УДК 519.711.3:519.68

Т. С. Супрун, С. Ю. Шабанов-Кушнаренко

ИЗОМОРФИЗМ ПРЕДИКАТНЫХ МОДЕЛЕЙ КОМПАРАТОРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Рассматриваются различные предикатные модели компараторной идентификации. Показано, что идентифицируемый оператор может обладать свойством внутренней нелинейности взаимно однозначного характера. Это означает, что предикатные модели обладают изоморфизмом структуры.

ВВЕДЕНИЕ

Основным вопросом теории идентификации, в том числе и компараторной [1], является отыскание структуры неизвестного оператора. Можно отметить, что традиционные методы идентификации, зачастую считают вид оператора априори заданным и занимаются определением параметров модели. Компараторная же идентификация как раз начинается с определения вида оператора путем проверки соответствующих свойств. Получаемые при этом модели используют язык предикатов и обладают определенной инвариантностью к шкале измерения, в основе которой лежит идея изоморфизма моделей.

В данной статье будет дано обоснование вопроса о «изоморфизма моделей», который лежит в основе структурной компараторной идентификации.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как известно [2], формальная постановка компараторного метода опирается на модель задаваемую предикатом $E(x_1, x_2)$ вида

$$E(x_1, x_2) = D(F[x_1], F[x_2]), \qquad (1)$$

где x_1, x_2 – элементы множества входных сигналов $y_1 = F[x_1]$, $y_2 = F[x_2]$ – элементы множества выходных сигналов B, а D – стандартный предикат равенства, заданный на декартовом квадрате множества B. Из выражения (1) видно, каким образом в структуру предиката включается неизвестный оператор F. В рамках компараторной идентификации необходимо по экспериментальным свойствам предиката E восстанавливать структуру F. Однако нетрудно заметить, что если рассмотреть оператор $G = \varphi F$, где $\varphi : B \to B$ – взаимно однозначное соответствие, то предикат E' вида

$$E'(x_1, x_2) = D(G[x_1], G[x_2])$$

будет совпадать с предикатом E. Это вытекает из свойств взаимнооднозначного соответствия и предиката равенства. Следовательно восстановление структуры оператора F по свойствам предиката E возможно только с точностью до взаимнооднозначного соответствия φ. В этом состоит одна из основных особенностей компараторной идентификации. В некоторых случаях подобное обстоятельство может оказаться недостатком, однако далеко не всегда.

Во-первых, то, что восстановление структуры происходит с точностью до взаимно однозначного соответствия, вполне естественно, если учесть характер экспериментальной информации, на которой базируется компараторная идентификация. Действительно, экспериментальная информация об операторе F выглядит не в виде некоторой таблицы, как при традиционных методах идентификации, а в виде разбиения множества входных сигналов на классы постоянства оператора F. Известно, что предикаты вида (1), называемые предикатами эквивалентности [1], задают разбиение множества на смежные классы. Следуя терминологии, принятой в анализе, можно сказать, что информация о неизвестном операторе F задана в виде его линий уровня. Очевидно, что линии уровня не меняются при применении к образу любой функциональной зависимости взаимно однозначного преобразования. Отсюда становится естественным полученный выше ответ по восстановлению структуры при компараторной идентификации.

С точки зрения математического моделирования связь между операторами в виде взаимно однозначного соответствия означает изоморфизм моделей [3]. На практике такой изоморфизм часто естественен и приемлем. Например, при изучении процесса распознавания цветов органом зрения человека восстановление оператора, моделирующего этот процесс, с точностью до взаимно однозначного соответствия приводит к положительному результату, поскольку, будучи реализованным аппаратными средствами, он позволяет создать прибор, распознающий цвета подобно тому, как это делает человек, несмотря на описанную выше неточность структурной идентификации. В целом такая ситуация характерна для большинства психофизических и многих технических процессов. С другой стороны, возможность точного восстановления структуры традиционными методами (если эта задача решается) есть, в определенном смысле, иллюзия. Объясняется это тем, что как таковых так называемых «прямых измерений» на практике не существует [4].

По сути дела, всегда в завуалированном виде применяется методика сравнения (что характерно для компараторной идентификации) результата измерения с эталоном в определенной шкале. Выбор шкалы и эталона относительны. Согласовываются различные шкалы (для измерения одной и той же физической величины) именно путем взаимно однозначного соответствия. С этих позиций можно утверждать, что восстановление структуры возможно в принципе только с точностью до изоморфизма. Еще раз подчеркнем, что это касается только структурной идентификации. Задача восстановления шкалы или определения параметров неизвестного оператора требует, безусловно, точного решения. Сразу заметим, что путем «прямого измерения» ее решить легче, чем компараторным методом.

Отметим еще одно важное обстоятельство, касающееся структурной идентификации. Если реальный объект описывается нелинейным оператором вида

$$G = \varphi F, \tag{2}$$

где F – линейный оператор, а φ – нелинейное взаимно однозначное преобразование, то любая проверка свойств его линейности «при прямом измерении» ни к чему не приведет. Восстановление же изоморфной ему линейной части F традиционными способами будет весьма затруднительно. С другой стороны, компараторный метод и его предикатное представление (1) игнорирует взаимно однозначную нелинейность φ. Таким образом, с точки зрения компараторной идентификации это будет обычная линейная система. Во втором разделе будут получены аналоги свойств линейности для предикатов, и будет видно, что они остаются в силе для нелинейных операторов типа (2). В итоге можно сказать, что нелинейность (2) несущественна, она не мешает использованию компараторной идентификации, в отличие от традиционных способов. В этом преимущество данной методики и использования аппарата предикатов.

Приведенные выше рассуждения об изоморфизме моделей имеют еще и другой аспект. Если два оператора связаны равенствами (2), то предикаты E и E' совпадают. Но возникает вопрос: имеет ли место обратное утверждение? Положительный ответ на него означает возможность структурной идентификации с точностью до изоморфизма. С другой стороны, предикаты эквивалентности вида (1) – частный случай двуместных предикатов. Решение вопроса об изоморфизме может дать положительный ответ и для других типов предикатов. Тогда, кроме предикатов эквивалентности они тоже могут быть использованы для структурной идентификации компараторным методом.

ИЗОМОРФИЗМ МОДЕЛЕЙ КОМПАРАТОРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

При компараторной идентификации используются две модели компаратора [5]. В первой сравниваются сигналы, преобразованные по одному и тому же закону, то есть осуществляется предикат эквивалентности

$$E(x, y) = D_B(F_x, F_y), \tag{3}$$

где $x, y \in A$ – множество входных сигналов, $F_x, F_y \in \in B$ – множество выходных сигналов, F – отображение из A в B, D_B – стандартный предикат равенства на $B \times B$, то есть

$$D_B(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{если } a = b; \\ 0, & \text{если } a \neq b. \end{cases}$$

Во второй модели входные сигналы преобразуются по разным законам, то есть осуществляется предикат дифункциональности [6]

$$E(x, y) = D_B(F_1 x, F_2 y), \tag{4}$$

где $x, y \in A$ – множество входных сигналов, $F_1 x, F_2 y \in \in B$ – множество выходных сигналов, F_1, F_2 – отображения из A в B, D_B – стандартный предикат равенства на $B \times B$.

С точки зрения идентификации и построения математических моделей реальных систем имеет смысл изучать только те предикаты, которых определяют отображение, входящее в правую часть равенств (3), (4) с точностью до изоморфизма. Покажем, что для предикатов эквивалентности и дифункциональности, и только для них, выполняется это свойство.

Утверждение 1. Пусть F – отображение L в A, а G – отображение L в B и отображения F и G обладают следующими свойствами: для любых $x, y \in L$: $Fx = Fy \Leftrightarrow Gx = Gy$, тогда найдется взаимно однозначное соответствие φ:ImF = ImF, для которого $\varphi F = G$.

Доказательство. На множестве L отображение F осуществляет разбиение его на классы следующим образом: $x, y \in L$ лежат в одном классе, если $Fx = Fy$. Будем обозначать это разбиение Ω_A, а его элементы – ω_a, причем, если $x \in \omega_a$, то $Fx = a \in A$. Аналогично введем разбиение Ω_B с элементами ω_b, индуцируемое на L с отображением G. Докажем, что эти разбиения совпадают, то есть $\Omega_A = \Omega_B$. Для этого возьмем произвольный элемент $\omega_a \in \Omega_A$ и произвольные $x, y \in \omega_a$. Тогда $Fx = Fy$, отсюда $Gx = Gy = b$, то есть $x, y \in \in \omega_b$. Следовательно, любая пара из ω_a принадлежит ω_b. Значит, $\omega_a \subset \omega_b$. Но это включение выполняется и в обратную сторону. Действительно, если $x', y' \in \omega_b$, то $Gx' = Gy' = b$, и это означает, что $Fx' = Fy' = a$, то есть $x', y' \in \omega_a$ или $\omega_b \subset \omega_a$. Последнее равенство означает, что любой элемент разбиения Ω_A является элементом разбиения Ω_B, и наоборот, следовательно $\Omega_a = \Omega_b$.

Теперь построим взаимно однозначное отображение $\varphi{:}\mathrm{Im}(F \to \mathrm{Im}G)$. Зафиксируем произвольный элемент $a \in \mathrm{Im}F \subset A$. Для этого элемента найдется x, для которого $Fx = a$, значит $x \in \omega_a$. Поскольку $\Omega_a = \Omega_b$, то найдется $\omega_a = \omega_b$. Тогда $x \in \omega_b$, следовательно, $Gx = b$ – единственный элемент, $b \in \mathrm{Im}G \subset B$. Положим $\varphi(a) = b$. Покажем, что построенное отображение взаимно однозначно.

Пусть $a_1 \cdot a_2 \in \mathrm{Im}F$ и $a_1 \neq a_2$. Тогда, так как каждому элементу из образа соответствует единственный элемент разбиения, то $\omega_{a_1} \neq \omega_{a_2}$. Отсюда $\omega_{b_1} = \omega_{a_1}$, $\omega_{b_2} = \omega_{a_2}$ и $\omega_{b_1} \neq \omega_{a_2}$, следовательно, $b_1 \neq b_2$, то есть $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$.

Покажем, что для любого $b \in \mathrm{Im}G$ найдется $a \in \in \mathrm{Im}F$, для которого $\varphi(a) = b$. Действительно, произвольному $b \in \mathrm{Im}G$ соответствует $\omega_b \in \Omega_b \in \Omega_a$. Отсюда вытекает, что в $\mathrm{Im}F$ найдется элемент a, такой, что $\omega_b = \omega_a$, а это означает: $\varphi(a) = b$.

Окончательно имеем, что построенное нами отображение $\varphi{:}\mathrm{Im}F \to \mathrm{Im}F$ – взаимно однозначно.

Остается показать, что для этого отображения φ выполняется $\varphi F = G$. Для этого возьмем произвольный элемент $x \in L$, тогда $Fx = a \in \mathrm{Im}F$ и $Gx = b \in \in \mathrm{Im}G$. Отсюда $x \in \omega_a, \omega_b$, но так как ω_a и ω_b – элементы одного и того же разбиения, то $\omega_a = \omega_b$ (пересечение их – непустое множество). Но это значит, что $\varphi(a) = b$, следовательно, $\varphi Fx = \varphi(a) = b = Gx$.

Замечание 1. В доказательстве утверждения 1, выбрав произвольный класс $\omega_a \in \Omega_A$, мы предполагали, что найдутся два элемента $x, y \in \omega_a$. Это предположение несущественно. Действительно, пусть ω_a состоит из одного элемента x, то есть $x = \omega_a$. Но тогда этот элемент входит в качестве класса и в разбиение Ω_B. Он просто равен классу ω_b, для которого $Gx = b$. Так как, если предположить, что ω_b содержит еще какой-либо элемент y, то $Gy = b$, значит $Gx = Gy$, и $Fx = Fy = a$, то есть существует $y \in \omega_a$. Но это противоречит предположению, что ω_a состоит из одного элемента.

Замечание 2. В утверждении 1 взаимно однозначное соответствие осуществляется только между образами отображений F и G. При этом между множествами A и B такого соответствия может и не существовать, поскольку условия утверждения останутся справедливыми, если $A = G_1 \cup \mathrm{Im}F$, $B = G_2 \cup \mathrm{Im}G$, где G_1 и G_2 – произвольные множества. Однако, если $A = \mathrm{Im}F$, а $B = \mathrm{Im}G$, то $\varphi{:}A \to B$.

Утверждение 2. Пусть $F_1{:}L \to A$, $F_2{:}L \to A$, $G_1{:}L \to \to B$, $G_2{:}L \to B$ – произвольные отображения, для которых выполняется свойство

$$\forall x, y \in L{:}F_1 x = F_2 y \Leftrightarrow G_1 x = G_2 y, \qquad (5)$$

тогда найдется взаимно однозначное отображение $\varphi{:}C \to D$, для которого $\varphi F_1 = G_1$ на Ω_1 и $\varphi F_2 = G_2$, где $C = \mathrm{Im}F_1 \cap \mathrm{Im}F_2$, $D = \mathrm{Im}G_1 \cap \mathrm{Im}G_2$; Ω_1 – множество $x \in L$, для которых $F_1 x \in \mathrm{Im}F_2$, Ω_2 – множество $x \in L$, для которых $F_2 x \in \mathrm{Im}F_1$.

Доказательство. Возьмем два произвольных элемента $x, y \in L$, таких, что $F_{1x} = F_1 y$ и $F_1 y = F_1 z$. Тогда найдется $z \in L$, для которого $F_1 x = F_2 z$, $F_1 y = F_2 z$. Отсюда, по условию утверждения 2, имеем, что $G_1 x = G_2 z$ и $G_1 y = G_2 z$, то есть $G_1 x = G_1 y$. Таким образом, если $x, y \in \Omega_1$, то из равенства $F_1 x = F_1 y$ вытекает $G_1 x = G_1 y$. Заметим, что если $x, y \in \in \Omega_1$, то из равенства $G_1 x = G_1 y = G_2 z$ вытекает, что $G_1 x = \mathrm{Im}G_2$. Поэтому аналогичные рассуждения можно провести и в обратную сторону и показать, что для любых $x, y \in \Omega_1$ из равенства $G_1 x = G_1 y$ следует, что $F_1 x = F_1 y$. Таким образом, $F_1 x = F_1 y \Leftrightarrow \Leftrightarrow G_1 x = G_1 y$ на Ω_1. Поэтому из утверждения 2 существует взаимноднозначное отображение $\varphi{:}\mathrm{Im}F_1 \to \to \mathrm{Im}G_1$, для которого $\varphi F_1 = G_1$, $x \in \Omega_1$.

Покажем, что для любого $x \in \Omega_2$ выполняется $\varphi F_2 = G_2$, где $\varphi{:}G \to D$. Действительно, пусть $x \in \Omega_2$, тогда $F_2 x = \mathrm{Im}F_1$ и найдется $y{:}F_2 x = F_1 y$. Заметим, что это означает $y \in \Omega_1$. Следовательно, из условия 2 $G_2 x = G_1 y$, с одной стороны, и $\varphi F_2 x = \varphi F_1 y = G_1 y$ – с другой, то есть $\varphi F_2 x = G_2 x$.

Доказанные утверждения позволяют сформулировать и доказать следующие теоремы.

Теорема 1. Произвольный предикат $E(x, y)$, заданный на $L \times L$, удовлетворяет равенствам

$$E(x, y) = D_A(Fx, Fy) = D_B(Gx, Gy), \qquad (6)$$

где $F{:}L \to A$, $G{:}L \to B$, D_A, D_B – стандартные предикаты равенства на множествах A и B соответственно; тогда и только тогда, когда найдется взаимнооднозначное отображение $\varphi{:}\mathrm{Im}F \to \mathrm{Im}G$, для которого $\varphi F = G$.

Доказательство. Необходимость. Пусть имеет место (6) и $E(x, y) = D_A(Fx, Fy) = I$. Тогда $\varphi Fx = \varphi Fy$ или $Gx = Gy$. Эту цепочку равенств можно пройти и в обратном порядке, то есть, если $Gx = Gy$, то $\varphi^{-1} G_2 x = \varphi^{-1} G_1 y$, $Fx = Fy$ и $E(x, y) = I$. Таким образом, $E(x, y) = D_B(Gx, Gy)$, значит, равенства (6) выполняются.

Достаточность. Она вытекает из утверждения 1, так как при выполнении равенств (5) для любых $x, y \in L$ следует, что $Fx = Fy \Leftrightarrow Gx = Gy$.

Теорема 2. Произвольный предикат $E(x, y)$, заданный на $L \times L$, удовлетворяет равенствам

$$E(x, y) = D_A(F_1 x, F_2 y) = D_B(G_1 x, G_2 y), \qquad (7)$$

где $F_1, F_2 : L \to A$, $G_1, G_2 : L \to B$; D_A, D_B – стандартные предикаты равенства на множествах A и B соответственно; тогда и только тогда, когда найдется взаимно однозначное отображение $\varphi : C \to D$, для которого

$$\varphi F_1 x = G_1 x, \;\; x \in \Omega_1,$$

$$\varphi F_2 x = G_2 x, \;\; x \in \Omega_2,$$

где множества C, D, Ω_1, Ω_2 определены так же, как и в утверждении 2.

Доказательство. Необходимость. Пусть имеют место соотношения (7) и $E(x, y) = D_A(F_1 x, F_2 y) = I$. Это означает, что $F_1 x = F_2 y$, $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$, $F_1 x \in C$, $F_2 y \in C$. Тогда из (7) получаем: $\varphi F_1 x = \varphi F_2 y$ или $G_1 x = G_2 y$. Данные рассуждения проводятся и в обратном порядке. Следовательно, $E(x, y) = D_B(G_1 x, G_2 y)$.

Достаточность. Достаточность, как и в предыдущем случае, вытекает из утверждения 2. Поскольку, если имеют место равенства (6), то $\forall x, y \in L : F_1 x = F_2 y \Leftrightarrow G_1 x = G_2 y$.

Замечание. Отметим, что если имеют место равенства (6), то между $\mathrm{Im} F_1$ и $\mathrm{Im} G_1$ (соответственно между $\mathrm{Im} F_2$ и $\mathrm{Im} G_2$) взаимно однозначного соответствия может и не существовать, и, таким образом, нельзя утверждать, что равенства $\varphi F_1 = G_1$ и $\varphi F_2 = G_2$ выполняются всюду, где определены указанные отображения. В этом можно убедиться, рассмотрев следующий пример.

Определим отображения F_1, F_2, G_1, G_2 на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ таблицами (табл. 1).

Таблица 1

F_1:

1	2	3	4	5
0	1	2	2	3

F_2:

1	2	3	4	5
2	2	4	5	3

G_1

1	2	3	4	5
0	0	2	2	3

G_2

1	2	3	4	5
2	2	6	6	3

Тогда таблица предиката $E_1(x, y) = D(F_1 x, F_2 y)$ будет иметь вид, приведенный в табл. 2.

Таблица 2

	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	0
2	0	0	1	1	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	1

Нетрудно убедиться, что такую же таблицу можно построить и для предиката $E_2(x, y) = D(G_1 x, G_2 y)$, то есть $E_1 = E_2$ или имеют место равенства

$$E(x, y) = D(F_1 x, F_2 y) = D(G_1 x, G_2 y).$$

Однако, $\mathrm{Im} F_1 = \{0, 1, 2, 3\}$, а $\mathrm{Im} G_1 = \{0, 2, 3\}$, то есть они разной мощности и взаимно однозначного соответствия между ними не существует. Такая же ситуация и для $\mathrm{Im} F_2$, $\mathrm{Im} G_2$. С другой стороны, в данном случае $C = \{2, 3\}$ и $D = \{2, 3\}$, то есть в качестве отображения выступает преобразование, сохраняющее все на местах. При этом равенства $\varphi F_1 = G_1$ и $\varphi F_2 = G_2$ выполняются на множествах $\{3, 4, 5\}$ и $\{1, 2, 5\}$, так как $\Omega_1 = \{3, 4, 5\}$, а $\Omega_2 = \{1, 2, 5\}$. Последнее обстоятельство не удивительно. Из таблицы предиката видно, что на первом плече сравнения (F_1, G_1) восстановление отображения с точностью до взаимно однозначного соответствия возможно в тех столбцах, где есть «1», то есть на тех элементах, для которых результат действия отображения можно с чем-либо сравнить. Аналогичная ситуация и со вторым плечом сравнения (F_2, G_2), только там восстановление возможно на тех элементах, которые соответствуют строкам с «1».

Однако существует логическая возможность ввести еще несколько типов предикатов по аналогии с указанными выше моделями. Их можно получить, меняя аргументы функций F, F_1, F_2:

$$E(x, y) = D(F(x, x), F(x, y)),$$
$$E(x, y) = D(F(x, y), F(y, y)),$$

$$E(x, y) = D(F(x, y), F(x, y)),$$
$$E(x, y) = D(F_1(x, x), F_2(y)),$$

$$E(x, y) = D(F_1(x), F_2(x, y)),$$
$$E(x, y) = D(F_1(x, y), F_2(x, y)).$$

Для того, чтобы данные модели могли иметь практическую ценность, необходимо выполнение изоморфизма, описанного выше. Оказывается, что для таких моделей указанное свойство не выполняется, что можно показать, приведя соответствующие контрпримеры.

Рассмотрим на множестве $R \times R$ следующие предикаты:

$$E_1(x, y) = D(x - x, x - y),$$

$$E_2(x, y) = D((x - x)^2, (x - y)^2),$$

$$E_3(x, y) = D(x - y, y - y),$$

$$E_4(x, y) = D((x - y)^2, (y - y)^2),$$

$$E_5(x, y) = D(x - y, x - y),$$

$$E_6(x, y) = D((x - y)^2, (y - y)^2),$$

$$E_7(x, y) = D(x + y, y),$$

$$E_8(x, y) = D(x, 0),$$

$$E_9 = D(x, x + y),$$

$$E_{10}(x, y) = D(0, y),$$

$$E_{11}(x, y) = D(x - y, x + y),$$

$$E_{12}(x, y) = D((x^2 - 2xy + y^2, x^2 - 2xy)).$$

Непосредственная проверка позволяет установить равенства $E_1 = E_2$, $E_3 = E_4$, $E_5 = E_6$, $E_7 = E_8$, $E_9 = E_{10}$, $E_{11} = E_{12}$, но для каждой из этих пар задающие их отображения не изоморфны.

ВЫВОДЫ

Выделен класс систем, для которых применим метод компараторной идентификации, это линейные системы и системы с нелинейностью взаимнооднозначного характера.

Для таких систем, при использовании компараторного метод, можно решить задачу структурной идентификации, то есть путем экспериментальной проверки характеристических свойств однозначно определить структуру модели. Показано, что метод компараторной идентификации инвариантен к внутренним нелинейностям идентифицируемого оператора взаимнооднозначного характера.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. *Шабанов-Кушнаренко С. Ю.* Компараторная идентификация конечномерных процессов количественной оценки : дис. ... д-ра техн. наук : 05.13.01 / Шабанов-Кушнаренко С. Ю. – Харьков, 1995. – 268 с.
2. *Бондаренко М. Ф.* Теория цветового зрения / Бондаренко М. Ф., Шабанов-Кушренко С. Ю. – Харкьов : ФАКТОР-ДРУК, 2002. – 206 с.
3. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Компараторная идентификация алгебраических систем / Шабанов-Кушнаренко Ю. П., Шляхов В. В. // АСУ и приборы автоматики. – 2000. – Вып. 113. – С. 107–123.
4. *Пфанцагль И.* Теория измерений / Пфанцагль И. – М. : Мир, 1976. – 248 с.
5. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта : Проблемы и перспективы / Шабанов-Кушнаренко Ю. П. – Харьков : Вища школа, 1987. – 158 с.
6. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы / Мальцев А. И. – М. : Наука, 1970. – 392 с.

Надійшла 22.09.2008

Розглядаються різні моделі компараторної ідентифікації, які використовують предикати еквівалентності та діфункціональності. Доведено теореми об ізоморфізме згаданих моделей.

Differetnt methods of comparative identification models using predicates of equivalence and difunctionality are considered. The isophormism theorems of proposed models are proved.