$= x_2 = x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = 0$ с $z = 95$. Согласно этому решению необходимо выбрать для финансирования все проекты, кроме пятого. Если решить эту задачу как «обычную» задачу линейного программирования без условия целочисленности переменных, то получим решение $x_1 = 0{,}5789$, $x_2 = x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = 0{,}7368$ и $z = 108{,}68$, две компоненты которого принимают дробное значение.

ВЫВОДЫ

Практика выполненных исследований показывает, что:

1) наиболее простыми среди точных методов являются комбинаторные методы полного перебора, которые выполняют проверку всех возможных решений $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 2^n$ и при $n \le 10$ позволяют получить точное решение задачи ЦЛП с булевыми переменными за приемлемое время;

2) прагматичным часто применяемым подходом является замена дискретных переменных на интервале 0–1 непрерывными; найденное при этом дробное решение округляется до ближайшего целочисленного значения так, чтобы погрешность округления составляла не более 10 %.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. Информационные системы и технологии в экономике и управлении / Под ред. проф. В. В. Трофимова. – М. : Высшее образование, 2007. – 480 с.
2. *Костенко А. П.* Моделирование функциональной структуры информационно-аналитической маркетинговой системы / Костенко А. П. // Нові технології. – 2004. – № 3(6). – С. 127–130.
3. *Саати Т.* Аналитическое планирование. Организация систем / Саати Т., Кернс К. – М. : Радио и связь, 1991. – 224 с.
4. *Демидов Б. А.* Методика оценивания и прогнозирования технического уровня образцов вооружения и военной техники при формировании плановых и управленческих решений, реализу-емых в процессе управления их жизненными циклами / Демидов Б. А., Хмелевская О. А. // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних сил. – 2006. – Вип. 3(9). – С. 12–22.
5. *Авраменко В. П.* Методы и процедуры шкального оценивания в задачах принятия проектных решений / Авраменко В. П., Калачева В. В. // Нові технології. – 2003. – № 1(2). – С. 40–47.
6. *Данциг Дж.* Линейное программирование, его обобщения и применения / Данциг Дж. – М. : Прогресс, 1966. – 600 с.
7. *Ларіонов Ю. І.* Дослідження операцій в інформаційних системах / Ларіонов Ю. І., Левикін В. М., Хажмурадов М. А. – Харків : ХНУРЕ, 2003. – 388 с.
8. *Таха Х. А.* Введение в исследование операций / Таха Х. А. – М. : Вильямс, 2001. – 912 с.
9. *Кулян В. Р.* Математическое программирование (с элементами информационных технологий) / Кулян В. Р., Янькова Е. А., Жильцов А. Б. – К. : МАУП, 2000. – 124 с.

Надійшла 10.10.2008

Розглянута процедура комплексного оцінювання параметрів маркетингу і проеціювання значень характеристик об'єкта на значення відповідних шкал (описане застосування різних шкал в залежності від характеру задач, які вирішуються). Наведені методи рішення задач цілочисельного лінійного програмування з використанням двійкових змінних, розглянута постановка задачі про рюкзак та формування портфеля.

The procedure of marketing parameters' complex estimation and projection of object's characteristics on the value of corresponding scales are viewed (application of different scales according to the type of problems solved is described). Methods for solving integer linear programming problems with given binary variables, definition of a problem about rucksack and portfolio formation are considered.

УДК 681.3. + 681.5.007

Н. В. Алипов, М. И. Хиль, М. В. Гусятин

ПРАВИЛА ВЫБОРА СТРАТЕГИЙ АЛГОРИТМА ПОИСКА ТОЧКИ С ХАРАКТЕРНЫМ ПРИЗНАКОМ В ИСХОДНОМ ИНТЕРВАЛЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Определены соотношения эффективности применения пессимистической и оптимистической стратегии на j-м шаге алгоритма, на основании которых выбирается шаг применения пессимистической стратегии. На конкретных примерах проиллюстрированы характерные случаи выбора стратегий поиска.

Одним из перспективных направлений в развитии методов защиты информации является направление, основанное на использовании цифровых автоматов с псевдослучайными переходами [1]. Нами к настоящему моменту разработаны структура такого автомата, алгоритмы формирования виртуальных последовательностей [2]; описаны основные понятия и определения, выбран критерий оптимальности алгоритмов поиска; разработаны примеры синтеза помехоустойчивых алгоритмов поиска точки x с характерным признаком в условиях действия виртуальной последовательности [3]. Однако к настоящему моменту не решена задача выбора стратегии (оптимистической либо пессимистической) поиска точки с характерным признаком в исходном интервале неопределенности на том или ином шаге алгоритма. Целью исследования является разработка правил выбора стратегий поиска точки с характерным признаком в исходном интервале неопределенности.

Заметим, что стратегии поиска [3] бывают: оптимистическими, пессимистическими и смешанными; алгоритмы поиска точки с характерным признаком делят на последовательные (на каждом шаге эксперимент совершается в одной точке) и параллельно-последовательным (на каждом шаге алгоритма эксперимент выполняется одновременно в k точках) [4]. В статье рассматриваются правила выбора стратеги поиска для последовательных i_1 шаговых алгоритмов. Как известно [4], помехоустойчивые к $A\upsilon(a, l, h)$-последовательностям ($\upsilon = 1, 2$) алгоритмы строятся методом математической индукции: первоначально строят для $i = 1$, затем для $i = 2$, …, $i_1 - 1$, затем для i_1.

Применение той или иной стратегии поиска определяется шагом алгоритма и параметрами виртуальной последовательности (ВП): максимальной длительностью выброса (l) и минимальным интервалом (h) между двумя соседними выбросами ВП.

Заметим [3], что при синтезе последовательных алгоритмов поиска применяют только две стратегии: оптимистическую и пессимистическую. При выполнении первого шага алгоритма всегда применяют оптимистическую стратегию:

$$x_1^1 \in (0, 1) \tag{1}$$

Для других шагов при синтезе алгоритма поиска решаться задача: можно ли на этом шаге применить оптимистическую стратегию?

Для решения такой задачи необходимо считать заданными: параметры ВП a, l, h; полярность ВП, количество шагов алгоритма i; помехоустойчивые к указанным параметрам ВП одношаговые, двух шаговые, и т. д. $(i-1)$-шаговые алгоритмы (такие алгоритмы строят методом математической индукции); оценки помехоустойчивых одношаговых, двух шаговых, и т. д. $(i-1)$-шаговых алгоритмов

$$\Psi_1^{a,l,h}(1, 1), \quad \Psi_1^{a,l,h}(2, 1), \quad \ldots, \quad \Psi_1^{a,l,h}(i-1, 1).$$

Пусть согласно соотношению (1) на первом шаге алгоритма в точке x_1^1 выполняем эксперимент. Тогда по итогам выполнения первого шага алгоритма может сформироваться один из исходов [3]:

$$a)\ x + \xi(t_1) \le x_1^1;\ \ b)\ x + \xi(t_1) > x_1^1,$$

где $\xi(t_1)$ – амплитуда ВП в момент времени t_1. Для исхода a) при воздействии на процесс поиска несимметричной положительной полярности ВП справедливо соотношение [3]:

$$x \in [0, x_1^1).$$

Действительно, поскольку

$$x + \xi(t_1) \le x_1^1,$$

то x будет подавно меньше x_1^1.

Заметим, что в дальнейшем будем рассматривать только ВП положительной полярности.

Для исхода a) в этом случае применяем в полуоткрытом интервале $[0, x_1^1)$ $(i-1)$-шаговый алгоритм, который нами уже построен методом математической индукции. Этот алгоритм полуоткрытый интервал неопределенности $[0, x_1^1)$ разобьет на $\Psi_1^{a,l,h}(i-1, 1)$ равных частей.

Для исхода b) на основании принципа пересечения [3] устанавливаем:

$$x \in [x_1^{1,1}, 1),$$

где $x_1^{1,1} = \begin{cases} x_1^{1,1} - a\delta, & x_1^1 - a\delta \ge 0; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$ δ – дискретность преобразования по уровню.

Для этого исхода выбор стратегии на втором шаге алгоритма определяется параметрами виртуальной последовательности l и h.

Так, если $l > 1$, то ВП могла действовать на первом шаге алгоритма и возможно ее проявление на втором шаге. В этих условиях на втором шаге алгоритма применяют снова оптимистическую стратегию:

$$x_1^2 \in (x_1^1, 1).$$

По итогам выполнения второго шага алгоритма может сформироваться один из исходов

$$b_1)\ x + \xi(t_2) \le x_1^2;\ \ b_2)\ x + \xi(t_2) > x_1^2.$$

Для исхода b_1) характерно то, что

$$x \in [x_1^{2,1}, x_1^2),$$

где $x_1^{2,1} = \begin{cases} x_1^2 - ab, & x_1^2 - ab \ge x_1^{1,1}; \\ x_1^{1,1}, & x_1^2 - ab < x_1^{1,1}. \end{cases}$

Этот исход может возникнуть в следующих случаях: на первом шаге действовала ВП, на втором шаге ее проявление не наблюдалось; на первом и втором шагах алгоритма ВП не наблюдалось; на первом и втором шаге наблюдалась проявление ВП.

Разрешение этой неопределенности, как уже было сказано, зависит от параметров ВП. Так, если $l > 2$, то на третьем шаге снова применяют оптимистическую стратегию

$$x_1^3 \in (x_1^1, x_1^2)$$

и процесс построения алгоритма продолжают; если $l \le 2$, то на третьем шаге может быть применена одна из стратегий: пессимистическая

$$x_1^3 = x_1^1 \tag{2}$$

либо оптимистическая

$$x_1^3 \in (x_1^1, x_1^2). \tag{3}$$

В том случае, когда $l = 1$, на втором шаге для исхода b) может также быть использована одна из стратегий: пессимистическая

$$x_1^2 = x_1^1 \tag{4}$$

либо оптимистическая

$$x_1^2 \in (x_1^1, 1). \tag{5}$$

Если в процессе построения алгоритма поиска фор-мируется исход b_2), то в зависимости от значения па-раметра l ВП можно принять одно из решений:

– если $l = 1$, то на основании исходов b) и b_2) записываем такие соотношения:

$$x + \xi(t_1) > x_1^1; \quad x + \xi(t_2) > x_1^2; \quad x_1^1 < x_1^2; \quad x \in [x_1^1, 1);$$

исход b_2) подтверждает исход b);

– если $l = 2$, то на третьем шаге алгоритма может быть использована одна из стратегий: пессимистическая

$$x_1^3 = x_1^1;$$

оптимистическая

$$x_1^3 \in [x_1^2, 1). \tag{6}$$

Если $l > 2$, то на третьем шаге алгоритма следует применить снова оптимистическую стратегию типа (6).

Из анализа исходов типа b_2) следует истинность такого положения.

П1. Если на j-м шаге формируется исход типа b), а на последующих $(j+1)$, $(j+2)$, …, $(j+l)$ шагах алгоритма в точках x_1^{j+1}, x_1^{j+2}, …, x_1^{j+l} выполнены эксперименты, в результате которых формируется исходы типа b_2)

$$x + \xi(t_{j+q}) > x_1^{j+q}, \quad q = \overline{1, l}$$

и на каждом из них применяется оптимистическая стратегия типа (6), то справедливым будет такое соотношение:

$$x \in [x_1^j, 1).$$

Из этого положения следует справедливость такого неравенства:

$$h \ge l. \tag{7}$$

Как уже было показано, при выполнении первого шага алгоритма возможно формирование одного из исходов a) или b).

Решение исхода a) однозначно: в полуоткрытом интервале неопределенности применяется $(i-1)$-шаговый алгоритм, который был построен методом математической индукции. Для исхода b) необходимо при $l = 1$ выбрать одну из стратегий: пессимистическую либо оптимистическую. Выбор стратегии выполняем на основании минимального критерия оптимальности [3]. С этой целью определим дискретность преобразования по уровню для пессимистической и оптимистической стратегий.

Пусть $l = 1$ и в результате выполнения первого шага был сформирован исход типа b). Тогда применяя на втором шаге алгоритма в точке x_1^1 пессимистическую стратегию, формируем один из исходов

$$c_1)\ x + \xi(t_2) \le x_1^2; \ \ c_2)\ x + \xi(t_2) > x_1^2.$$

Для исхода c_1) характерно проявление ВП на первом шаге алгоритма (исход c_1 противоречит исходу b)). Для обнаружения действия ВП был затрачен один такт паузы ВП, на последующих $(h-1)$ шагах алгоритм ВП по определению не будет проявляться. На этих шагах необходимо применить классический алгоритм поиска (дихотомию), посредством которого полуоткрытый интервал неопределенности $[x_1^{1,1}, x_1^1)$ разобьем на 2^{h-1} равных частей. Затем каждую из них на последующих $(i-h-1)$ шагах алгоритма разобьем помехоустойчивым алгоритмом на $\Psi_1^{a,l,h}(i-h-1, 1)$ равных частей.

Такая комбинация алгоритмов позволит разбить полуоткрытый интервал $[x_1^{1,1}, x_1^1)$ на

$$\varphi_1^{a,l,h}(i-h-1, 1) = 2^{h_1 - 1}\varphi_1^{a,l,h}(i-h_1-1, 1), \tag{8}$$

где $h_1 = \begin{cases} h, i-h-j \ge 0; \\ h - |i-h-j|, i-h-j < 0, \end{cases}$ j – номер шага, на котором был сформирован исход b) (для нашего случая $j = 1$).

Следует заметить, что в том случае, когда $a \ge \Psi_1^{a,l,h}(i-1, 1)$, $x_1^{1,1} = 0$; полуоткрытый интервал неопределенности $[0, x_1^{1,1})$ для исхода a) разбивают на $\Psi_1^{a,l,h}(i-h-1, 1)$ равных частей, для исхода c_1) разбивают на $\Psi_1^{a,l,h}(i-1,1)$ равных частей. Оценку алгоритма выбирают, исходя из минимального критерия [1].

$$\bar{\varphi}_1^{a,l,h}(i-h-1,1) = \\ = \min\{\Psi_1^{a,h,l}(i-1,1), \varphi_1^{a,h,l}(i-h-1,1)\}, \quad (9)$$

а координату точки x_1^1 определяют на основании соотношения

$$x_1^1 = \delta\bar{\varphi}_1^{a,h,l}(i-h-1,1). \quad (10)$$

Для исхода c_2) характерно то, что результаты двух первых экспериментов совпадают. Поэтому на основании положения П1 для $l=1$ устанавливаем истинность соотношения

$$x \in [x_1^1, 1). \quad (11)$$

Поскольку на установления истинности соотношения (11) истрачено два шага алгоритма, то выделенный по итогам выполнения второго шага алгоритма полуоткрытый интервал неопределенности $[x_1^1, 1)$ будет разбит на $\Psi_1^{a,j,h}(i-2,1)$ равных частей.

С учетом полученных соотношений для исходов a) и c_2) для целевой функции алгоритма будет справедливым такое равенство:

$$\Psi_1^{a,l,h}(i,1) = \bar{\varphi}_1^{a,l,h}(i-h-1,1) + \Psi_1^{a,l,h}(i-2,1). \quad (12)$$

Пусть для $l=1$ в результате выполнения эксперимента в точке x_1^1 формируется исход типа b). Тогда попробуем оценить эффективность применения на втором шаге алгоритма оптимистической стратегии в точке $x_1^2 \in (x_1^1, 1)$.

По итогам выполнения второго шага алгоритма может сформироваться один из исходов:

$$c_3)\ x+\xi(t_2) \le x_1^2;\ \ c_4)\ x+\xi(t_2) > x_1^2.$$

Для исхода c_3) полуоткрытым интервалом неопределенности относительно точки x будет $[x_1^{1,1}, x_1^2)$.

Применяя для исхода c_3) в точке x_1^1 на третьем шаге алгоритма пессимистическую стратегию, можем сформировать один из исходов

$$c_5)\ x+\xi(t_3) \le x_1^3;\ \ c_6)\ x+\xi(t_3) > x_1^3.$$

Для исхода c_5) характерно то, что $x \in [x_1^{1,1}, x_1^1)$ и ВП действовала на первом шаге алгоритма, на ее обнаружение было затрачено два шага паузы; действуя на последующих $(h-2)$ шагах алгоритма дихотомией, затем на оставшихся $(i-h-1)$ шагах помехоустойчивым алгоритмом, разобьем полуоткрытый интервал неопределенности $[x_1^{1,1}, x_1^1)$ на

$$\varphi_2^{a,l,h}(i-h-1,1) = 2^{h_1-2}\Psi_1^{a,l,h}(i-h_1-1,1) \quad (13)$$

равных частей.

Если по итогам выполнения третьего шага алгоритма формируется исход c_6), то на основании положения П1 устанавливаем $x \in [x_1^1, x_1^2)$ и этот полуоткрытый интервал неопределенности будет разбит за оставшиеся $(i-3)$ шага на $\Psi_1^{a,l,h}(i-3,1)$ равных частей, следовательно,

$$l([x_1^1, x_1^2)) = \delta\Psi_1^{a,l,h}(i-3,1); \quad (14)$$

$x_1^2 = x_1^1 + \delta\ \Psi_1^{a,l,h}(i-3,1)$; $l[\bullet]$ – длина интервала неопределенности.

Нами получены оценки эффективности алгоритмов в зависимости от шага применения пессимистической стратегии: пессимистическая стратегия применяется на втором шаге алгоритма в точке x_1^1 (см. соотношения (8), (9)); пессимистическая стратегия применяется на третьем шаге алгоритма в точке x_1^1 (см. соотношения (13)).

Из анализа этих соотношений следует истинность такого положения.

П2. Если $x_1^{1,1} = 0$ и $\Psi_1^{a,l,h}(i-1,1) > \varphi_1^{a,l,h}(i-h-1,1)$, $a \ge \Psi_1^{1,l,h}(i-1,1)$, то на втором шаге алгоритма необходимо применить в точке x_1^1 пессимистическую стратегию; если

$$\Psi_1^{a,l,h}(i-1,1) \le \varphi_1^{a,l,h}(i-h_1-1,1);$$
$$l([x_1^{1,1}, x_1^1)) \le \delta 2^{h_1-1}\Psi_1^{a,l,h}(i-h_1-1,1);$$
$$l([x_1^{1,1}, x_1^1)) \le \delta 2^{h_1-2}\Psi_1^{a,l,h}(i-h_1-1,1); \quad (15)$$

то на втором шаге алгоритма следует применить в точке x_1^2 оптимистическую стратегию

$$x_1^2 \in [x_1^1, 1);$$

если

$$l([x_1^{1,1}, x_1^1) \le \delta 2^{h_1-1}\Psi_1^{a,l,h}(i-h_1-1,1);$$
$$l([x_1^{1,1}, x_1^1) > \delta 2^{h_1-2}\Psi_1^{a,l,h}(i-h_1-1,1), \quad (16)$$

то на втором шаге алгоритма следует в точке x_1^1 применить пессимистическую стратегию. Следует заметить, что при решении исхода c_3) была использована только пессимистическая стратегия. Рассмотрим более общий случай, когда стратегия выбирается из двух альтернатив: на следующем шаге применяется пессимистическая стратегия; на следующем шаге используется оптимистическая стратегия. Выбор стратегии осуществим на основании следующего положения.

П3. Предположим, что на j-м шаге алгоритма был выполнен эксперимент в точке x_1^j и сформирован исход типа b), для которого

$$x \in [x_1^{j,1}, x_1^{j-1}), \quad j = 1, 2, 3\ldots$$

и имеет место неравенство типа (15)

$$l([x_1^{j,1}, x_1^j)) \le \delta 2^{h_1-1}\Psi_1^{a,l,h}(i-j-h_1, 1);$$
$$l([x_1^{j,1}, x_1^1)) \le \delta 2^{h_1-2}\Psi_1^{a,l,h}(i-j-h_1, 1), \qquad (17)$$

тогда на $(j+1)$-м шаге применяется оптимистическая стратегия

$$x_1^{j+1} \in (x_1^j, x_1^{j-1}).$$

Если же неравенство (17) не выполняется, то на $(j+1)$-м шаге применяется пессимистическая стратегия

$$x_1^{j+1} = x_1^j$$

и решение в дальнейшем выполняются по такой же процедуре, как и решение исхода c_3).

Если же по итогам выполнения $(j+1)$-го шага алгоритма был сформирован снова исход типа b), то на основании положения П1 для $l = 1$ устанавливаем истинность такого соотношения:

$$x \in [x_1^{j+1,1}, x_1^{j-1}),$$

где $x_1^{j+1} = \begin{cases} x^{j+1} - a\delta, \ x_1^{j+1} - a\delta \ge x_1^j; \\ x_1^j, \ x_1^{j+1} - a\delta < x_1^j. \end{cases}$

В дальнейшем этот исход будет разрешаться таким же образом, как и рассматриваемый исход b).

Если же по итогам выполнения $(j+1)$-го шага алгоритма был сформирован исход типа a), то

$$x \in [x_1^{j,1}, x_1^{j+1}).$$

При этом если выполняются неравенства

$$l([x_1^{j,1}, x_1^j)) \le \delta 2^{h_1-2}\Psi_1^{a,l,h}(i-j-h_1, 1);$$
$$l([x_1^{j,1}, x_1^1)) \le \delta 2^{h_1-3}\Psi_1^{a,l,h}(i-j-h_1, 1), \qquad (18)$$

то на $(j+2)$-м шаге применяется оптимистическая стратегия

$$x_1^{j+2} \in (x_1^j, x_1^{j+1}).$$

Если же неравенства (18) не выполняются, то на $(j+2)$-м шаге алгоритма применяют пессимистическую стратегию

$$x_1^{j+2} = x_1^j$$

и решение выполняют по такой же процедуре, как и решение исхода c_3).

Затем по итогам выполнения $(j+2)$-го шага алгоритма планируется $(j+3)$-й и т. д. $(j+z-1)$-й шаги алгоритма.

Если же по итогам выполнения $(j+z-1)$-го шага был сформирован исход типа b), то на основании положения П1 для $l = 1$ устанавливаем

$$x \in [x_1^{j+z-1,1}, x_1^{j+z-2}),$$

где $x_1^{j+z-1,1} = \begin{cases} x_1^{j+z-1} - a\delta, \ x_1^{j+z-1} - a\delta \ge x_1^j; \\ x_1^j, \ x_1^{j+z-1} - a\delta < x_1^j. \end{cases}$

В дальнейшем этот исход будет разрешаться таким же образом, как рассматриваемый исход b).

Если же по итогам выполнения $(j+z-1)$-го шага алгоритма был сформирован исход типа a), то

$$x \in [x_1^{j,1}, x_1^{j+z-1}).$$

При этом, если выполняются неравенства

$$l([x_1^{j,1}, x_1^j)) \le \delta 2^{h_1-z}\Psi_1^{a,l,h}(i-j-h_1, 1);$$
$$l([x_1^{j,1}, x_1^1)) \le \delta 2^{h_1-(z+1)}\Psi_1^{a,l,h}(i-j-h_1, 1); \ z < h, \qquad (19)$$

то на $(j+z)$-м шаге алгоритма применяется оптимистическая стратегия

$$x_1^{j+z} \in [x_1^j, x_1^{j+z-1})$$

и продолжают по описанной логической схеме планирование стратегий поиска.

Если же неравенства (19) не выполняются, то на $(j+z)$-м шаге алгоритма, применяют пессимистическую стратегию

$$x_1^{j+z} = x_1^j$$

и решение выполняют по такой же процедуре, как и решение исхода c_3).

Если же на $(j+z-1)$-м шаге был сформирован исход типа a) и при этом не выполняется третье неравенство (19)

$$z = h,$$

то на $(j+z)$-м шаге в точке x_1^j применяют пессимистическую стратегию. При этом, если по результатам этого шага алгоритма был сформирован исход типа a), то его разрешают аналогичным способом, как и исход c_3); если же формируется исход типа b), то его разрешают таким же образом как и исход c_4).

Проиллюстрируем на конкретных примерах применения основных правил выбора стратегии поиска. Рассмотрим пример синтеза последовательного шестишагового алгоритма поиска, помехоустойчивого к виртуальной последовательности положительной полярности, параметры которой соответственно равны: максимально возможная амплитуда равна либо превосходит длину исходного интервала неопределенности; максимальная длительность выброса $l = 1$, минимальный интервал паузы между двумя соседними выбросами $h = 3$.

Очевидным является тот факт, что для $i = 1$ в условиях действия ВП исходный полуоткрытый интервал неопределенности $[0, 1)$ уменьшить не представляется возможным. На этом основании заключаем:

$$\Psi_1^{\infty, 1, 3}(1, 1) = 1.$$

Для $i = 2$ в результате выполнения на первом шаге алгоритма эксперимента в точке x_1^1 может сформиро-ваться один из исходов $a)$ либо $b)$.

Для исхода $a)$ исходным полуоткрытым интервалом неопределенности является $[0, x_1^1]$, который, как известно, будет разбит на

$$\Psi_1^{\infty, 1, 3}(2-1, 1) = \Psi_1^{\infty, 1, 3}(1, 1) = 1$$

равных частей. Для исхода $b)$ исходным полуоткрытым интервалом неопределенности будет интервал $[x_1^{1,1}, 1)$, где $x_1^{1,1} = \begin{cases} x_1^1 - ab \geq 0, \ x_1^1 - ab \geq 0; \\ 0, \ x_1^1 - ab < 0. \end{cases}$

Для нашего примера $x_1^{1,1} = 0$ (см. параметры ВП), и на основании соотношения (8) будут справедливыми такие выражения:

$$i - h - 1 = 2 - 3 - 1 = -2;$$

$$h_1 = 3 - |2 - 3 - 1| = 1;$$

$$\varphi_1^{\infty, 1, 3}(2-1-1, 1) = 2^{h_1 - 1}\Psi_1^{\infty, 1, 3}(2-1-1, 1) = \\ = 2^0\Psi_1^{\infty, 1, 3}(0, 1) = 1.$$

Следовательно, полуоткрытый интервал неопределенности $[0, x_1^{1,1})$ в случае применения пессимистической стратегии на втором шаге алгоритма в точке x_1^1 и формирования исхода $b_1)$ будет иметь такую длину

$$l([0, x_1^1)) = \delta\Psi_1^{\infty, 1, 3}(0, 1) = \delta; \ \Psi_1^{\infty, 1, 3}(0, 1) = 1. \quad (20)$$

Это соотношение не противоречит ранее полученному решению для исхода $a)$.

Если же в случае применения пессимистической стратегии на втором шаге алгоритма будет и сформированы исходы типа $b_2)$, то на основании положения П1 устанавливаем

$$x \in [x_1^1, 1).$$

Этот полуоткрытый интервал неопределенности будет разбит на $\Psi_1^{\infty, 1, 3}(2-2, 1)$ равных частей:

$$\Psi_1^{\infty, 1, 3}(2-2, 1) = \Psi_1^{\infty, 1, 3}(0, 1) = 1. \quad (21)$$

С учетом соотношений (20), (21) справедливыми будут и такие равенства:

$$l([0, x_1^1)) + l([x_1^1)) = \\ = \delta\Psi_1^{\infty, 1, 3}(0, 1) + \delta\Psi_1^{\infty, 1, 3}(0, 1) = 2\delta;$$

$$\Psi_1^{\infty, 1, 3}(2, 1) = 2.$$

По аналогичной схеме были найдены оценки для трехшагового и четырехшагового алгоритмов

$$\Psi_1^{\infty, 1, 3}(3, 1) = 3; \quad \Psi_1^{\infty, 1, 3}(4, 1) = 5.$$

Пусть $i = 5$ и в точке x_1^1 выполнен первый эксперимент. Тогда, как это уже ранее показано, для исхода $a)$ будут иметь место такие соотношения:

$$x \in [0, x_1^1), x_1^1 = \delta\Psi_1^{\infty, 1, 3}(5-1, 1) = 5\delta.$$

Для исхода $b)$ справедливым будет такое соотношение:

$$x \in [x_1^{1,1}, 1),$$

где $x_1^{1,1} = \begin{cases} x_1^1 - ab; \ x_1^1 - ab \geq 0; \\ 0, \ x_1^1 - ab < 0. \end{cases}$

Поскольку для нашего примера $x_1^{1,1} = 0$, то $x \in \in [0, 1)$.

Если на втором шаге применить пессимистическую стратегию, то на основании соотношения (8) будут справедливы такие равенства:

$$i - h - j = 5 - 3 - 1 = 1; \ h_1 = h = 3;$$

$$\varphi_1^{\infty, 1, 3}(5-3-1, 1) = 2^{h_1 - 1}\Psi_1^{\infty, 1, 3}(5-3-1, 1) = \\ = 2^2\Psi_1^{\infty, 1, 3}(1, 1) = 4.$$

Поскольку $\delta\varphi_1^{\infty, 1, 3}(1, 1) = 4\delta$, то в этом случае полуоткрытый интервал $[0, x_1^1)$ разбивается на меньшее количество равных частей, чем в том случае, когда на первом шаге алгоритма формируется исход $a)$.

Координату точки x_1^1 для такой ситуации определяют на основании минимаксного критерия:

$$x_1^1 = \delta\{\min\{\Psi_1^{\infty,1,3}(4,1), \varphi_1^{\infty,1,3}(1,1)\}\} = \\ = \delta\{\min\{5,4\}\} = 4\delta;$$

$$x_1^1 = 4\delta, \quad l([0, x_1^1)) = 4\delta. \qquad (22)$$

Итак, на основании соотношений (21) и п оложения П3 устанавливаем: на втором шаге алгоритма необходимо применить пессимистическую стратегию. Если на втором шаге алгоритма формируется исход типа b_1), то его решение определяется соотношением (22). Если же формируется исход типа b_2), то на основании положения П1 устанавливаем:

$$x \in [x_1^1, 1).$$

Поскольку в этом случае в распоряжении алгоритма осталось три шага, то полуоткрытый интервал $[x_1^1, 1)$ будет трехшаговым алгоритмом, который нами уже построен, разбит на три равные части;

$$l([x_1^1, 1)) = \delta\Psi_1^{\infty,1,3}(3,1) = 3\delta. \qquad (23)$$

На основании соотношений (22), (23) устанавливаем:

$$l([0,1)) = l([0, x_1^1)) + l([x_1^1, 1)) = \\ = \delta\varphi_1^{\infty,1,3}(1,1) + \delta\Psi_1^{\infty,1,3}(3,1) = \\ = 4\delta + 3\delta = 7\delta;$$

$$\Psi_1^{\infty,1,3}(5,1) = 7. \qquad (24)$$

Пусть $i = 6$. Тогда по итогам выполнения первого шага алгоритма может возникнуть исход *a*) либо *b*).

Для исхода *a*) будем иметь место такое соотношение:

$$x_1^1 = \delta\Psi_1^{\infty,1,3}(6-1,1) = \delta\Psi_1^{\infty,1,3}(5,1) = 7\delta. \qquad (25)$$

Если по итогам выполнения первого шага был сформирован исход *b*), то необходимо решить задачу выбора стратегии поиска на основании соотношения (8), (15). Получаем такие равенства:

$$i-h-j = 6-3-1 = 2; \quad h_1 = h = 3; \quad x_1^{1,1} = 0.$$

$$l([0, x_1^1)) \le \delta 2^{h_1-1}\Psi_1^{\infty,1,3}(6-h_1-1,1) = \\ = \delta 2^2\Psi_1^{\infty,1,3}(2,1) = 8\delta;$$

$$l([0, x_1^1)) \le \delta 2^{h_1-2}\Psi_1^{\infty,1,3}(6-h_1-1,1) = \\ = \delta 2^1\Psi_1^{\infty,1,3}(2,1) = 4\delta. \qquad (26)$$

Поскольку второе неравенство противоречит второму неравенству (15), то в случае формирования исхода *b*) на втором шаге алгоритма следует применить пессимистическую стратегию в точке x_1^1. В том случае, когда возникает исход b_1), то на основании соотношений (25), (26) находят координату точки x_1^1:

$$x_1^1 = \delta\min\{\Psi_1^{\infty,1,3}(6-1,1), \varphi_1^{\infty,1,3}(6-3-1,1)\} = \\ = \delta\min\{7,8\} = 7\delta.$$

Если же по итогам выполнения второго шага алгоритма формируется исход b_2), то на основании положения П1 формируют такой полуоткрытый интервал неопределенности:

$$x \in [x_1^1, 1).$$

Поскольку в распоряжении алгоритма осталось четыре шага алгоритма, то четырехшаговый алгоритм разобьет этот интервал на $\varphi_1^{\infty,1,3}(4,1)$ равных частей. На этом основании записывают такие соотношения:

$$l([0,1)) = l([0, x_1^1)) + l([x_1^1, 1));$$

$$l([0,1)) = \delta\Psi_1^{\infty,1,3}(6-1,1) + \delta\Psi_1^{\infty,1,3}(4,1) = \\ = 7\delta + 5\delta = 12\delta;$$

$$\Psi_1^{\infty,1,3}(6,1) = 12. \qquad (27)$$

Условия предыдущего примера не позволили на втором шаге алгоритма применить оптимистическую стратегию. Рассмотрим другой пример, для которого параметры алгоритма и виртуальной последовательности имеют такие значения:

$$i = 6, \quad k = 1; \quad a = 4; \quad l = 1, \quad h = 3, \quad 0 \to 1.$$

Методом математической индукции показана истинность таких соотношений:

$$\Psi_1^{4,3,1}(0,1) = \Psi_1^{4,3,1}(1,1) = 1;$$

$$\Psi_1^{4,3,1}(2,1) = 2; \ \Psi_1^{4,3,1}(3,1) = 3;$$

$$\Psi_1^{4,3,1}(4,1) = 5; \ \Psi_1^{4,3,1}(5,1) = 3.$$

Найдем оценку шестишагового алгоритма поиска $x \in [0,1)$, используя пошаговое описание процесса построения алгоритма.

Первый шаг:

– в результате выполнения эксперимента в точке x_1^1 может быть сформирован один из исходов *a*) или *b*);

ISSN 1607-3274 «Радіоелектроніка. Інформатика. Управління» № 1, 2009

– для исхода *a*) будут справедливы такие соотношения: $x \in [0, x_1^1)$, $x_1^1 = \delta\Psi_1^{4,1,3}(5, 1) = 8\delta$;

– для исхода *b*) соответственно будут иметь место такие выражения:

$$x \in [x_1^{1,1}, 1), x_1^{1,1} = x_1^1 - a = 8\delta - 4\delta = 4\delta.$$

Второй шаг:

– для исхода *b*) находим оценки таких вариантов: на втором шаге применяется в точке x_1^1 пессимистическая стратегия (см. соотношение (17)):

$$l([x_1^{1,1}, x_1^1)) = 4\delta < \delta 2^{3-1}\Psi_1^{4,1,3}(6-3-1, 1) = 8\delta;$$

на втором шаге применяется оптимистическая стратегия:

$$l([x_1^{1,1}, x_1^1)) = 4\delta = \delta 2^{3-2}\Psi_1^{4,1,3}(6-3-1, 1) = 4\delta.$$

Поскольку выполняются все неравенства (17), то на втором шаге применяют оптимистическую стратегию ($x_1^2 > x_1^1$).

По итогам выполнения второго шага алгоритма может сформироваться один из исходов c_3) или c_4).

Третий шаг:

– выбор стратегии поиска для исхода c_3) (см. соотношения (17)): для этого исхода формируют такой интервал неопределенности: $x \in [x_1^{1,1}, x_1^2)$;

– оценка применения на третьем шаге пессимистической стратегии ($x_1^3 = x_1^1$)

$$l([x_1^{1,1}, x_1^1)) = 4\delta = \delta 2^{3-2}\Psi_1^{4,1,3}(6-3-1, 1) = 4\delta; \quad (28)$$

– оценка использования на третьем шаге оптимистической стратегии ($x_1^3 < x_1^2$)

$$l([x_1^{1,1}, x_1^1)) = 4\delta > \delta 2^{3-3}\Psi_1^{4,1,3}(6-3-1, 1) = 2\delta.$$

Поскольку второе неравенство системы неравенств (17) не выполняется, то на третьем шаге необходимо применить пессимистическую стратегию в точке x_1^1. По итогам выполнения третьего шага в этом случае может сформироваться один из исходов c_5) или c_6.

Для исхода c_5) полуоткрытый интервал неопределенности $[x_1^{1,1}, x_1^1)$, как это было уже показано, разбивают на четыре части, что не противоречит ранее полученным решениям (см. соотношение (27)). Для исхода c_6) на основании положения П1 и соотношения (14) устанавливаем:

$$x \in [x_1^1, x_1^2);\ \ l([x_1^1, x_1^2)) = 3\delta;$$

$$x_1^2 = x_1^1 + 3\delta = 8\delta + 3\delta = 11\delta. \quad (29)$$

Выбор стратеги и поиска для исхода c_4) (выполняют на основании соотношения (17)): для этого исхода формируют такой интервал неопределенности $x \in [x_1^{2,1}, 1)$, где

$$x_1^{2,1} = \begin{cases} x_1^2 - a\delta,\ x_1^2 - a\delta \ge x_1^1; \\ x_1^1,\ x_1^2 - a\delta < x_1^1. \end{cases}$$

Поскольку для заданных параметров ВП будут справедливы такие соотношения:

$$x_1^{2,1} = x_1^2 - 4\delta = 11\delta - 4\delta < x_1^1,$$

то $x_1^{2,1} = x_1^1 = 8\delta$.

Выбор стратегии поиска для исхода c_4): оценка пессимистической стратегии

$$l([x_1^{2,1}, x_1^2)) = 3\delta < \delta 2^{3-1}\Psi_1^{4,1,3}(6-3-1, 1) = 4\delta; \quad (30)$$

оценка оптимистической стратегии

$$l([x_1^{2,1}, x_1^2)) = 3\delta < \delta 2^{3-2}\Psi_1^{4,1,3}(6-3-2, 1) = 2\delta.$$

Поскольку в этом случае второе неравенство (17) не выполняется, то на третьем шаге применяют в точке x_1^2 пессимистическую стратегию. По итогам выполнения третьего шага может сформироваться один из исходов

$$c_7)\ x + \xi(t_3) \le x_1^2;\ \ c_8)\ x + \xi(t_3) > x_1^2.$$

Для исхода c_7) полуоткрытый интервал неопределенности $x \in [x_1^{2,1}, x_1^2)$ (см. соотношение (30)) будет разбит на четыре части; для исхода c_8) на основании положения П1 устанавливаем истинность соотношения

$$x \in [x_1^2, 1).$$

Поскольку в распоряжении алгоритма осталось три шага, то такой алгоритм, который уже построен методом математической индукции, разобьет выделенный полуоткрытый интервал неопределенности на

$$\Psi_1^{4,1,3}(3, 1) = 3;\ \ l([x_1^2, 1)) = 3\delta \quad (31)$$

равных частей.

На основании соотношений (29), (31) устанавливаем истинность следующих равенств:

$$l([0, 1)) = l([0, x_1^1)) + l([x_1^2, x_1^2)) + l([x_1^2, 1)) = \\ = 8\delta + 3\delta + 3\delta = 14\delta;$$

$$\Psi_1^{4,1,3}(6, 1) = 14.$$

Нами показана истинность положений П1, П2, П3, на основании которых формируется для произвольного шага алгоритма поиска полуоткрытый интервал неопределенности относительно точки с характерным признаком и выбирается одна из возможных стратегий: оптимистическая или пессимистическая.

Этим самым достигается оптимальность (см. соотношение (3) [3]) алгоритмов поиска, помехоустойчивых к тем или иным нерегулярным несимметричным виртуальным последовательностям положительной полярности. Цифровые автоматы, функционирование которых задают ориентированные графы переходов таких алгоритмов поиска, будут формировать за меньшее количество шагов псевдослучайную подстановку и тем самым будут уменьшать количество символов в шифротексте.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. *Алипов Н. В.* Дискретные автоматы с псевдослучайными переходами и подстановочные методы защиты информации на их основе / Алипов Н. В. // Радиоэлектроника и информатика. – 2001. – № 4. – С. 95–98.
2. *Алипов Н. В.* Структура цифрового автомата с псевдослучайными переходами из начального состояния в одно и тоже конечное состояние / Алипов Н. В., Кораблев Н. М., Хиль М. И., Гусятин М. В. // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2006. – № 2. – С. 102–109.
3. *Алипов Н. В.* Примеры построения ориентированных графов переходов цифрового автомата с псевдослучайными переходами / Алипов Н. В., Кораблев Н. М., Хиль М. И., Гусятин М. В. // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2007. – № 1. – С. 97–105.
4. *Алипов Н. В.* Синтез оптимальных полихотомичных опросников для угадывания числа с ложными ответами / Алипов Н. В. // Проблемы бионики. – 1987. – Вып. 38. – С. 108–117.

Надійшла 3.09.2008

Визначено співвідношення ефективності застосування песимістичної й оптимістичної стратегії на j-му кроці алгоритму, на підставі яких обирають крок застосування песимістичної стратегії. На конкретних прикладах проілюстровані характерні випадки вибору стратегій пошуку.

The correlations of efficiency application of pessimistic and optimistic strat-egy are determined on a j-step algorithm, on the basis of which the step of pessimistic strategy application is selected. The concrete examples demon-strate the typical cases of strategies' search selection.

УДК 519.234

А. Е. Архипов, А. И. Арифов

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГНОЗНОГО ПОДХОДА ДЛЯ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОБНАРУЖЕНИЯ АНОМАЛЬНЫХ ДАННЫХ В ВЫБОРКАХ ОДНОВЕРШИННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Предлагается непараметрический подход к выявлению аномальных данных, базирующийся на прогнозном определении границы области достоверных значений. Приведен ряд методов, позволяющий реализовать изложенный подход на практике.

ВВЕДЕНИЕ

Практическое решение прикладных задач с использованием экспериментально полученных данных (в частности, результатов измерений) показывает, что в общей совокупности исходных данных встречаются отдельные результаты, значения которых резко отличаются от остальных. Эти результаты получили название аномальных данных (АД) (другие названия: аномальные результаты измерений [1], грубые ошибки [2], резко выделяющиеся значения [3, 4], «подозрительные», «загрязняющие» значения [4], аномальные погрешности или ошибки [5]). К сожалению, достаточно строгое определение термина аномальные данные оказалось сложной задачей. Встречающиеся в литературе выражения вида: «ненормально большие погрешности (типа промах)» [5], «результаты наблюдений, которые сильно отличаются от центра распределения» [3] или подобные им не дают достаточно полного и адекватного представления об особенностях и свойствах АД.

Более удачным представляется описание АД так называемыми смесевыми моделями [6], из которых одной из первых и наиболее известных является модель Тьюки «засоренного» нормального распределения. Согласно этой модели, элементы исходной совокупности данных «извлекаются» из генеральной совокупности, заданной функцией плотности вероятности вида

$$f(z) = (1-\gamma)\varphi(z, \mu, \sigma_z^2) + \gamma\varphi(z, \mu\sigma_\alpha^2), \qquad (1)$$

где $\varphi(z, \mu, \sigma^2)$ – плотность нормального распределения со средним (математическим ожиданием) μ и