{2,3})) \\ (pil_1^{i,j} : (ti_{1,v}^{i,j}, v = \overline{2,3}) \rightarrow to_1^{i,j-1}) \\ (po_2^{i,j} : to_2^{i,j} \rightarrow t^{i,j+1}) \\ (pol_2^{i,j} : t^{i,j+1} \rightarrow to_2^{i,j}) \\ (pi_2^{i,j} : t^{i,j+1} \rightarrow (ti_{2,v}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq 2)) \\ (pil_2^{i,j} : (ti_{2,v}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq 2) \rightarrow t^{i,j+1}) \\ (po_3^{i,j} : to_3^{i,j} \rightarrow t^{i+1,j}) \\ (pol_3^{i,j} : t^{i+1,j} \rightarrow to_3^{i,j}) \\ (pi_3^{i,j} : t^{i+1,j} \rightarrow (ti_{3,v}^{i,j}, v = \overline{1,2})) \\ (pil_3^{i,j} : (ti_{3,v}^{i,j}, v = \overline{1,2}) \rightarrow t^{i+1,j}) \\ (pb_u^{i,j} : (ti_{v,u}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq u) \rightarrow to_u^{i,j}), u = \overline{1,3}, \\ (pbl^{i,j} : (to_u^{i,j}, u = \overline{1,3}) \rightarrow \\ ((ti_{v,u}^{i,j}, v = \overline{1,3}, v \neq u), u = \overline{1,3})) \end{array} \right) \right), \quad (13.3)$$

$i = k, j = W_i$

Параметрические описания (9)-(13) могут быть агрегированы в одно общее описание, с введением и использованием дополнительных внутренних параметров, но такое усложненное описание лишает естественности форму представления.

Для вычисления инвариантов позиций или  $p$ -инвариантов используется прямое параметрическое представление решетки и правило [9] по которому каждому уравнению соответствует переход из параметрического представления, уравнение содержит равные суммы для его входящих и исходящих дуг. Общее представление уравнения имеет следующий вид:

$$-apin_{j_k} \cdot xpin_{j_k} - \dots + apout_{j_l} \cdot xpout_{j_l} + \dots = 0;$$

$indices\_range,$

где  $xpin_{j_k}, xpout_{j_l}$  – неизвестные величины, соответствующие позициям сети Петри; величины  $apin_{j_k}, apout_{j_l}$  определяют кратность соответствующих дуг, если кратность дуги равна единице, то величины не указываются;  $indices\_range$  – диапазон изменения индексов. Система (14) для вычисления  $p$ -инвариантов для (6) показана в параметрическом виде:

$$\left( \left( \begin{array}{l} (xpol_u^{i,j} + xpb_u^{i,j} - pxo_u^{i,j} - xpb_l^{i,j} = 0, \\ xpi_u^{i,j} + xpb_l^{i,j} - pxb_v^{i,j} - pxil_u^{i,j} = 0, \\ v = \overline{1,3}, v \neq u \\ u = \overline{1,3}, j \bmod 2 \neq 0 \\ (xpil_1^{i,j+1} + xpb_1^{i,j} - xpi_1^{i,j+1} - xpb_l^{i,j} = 0, \\ xpo_1^{i,j+1} + xpb_l^{i,j} - xpb_v^{i,j} - xpol_1^{i,j+1} = 0, \\ v = \overline{1,3}, v \neq 1, \\ xpi_2^{i,j-1} + xpb_2^{i,j} - xpi_2^{i,j-1} - xpb_l^{i,j} = 0, \\ xpo_2^{i,j-1} + xpb_l^{i,j} - xpb_v^{i,j} - xpol_2^{i,j-1} = 0, \\ v = \overline{1,3}, v \neq 2, \\ xpi_3^{i-1,j-1} + xpb_3^{i,j} - xpi_3^{i-1,j-1} - xpb_l^{i,j} = 0, \\ xpo_3^{i-1,j-1} + xpb_l^{i,j} - xpb_v^{i,j} - xpol_3^{i-1,j-1} = 0, \\ v = \overline{1,3}, v \neq 3 \\ j \bmod 2 = 0 \\ i = 1, k, j = \overline{1, W_i} \end{array} \right) \right), \quad (14)$$

Для открытой треугольной решетки размера  $k$  решение (15) системы (14) получено в параметрической форме.

Каждая строка (15) является решением системы (14), доказательство этого утверждения аналогично приведенному в [4, 6] для прямоугольной решетки произвольного размера. Тогда сеть Петри является  $p$ -инвариантной и, следовательно, обладает свойствами консервативности и ограниченности для произвольного натурального числа  $k$ .

$$\left( \begin{array}{l}
 (pi_u^{i,j}, pil_u^{i,j}), u = \overline{1,3}, i = \overline{1,k}, j = \overline{1,W_i}, \\
 j \bmod 2 \neq 0; \\
 (pol_u^{i,j}, pol_{u1}^{i,j}), u = \overline{1,3}, i = \overline{1,k}, j = \overline{1,W_i}, \\
 j \bmod 2 \neq 0; \\
 (pb_1^{i,j}, pb_2^{i,j}, pb_3^{i,j}, pbl^{i,j}), i = \overline{1,k}, \\
 j = \overline{1,W_i}; \\
 (((pb_1^{i,j}, pb_2^{i,j}, pb_3^{i,j}), i = \overline{1,k}, j = \overline{1,W_i}), \\
 ((pi_u^{i,j}, pol_u^{i,j}), u = \overline{1,3}, i = \overline{1,k}, j = \overline{1,W_i}, \\
 j \bmod 2 \neq 0)); \\
 (((pbl^{i,j}), i = \overline{1,k}, j = \overline{1,W_i}), \\
 ((pil_u^{i,j}, pol_u^{i,j}), u = \overline{1,3}, i = \overline{1,k}, j = \overline{1,W_i}, \\
 j \bmod 2 \neq 0));
 \end{array} \right) \quad (15)$$

Лемма 1: в любой маркировке  $\mu$  сети Петри максимальное количество фишек  $p_{max}$  в одной позиции  $pb_u$ , описывающей буфер коммутатора, и в ограничителе буфера коммутатора позиции  $pbl$  равно:

$$p_{max} = b_0 + p_{10} + p_{20} + p_{30},$$

где  $p_{10}, p_{20}, p_{30}$  – количество фишек в позициях  $pb_u$  ( $u = \overline{1,3}$ ) одного узла при начальной маркировке  $\mu_0$ ,  $b_0$  – количество фишек в позиции  $pbl$  этого же узла при начальной маркировке.

Доказательство. Позиции  $pb_u$  и  $pbl$  одного узла являются комплементарными. Тогда максимальное количество фишек в позиции  $pbl$  равно  $b_0 + p_{10}$ , и  $pb_1=0$ ; максимальное количество фишек в позиции  $pbl$  равно  $(b_0 + p_{10}) + p_{20}$ , и  $pb_2=0$ , при  $pb_1=0$ ; максимальное количество фишек в позиции  $pbl$  равно  $((b_0 + p_{10}) + p_{20}) + p_{30}$ , и  $pb_3=0$ , при  $pb_1=0, pb_2=0$ .

Лемма 2: максимальное количество фишек в любой маркировке равно:

$$N_{max} = 6 \cdot S_{kl} + p_{max} \cdot S_k.$$

Доказательство. Так как сеть строго консервативна, то количество фишек в любой маркировке  $\mu$  равно количеству фишек в начальной маркировке  $\mu_0$ . Количество фишек в начальной маркировке  $\mu_0$  равно сумме: количества фишек в ограничителях портов, умноженных на количество основных узлов, и количества всех узлов решетки умноженных, на максимальный размер ограничителя буфера коммутатора.

Лемма 3: количество позиций в бесконечной треугольной решетке размера  $k$  равно:

$$N_p = 10k^2 + 6k.$$

Доказательство. По построению треугольной решетки количество позиций в узле основного типа 16 (три порта по четыре позиции и четыре позиции, описывающие буфер), в узле дополнительного типа 4 позиции. Количество ячеек основного типа  $S_{k1}$ , дополнительного  $S_{k2}$ , тогда количество позиций равно:

$$N_p = 16 \cdot \frac{k \cdot (k+1)}{2} + 4 \cdot \frac{k \cdot (k-1)}{2} = 8k \cdot (k+1) + 2k \cdot (k-1) = 10k^2 + 6k.$$

Лемма 4: количество переходов в бесконечной треугольной решетке размера  $k$  равно:

$$N_t = 9k^2 + 3k.$$

Доказательство. По построению треугольной решетки количество переходов в узле любого типа равно 9, всего количество узлов  $S_k$ . Количество ячеек основного типа, к которым присоединяют терминальные переходы, на  $k$ -м уровне равно  $W_{k1}$ , всего сторон три, тогда количество переходов равно:

$$N_t = 9S_k + 3W_{k1} = 9k^2 + 3k.$$

Лемма 5: количество дуг в бесконечной треугольной решетке размера  $k$  равно:

$$N_{arc} = 36k^2 + 12k.$$

Доказательство. По построению треугольной решетки количество дуг в узле любого типа 36 (три порта в каждом 12 дуг), всего количество узлов  $S_k$ . Количество дуг для присоединения терминального перехода четыре, ячеек основного типа, к которым присоединяют терминальные переходы, на  $k$ -м уровне равно  $W_{k1}$ , всего сторон три, тогда количество дуг равно:

$$N_{arc} = 3 \cdot 12S_k + 3 \cdot 4W_{k1} = 36S_k + 12W_{k1} = 36k^2 + 12k.$$

Подсчитанные характеристики размера модели (количество узлов, позиций, переходов и дуг) являются вспомогательными и используются в дальнейших доказательствах вычислительной сложности методов. Также, полученные результаты учитывались в ходе тестирования моделей, методически дополнившего теоретические исследования.

#### 4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для построения модели треугольной коммуникационной решетки произвольного размера предложено использовать программный генератор решеток [11, 12]. При генерации моделей решеток используется прямое параметрическое описание сети Петри, учитываются характеристики модели: размер решетки, емкость буфера коммутатора и количество сообщений в каждом буфере коммутатора. Программный генератор моделей Петри [12] написан на алгоритмическом языке Си, тип выходного формата формируемого файла представлен в графическом формате моделирующей системы Tina [10]. С помощью моделирующей системы Tina выполняется верификация протоколов треугольных коммуникационных решеток, представленных в форме сетей Петри, вычисляется статистическая информация (количество позиций, переходов, дуг в решетке размера  $k$ ).

#### 5 РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты проведенных экспериментов представлены в табл. 1, изучены и проверены в [13] для разных значений параметров решетки:  $k$  – размер решетки,  $b$  – емкость буфера коммутатора,  $p$  – количество сообщений в каждом буфере коммутатора.

Полученные значения статистических характеристик моделей треугольной коммуникационной решетки совпали со значениями, полученными при исследовании свойств моделей с помощью моделирующей системы Tina [10].



Таблица 1 – Характеристики моделей треугольной коммуникационной решетки

Параметры решетки	Количество позиций	Количество переходов	Количество дуг	Мах кол-во фишек в позиции	Мах кол-во фишек в маркировке
$k = 1, p = 20, b = 0$	16	12	48	60	66
$k = 1, p = 50, b = 0$	16	12	48	150	156
$k = 3, p = 1, b = 1$	108	90	360	4	72
$k = 3, p = 2, b = 6$	108	90	360	12	144
$k = 5, p = 2, b = 0$	280	240	960	6	240
$k = 5, p = 4, b = 6$	280	240	960	18	540

## 6 ОБСУЖДЕНИЕ

Предложенные правила композиции треугольной решетки позволили построить прямое и двойственное параметрические представления треугольной коммуникационной решетки произвольного размера, оценить статистические характеристики моделей.

Как видно из табл. 1, количество позиций, переходов и дуг для решеток одного размера одинаково. Максимальное количество фишек в позиции и в маркировке разное, в зависимости от значений емкости буфера коммутатора и количества сообщений в каждом буфере.

Прямое параметрическое представление применено для вычисления инвариантов позиций и анализа свойств моделей треугольных коммутационных решеток в форме бесконечных сетей Петри с регулярной структурой. Показано, что построенная модель в форме сети Петри консервативна и ограничена. Как подтверждение достоверности полученных результатов рассматривается следующий факт: при подстановке конкретных размеров сетей в параметрическое решение (15), базисы совпадают с результатами вычислений системы Tpa.

Двойственное параметрическое представление используется для нахождения свойства стационарной повторяемости, что является направлением дальнейших исследований.

## ВЫВОДЫ

В работе рассмотрена актуальная задача верификации протоколов треугольных коммуникационных решеток бесконечными сетями Петри. Модель идеального телекоммуникационного протокола должна быть  $p$ - и  $t$ -инвариантной, и, следовательно, обладать свойствами консервативности и стационарной повторяемости.

Научная новизна полученных результатов заключается в том, что впервые предложены двойственное и прямое параметрические представления моделей треугольных коммуникационных решеток. На основе прямого параметрического представления проведен расчет и анализ инвариантов позиций, сделан вывод о корректности протоколов коммуникационной решетки произвольного размера. Предложены правила композиции треугольных решеток, на основании которых получены формулы для оценки статистических характеристик моделей треугольной коммуникационной решетки.

Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что разработанное программное обеспечение генерирует модель треугольной решетки произвольного размера для дальнейшей верификации с помощью известных моделирующих систем и программно-аппаратной реализации. Модели протестированы, апробированы и приняты в архив моделей сетей Петри.

Перспектива дальнейших исследований состоит в применении двойственного параметрического описания бесконечных сетей Петри с регулярной структурой для композиции бесконечных систем и вычисления  $t$ -инвариантов на примере модели замкнутой треугольной решетки.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в продолжении словацко-украинской научно-исследовательской работы «Верификация сложных сетевых протоколов» (номер гранта ICS.NUKR.CLG 982698). Автор выражает благодарность проф. Вольфраму С. за организацию серии публикаций по бесконечным сетям Петри, проф. Кордону Ф. за тестирование моделей и полезное обсуждение результатов работы.

## ЛИТЕРАТУРА / ЛІТЕРАТУРА

1. Телекоммуникационные системы и сети: Учебное пособие. В 3-х томах / [Под ред. профессора В. П. Шувалова]. – М. : Горячая линия – Телеком. – Т. 2: Радиосвязь, радиовещание, телевидение / [Катунин Г. П., Мамчев Г. В., Носов В. И., Шувалов В. П.]; 4-е издание, переработанное и дополненное, 2017. – 564 с. ISBN 978-5-9912-0494-1
2. Zaitsev D. A. Clans of Petri Nets: Verification of protocols and performance evaluation of networks / D. A. Zaitsev. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. – 292 p. ISBN-13: 978-3-659-42228-7
3. Grid and Cloud Computing: Concepts, Methodologies, Tools and Applications / [Information Resources Management Association (USA)]. – IGI-Global, 2012. – 2134 p. DOI: 10.4018/978-1-4666-0879-5
4. Сети телевизионного и звукового ОБЧ ЧМ вещания / [М. Г. Локшин, А. А. Шур, А. В. Кокорев, Р. А. Краснощеков]. – М. : Радио и связь, 1988. – 144 с.
5. Zaitsev D. A. Infinite Petri Nets: Infinite Petri Nets: Part 2, Modeling Triangular, Hexagonal, Hypercube and Hypertorus Structures / D. A. Zaitsev, I. D. Zaitsev, T. R. Shmeleva // Complex Systems. – 2017. – Vol. 26, № 4. – P. 341–371. DOI: 10.25088/ComplexSystems. 26.4.341
6. Галкин В. А. Цифровая мобильная радиосвязь: учеб. пособ. для вузов / В. А. Галкин: [2-е изд., перераб. и доп.]. – М. : Горячая линия – Телеком, 2012. – 592 с.

7. Zaitsev D. A. Infinite Petri Nets: Part 1, Modeling Square Grid Structures / D. A. Zaitsev, I. D. Zaitsev, T. R. Shmeleva // Complex Systems. – 2017. – Vol. 26, № 2. – P. 157–195. DOI: 10.25088/ComplexSystems.26.2.157
8. Zaitsev D.A. Verification of Computing Grids with Special Edge Conditions by Infinite Petri Nets / D. A. Zaitsev // Automatic Control and Computer Sciences. – 2013. – Vol. 47, Issue 7. – P. 403–412. DOI: 10.3103/S0146411613070262
9. Murata T. Petri Nets: Properties, Analysis and Applications / T. Murata // Proceedings of the IEEE, 1989. – Vol. 77, Issue 4. – P. 541–580. DOI: 10.1109/5.24143
10. Berthomieu B. The Tool TINA: Construction of Abstract State Spaces for Petri Nets and Time Petri Nets / B. Berthomieu, P.-O. Ribet, F. Vernadat // International Journal of Production Research. – 2004. – Vol. 42, № 14. – P. 2741–2756. DOI: 10.1080/00207540412331312688
11. Zaitsev D. A. Infinite Petri Nets: Part 2, Modeling Triangular, Hexagonal, Hypercube and Hypertorus Structures / D. A. Zaitsev, I. D. Zaitsev, T. R. Shmeleva // Complex Systems. – 2017. – Vol. 26, № 4. – P. 341–371. DOI: 10.25088/ComplexSystems.26.4.341
12. Шмелева Т.Р. Программный генератор моделей Петри треугольных коммуникационных решеток / Т. Р. Шмелева // Сборник научных трудов ОНАС им. А. С. Попова. – 2016. – № 1. – С. 82–89.
13. Shmeleva T. TriangularGrid [Models for the MCC'2016] / T. Shmeleva // Model Checking Contest @ Petri Nets 2016, 6th edition, Torun, Poland, June 21 2016. – Torun, 2016.

Статья поступила в редакцию 06.02.2018.  
После доработки 29.08.2018.

УДК 621.39, 004.7

### ВЕРИФІКАЦІЯ ПРОТОКОЛІВ ТРИКУТНИХ КОМУНІКАЦІЙНИХ ҐРАТОК НЕСКІНЧЕННИМИ СІТКАМИ ПЕТРІ

**Шмелюва Т. Р.** – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри комутаційних систем Одеської національної академії зв'язку ім. О.С. Попова, Одеса, Україна.

#### АНОТАЦІЯ

**Актуальність.** Обчислювальні та комунікаційні ґратки є потужним засобом підвищення продуктивності і якості обслуговування сучасних мереж. У двовимірних ґратках основними формами осередку є трикутник, чотирикутник і шестигуник. Трикутні ґратки застосовуються при вирішенні крайових задач з трикутними кінцевими елементами, в системах радіомовлення і телебачення. Найбільш прості та ефективні способи реалізації ґраток можуть володіти схованими дефектами і уразливостями з точки зору безпечного обміну інформацією. Таким чином, верифікація ґраток є актуальним завданням. Мета роботи – побудова моделей трикутних комунікаційних ґраток в формі нескінченних сітей Петрі та дослідження їх властивостей, для доказу коректності (верифікації) протоколів.

**Метод.** Методи досліджень базуються на основних положеннях теорії графів, лінійної алгебри, теоретичних основах сітей Петрі, математичного та імітаційного моделювання.

**Результати.** Побудовано параметричний опис трикутної комунікаційної ґратки на площині в прямій і двоїстій формі. Вузол комутації реалізує повнодуплексний режим роботи та буферизацію пакетів з обмеженим розміром внутрішнього буфера. Отримано аналітичні вирази для оцінки числа компонентів моделі. Рішення нескінченних системи лінійних рівнянь в параметричній формі дозволило довести інваріантність моделі довільного розміру. Інваріантність є одною з основних властивостей моделі ідеального протоколу, що визначає безпеку роботи мережі. Практична значимість отриманих результатів полягає в побудові схем безпечних ґраток для подальшої програмної і апаратної реалізації, що офіційно підтверджено включенням моделей трикутних ґраток в архів моделей сітей Петрі Лабораторії Інформатики університету Париж 6.

**Висновки.** Вперше побудована математична модель трикутних комунікаційних ґраток з регулярною структурою довільного розміру в формі нескінченних сітей Петрі для верифікації протоколів передачі інформації в ґратках. Застосування методики для верифікації трикутних комунікаційних структур дозволяє виконати подальший розвиток теорії нескінченних сітей Петрі для побудови та дослідження моделей довільних ґраток з регулярною структурою.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** обчислювальні ґратки, трикутна комунікаційна структура, нескінченна сіть Петрі, параметричне представлення, лінійний інваріант, верифікація протоколів.

UDC 621.39, 004.7

### VERIFICATION OF THE TRIANGULAR COMMUNICATION GRIDS PROTOCOLS BY INFINITE PETRI NETS

**Shmeleva T. R.** – PhD, Associate Professor, Associate Professor of Switched System department, A. S. Popov National Academy of Telecommunications, Odessa, Ukraine.

#### ABSTRACT

**Context.** Computing and communication grids are a powerful means of increasing the performance and quality of service of modern networks. In two-dimensional grids the basic cell forms are a triangle, a square, and a hexagon. Triangular grids are used in solving boundary value problems with triangular finite elements, in broadcasting systems and in television. The simplest and most efficient implementations of grids can possess hidden defects and vulnerabilities in terms of secure information exchange. Thus, the verification of grids is an urgent task.

**Objective.** The goal of the paper is to construct the models of triangular communication grids in the form of infinite Petri nets and to investigate their properties for proving the protocols (verification) correctness.

**Method.** Research methods are based on the basics of graph theory, linear algebra, the theoretical foundations of Petri nets, mathematical modeling and simulation.

**Results.** A parametric description of the triangular communication grid on the plane, in a direct and a dual form, is constructed. The switching node implements full-duplex transmission and buffering of packets with a limited capacity of the internal buffer. Analytic expressions are obtained for estimating the number of model components. Solving infinite systems of linear equations in parametric form allowed us to prove the invariance of a model of arbitrary size. Invariance is one of the basic properties of the ideal protocol model which determines the safety of the network. The practical significance of the results obtained lies in the construction of safe grid schemes for further software and hardware implementation, which is officially confirmed by the inclusion of triangular grid models in the archive of Petri net models of the University Paris 6 Informatics Laboratory.

**Conclusions.** For the first time, a mathematical model of triangular communication grids with a regular structure and an arbitrary size in the form of infinite Petri nets was constructed for verification of information transmit protocols in grids. The application of the technique for verification of triangular communication structures allows the further development of the infinite Petri nets theory for constructing and investigating models of arbitrary grids with a regular structure.

**KEYWORDS:** computing grids, triangular communication structure, infinite Petri net, parametric specification, linear invariant, verification of protocols.

#### REFERENCES

1. Katunin G. P., Mamchev G. V., Nosov V. I., Shuvalov V.P. *Telekommunikatsionnyye sistemy i seti : Uchebnoye posobiye. V 3-kh tomakh. Pod red. professora V. P. Shuvalova.* Moscow, Goryachaya liniya. Telekom. Vol. 2: Radiosvyaz', radioveshchaniye, televideniye; 4-ye izdaniye, pererabotannoye i dopolnennoye, 2017, 564 p. ISBN 978-5-9912-0494-1
2. Zaitsev D. A. *Clans of Petri Nets: Verification of protocols and performance evaluation of networks*, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013, 292 p. ISBN-13: 978-3-659-42228-7
3. *Grid and Cloud Computing: Concepts, Methodologies, Tools and Applications (4 Vol.)*, Information Resources Management Association (USA), IGI-Global, 2012, 2134 p. DOI: 10.4018/978-1-4666-0879-5
4. Lokshin M. G., Shur A. A., Kokorev A. V., Krasnoshchekov R. A. *Seti televizionnogo i zvukovogo OVCH CHM veshchaniya.* Moscow, Radio i svyaz', 1988, 144 p.
5. Zaitsev D. A., Zaitsev I. D., Shmeleva T. R. Infinite Petri Nets: Part 2, Modeling Triangular, Hexagonal, Hypercube and Hypertorus Structures, *Complex Systems*, 2017, Vol. 26, No. 4, pp. 341–371. DOI: 10.25088/ComplexSystems.26.4.341
6. Galkin V. A. *Tsifrovaya mobil'naya radiosvyaz': ucheb. posob. dlya vuzov: [2-ye izd., pererab. i dop.]*. Moscow, Goryachaya liniya – Telekom, 2012, 592 p.
7. Zaitsev D. A., Zaitsev I. D., Shmeleva T. R. Infinite Petri Nets: Part 1, Modeling Square Grid Structures, *Complex Systems*, 2017, Vol. 26, No. 2, pp. 157-195. DOI: 10.25088/ComplexSystems.26.2.157
8. Zaitsev D.A. Verification of Computing Grids with Special Edge Conditions by Infinite Petri Nets, *Automatic Control and Computer Sciences*, 2013, Vol. 47, Issue 7, pp. 403-412. DOI: 10.3103/S0146411613070262
9. Murata T. Petri Nets: Properties, Analysis and Applications, *Proceedings of the IEEE*, 1989, Vol. 77, Issue 4, pp. 541–580. DOI: 10.1109/5.24143
10. Berthomieu B., Ribet P.-O. and Vernadat F. The Tool TINA: Construction of Abstract State Spaces for Petri Nets and Time Petri Nets, *International Journal of Production Research*, 2004, Vol. 42, No. 14, pp. 2741–2756. DOI: 10.1080/00207540412331312688
11. Zaitsev D. A., Zaitsev I. D., Shmeleva T. R. Infinite Petri Nets: Part 2, Modeling Triangular, Hexagonal, Hypercube and Hypertorus Structures, *Complex Systems*, 2017, Vol. 26, No. 4, pp. 341–371. DOI: 10.25088/ComplexSystems.26.4.341
12. Shmeleva T. R. Programmnyy generator modeley Petri treugol'nykh kommunikatsionnykh reshetok, *Sbornik nauchnykh trudov ONAS im. A.S. Popova*, 2016, No. 1, pp. 82–89.
13. Shmeleva T. *TriangularGrid. Models for the MCC'2016. Model Checking Contest @ Petri Nets 2016*, 6th edition. Torun, Poland, June 21, 2016.