

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ГРАНИЦЫ ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ, ЗАДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ R-ФУНКЦИЙ

В статье рассматривается актуальная проблема автоматизации конечно-элементного разбиения поверхности геометрических объектов, заданных в виде неявных функций В.Л. Рвачева. Описаны подходы, которые позволяют повысить качество элементов сетки, полученной с использованием известных методов. Работа методов опирается на минимизацию отклонений между дифференциальными характеристиками функционального описания и дискретного представления границы геометрических объектов.

Ключевые слова: R-функция, визуализация, геометрическая модель, дискретная модель, метод конечных элементов.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Визуализация с применением вычислительной техники, определение напряженно-деформированного состояния деталей и узлов механизмов с использованием вычислительных методов (метод конечных элементов, метод граничных элементов, метод конечных разностей) требуют наличия методов формального описания инженерных конструкций, а также их автоматического разбиения на конечные элементы определенной формы [1]. Одним из перспективных методов описания конструкций или геометрических объектов является использование аналитических функций В. Л. Рвачева. Такое описание является весьма компактным и не имеет никаких теоретических ограничений для построения объектов произвольной сложности.

Автоматизация разбиения поверхности геометрического объекта на конечные элементы, особенно в случае ее функционального задания, – сложная и не имеющая однозначного решения задача [2].

Таким образом, дискретизация границы геометрических объектов, заданных с использованием аналитических функций, является актуальной задачей, решение которой весьма интересно с практической точки зрения.

АНАЛИЗ ПУБЛИКАЦИЙ

Построение сетки или триангуляция заданного набора точек на плоскости хорошо изучена [3–6]. Кроме работ, посвященных построению триангуляции, существует ряд методов, направленных на автоматическую оптимизацию существующей триангуляции, которая основана на изменении связей между узлами сетки, добавлении и изменении положения узлов [7–10]. Большинство методов построения и оптимизации триангуляции разработано для плоскости, но могут быть обобщены до пространственного случая [2].

Возможности и перспективы описания границы геометрического объекта с использованием R-функций представлены в работах научной школы академика В.Л. Рвачева [11, 12].

Для построения дискретных геометрических моделей, заданных в неявном виде, существует ряд методов: методы исчерпывания, методы продолжения, методы рекурсивного деления [13–15]. Анализ этих методов показывает, что задача имеет несколько решений, которые хорошо работают в случае гладкой границы геометрического объекта. Основной проблемой, особенно в случае функционально заданной границы, является правильность расположения дискретных элементов в областях имеющих геометрические особенности. Выявление особенностей и оптимизация сетки в таких областях может качественно улучшить результаты вычислительных экспериментов и ощутимо повысить результаты компьютерной визуализации.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Пусть x – произвольная точка в двумерном или в трехмерном пространстве и $F(x) = 0$ – уравнение, множество решений которого определяет поверхности геометрического объекта. Следовательно, произвольный геометрический объект Ω может быть определен в виде

$$\partial\Omega = \{x : F(x) = 0\}. \quad (1)$$

Основной трудностью практического применения функционального подхода является сложность построения первоначального множества опорных узлов, лежащих на границе или поверхности геометрического объекта, представленного в виде (1). Эта задача равносильна поиску корней нелинейного уравнения $F(x) = 0$.

Набор точек на плоскости или поверхности, соединенных непересекающимися симплексами, образует конечно-элементную сетку на основе треугольных элементов. Пусть $P = \{x_0, x_2, \dots, x_{n-1}\}$, $x_i \in E^d$, $d = \overline{2,3}$ – набор таких точек, тогда триангуляция M набора точек P , состоящего из n элементов, является совокупностью трех множеств:

– множество номеров узлов сетки

$$V = \{v_0, v_2, \dots, v_{n-1}\};$$

– множество ребер $E = \{e_0, e_1, \dots, e_{m-1}\}$, где $e_i = (v_j, v_l)$ упорядоченная пара номеров узлов, такая что $v_j < v_l, v_j \in V, v_l \in V$;

– множество треугольников $T = \{t_0, t_1, \dots, t_{k-1}\}$, где $t_i = (v_j, v_g, v_h)$, – упорядоченная тройка несовпадающих номеров узлов, такая что $v_j = \min(v_j, v_g, v_h)$ и $(v_j, v_g, v_h) \neq (v_j, v_h, v_g)$.

Следовательно, дискретное представление на базе треугольных элементов для произвольного объекта Ω может быть представлено объединением трех множеств

$$M(P) = \{V, E, T\}. \quad (2)$$

ДИСКРЕТИЗАЦИИ ГРАНЦЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Пусть MC – оператор получения конечно-элементной сетки на основе метода марширующих кубов [13, 14], тогда сетка в виде (2) для геометрического объекта $\partial\Omega$, заданного в виде (1), будет иметь вид

$$M = MC(\Delta C, \varepsilon_v), \quad (3)$$

где ΔC – линейный размер шаблона, который должен быть меньше любой геометрической особенности геометрического объекта $\partial\Omega$; ε_v – точность поиска узлов на поверхности $\partial\Omega$.

Конечно-элементную сетку в виде (3) можно с успехом использовать для предварительной визуализации трехмерных геометрических объектов (рис. 1), однако можно выделить ряд недостатков такой сетки:

- наблюдается потеря участков границы, которые соответствуют геометрическим особенностям (изломы, углы, пики) (рис. 1, в);
- элементы сетки обладают плохой формой (много «тонких» и «вытянутых» элементов) (рис. 1, б);
- отсутствуют зависимость густоты сетки от кривизны поверхности.

Для улучшения сетки можно применять методы, основанные на приведении в соответствие нормалей элементов сетки и нормалей к границе геометрического объекта, а также локальные преобразование самих элементов сетки.

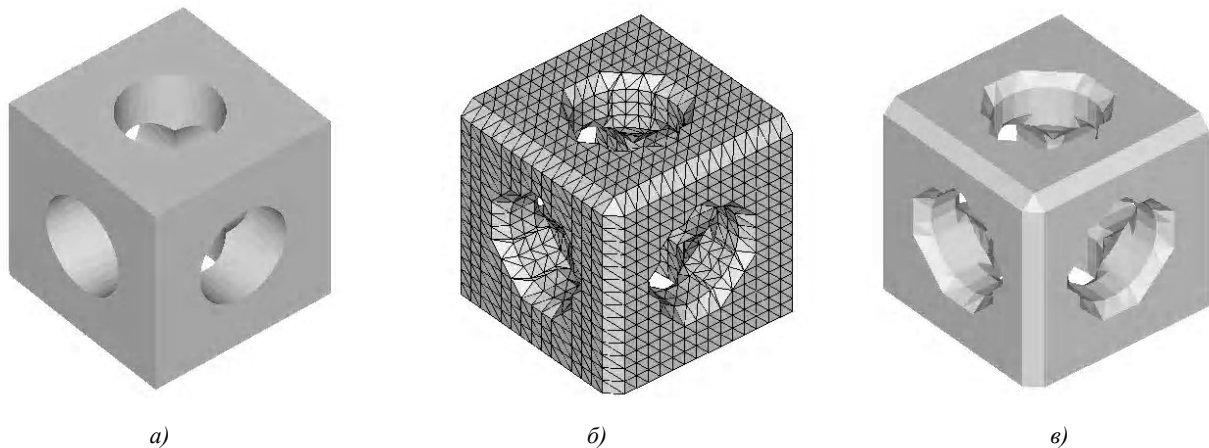


Рис. 1. Конечно-элементная сетка геометрического объекта

Так отклонение между нормалью треугольника t сетки и нормалью к границе $\partial\Omega$ в центре данного треугольника имеет вид

$$\vec{m}(t) = \frac{\Delta F(c)}{\|\Delta F(c)\|}, \quad \varepsilon = 1 - (\vec{n}(t) \cdot \vec{m}(t))^2, \quad (4)$$

где c – центр тяжести треугольника t ; $\vec{n}(t)$ – нормаль к треугольнику t .

Тогда среднеквадратичное отклонение для всех треугольников сетки можно записать в виде

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\sum_{t \in T} A(t)} \sum_{t \in T} A(t) (1 - (\vec{n}(t) \cdot \vec{m}(t))^2), \quad (5)$$

где $A(t)$ – площадь треугольника t .

Если значение оценки (5) больше определенной величины, то положение узлов сетки, расположенных на поверхности геометрического объекта, необходимо скорректировать на величину

$$\Delta p = \frac{1}{\sum_{t \in B(p)} A(t)} \sum_{t \in B(p)} A(t) [(\vec{pc} \cdot \vec{m}(t)) \cdot \vec{m}(t)], \quad (6)$$

где \vec{pc} – вектор от узла к центру тяжести треугольника; $B(p)$ – множество треугольников, которым принадлежит узел p .

Таким образом, получим оператор преобразования вида

$$N(P): p' \leftarrow p + \Delta p, \quad p \in P. \quad (7)$$

Подобно оператору, который корректирует положение узлов сетки, оценивая разность нормалей к элементам сетки и к поверхности $\partial\Omega$, можно использовать другой оператор коррекции, основанный на минимизации суммы квадратов расстояний от узла до касательных плоскостей, проведенных к соседним узлам двойственной сетки.

Двойственной, как правило, называют сетку, образованную путем соединения всех узлов, полученных проецированием центров тяжести треугольников исходной сетки на поверхность $\partial\Omega$ (рис. 2). Для каждого узла p исходной сетки, двойственная сетки может быть получена путем соединения некоторого множества $D(p)$ узлов двойственной сетки, которые получены из центров тяжести смежных с узлом p треугольников (рис. 2, б, з). Следовательно, множество $D(p)$ имеет вид

$$D(p) = \left\{ x : x = \text{proj}_{\partial\Omega}^{\vec{n}(t)}(c_t), t \in B(p) \right\},$$

где $B(p)$ – множество смежных с узлом p треугольников; c_t – центр тяжести треугольника t ; $\text{proj}_{\partial\Omega}^{\vec{n}(t)}(c_t)$ – проекция c_t в направлении вектора нормали к треугольнику $\vec{n}(t)$ на поверхность $\partial\Omega$.

Для каждого узла двойственной сетки можно построить касательную плоскость, уравнение которой имеет вид

$$\vec{m}(p) = \frac{\Delta F(p)}{\|\Delta F(p)\|},$$

$$l(p) = \vec{m}(p) \cdot (x - p) = 0. \quad (8)$$

Пересечение полученных таким образом плоскостей дает некоторую сетку, которая является касательной и в некоторых случаях более качественно аппроксимирует участки границы, в которых существуют геометрические особенности.

Расстояние от произвольной точки до плоскости может быть получено путем подстановки ее координат в уравнение плоскости вида (8). Следовательно, для произвольного узла $x \in P$ исходной сетки в виде (2) можно определить среднеквадратическое отклонение от касательной сетки в следующем виде

$$\varepsilon_\tau(x) = \sum_{p \in D(p)}^{k-1} (\vec{m}(p) \cdot (x - p))^2. \quad (9)$$

Заранее определив пороговое значение среднеквадратического отклонения вида (9), получим множество узлов, положение которых необходимо скорректировать. Для вычисления оптимального положения узла из опре-

деленного множества необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений третьего порядка в виде

$$\frac{d\varepsilon_\tau(x)}{dx} = 0. \quad (10)$$

Таким образом, если $x(p) = (x_1, x_2, x_3)$ – решение системы линейных алгебраических уравнений (10) для узла сетки p , то можем получить новый оператор корректировки положения узлов сетки M в виде

$$N_1(P) : p' \leftarrow p + \Delta p, p \in P, \quad (11)$$

где $\Delta p = x(p) - p$.

На практике оператор вида (11), как правило, за одну итерацию определяет оптимальное положение узлов сетки (рис. 3, а, б).

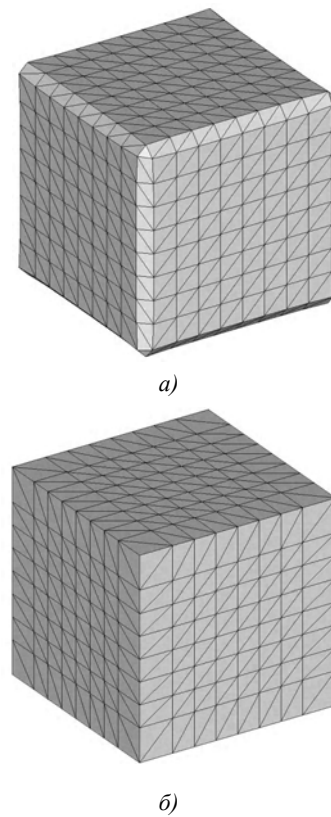


Рис. 3. Применение оператора корректировки узлов сетки

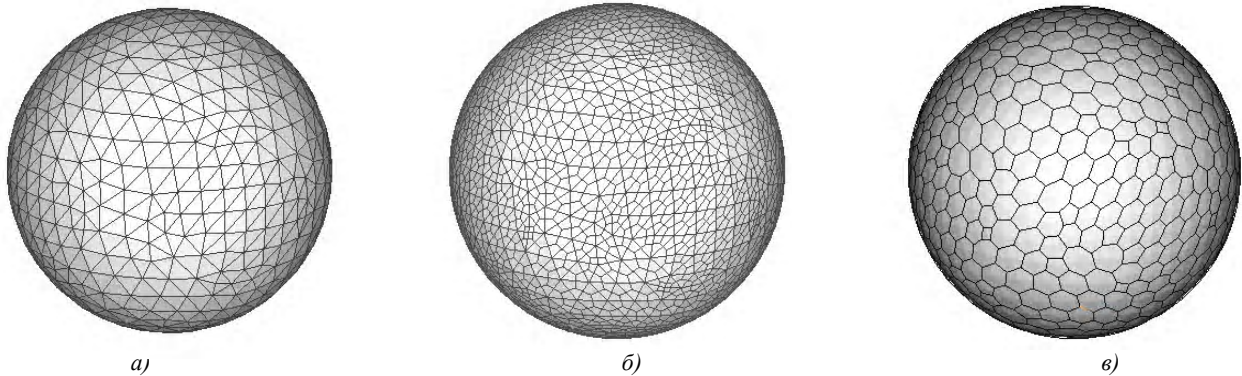


Рис. 2. Сетка на основе треугольных элементов и двойственная к ней сетка

В некоторых случаях оператор может выполнять ошибочную корректировку положения узлов, порождая, таким образом, вырожденные элементы и геометрические особенности, которых нет на исходной поверхности $\partial\Omega$. Причиной таких ошибок, как правило, является плохое качество аппроксимации конечных элементов исходной сетки и накопительные вычислительные погрешности. Поэтому оператор вида (11) применяется не как самостоятельное преобразование, а как один из этапов комплекса преобразований, в который, помимо оператора (7), могут входить такие операции как сгущение сетки, удаление вырожденных элементов, проецирование и сглаживание узлов.

Операцию сглаживания всех без исключения узлов сетки M можно использовать как процедуру подготовки сетки для работы других операторов. Оператор сглаживания для всех узлов сетки может быть записан в следующем виде

$$R_{all}(P) : p' \leftarrow p + \Delta u(p), p \in P, \quad (12)$$

где $\Delta u(p)$ – величина смещения узла, полученная на основе сглаживания.

Если $B(p)$ – множество узлов смежных с p , а n – его мощность, то смещение узла на основе сглаживания Лапласа имеет вид

$$U(p) = \frac{1}{n} \sum_{q \in B(p)} q - p. \quad (13)$$

Для каждого узла сетки M , используя связи с соседними узлами, не сложно определить приближенные значения геометрических характеристик границы объекта, такие как нормаль, касательная плоскость, параметры кривизны. Таким образом, для каждого узла сетки можно определить множество $C(P)$ в виде

$$C(P) = \{(k_1(p), |k_2(p)|) : p \in P\}, \quad (14)$$

а также множество $G(P)$ – модулей гауссовой кривизны в виде

$$G(P) = \{|k_G(p)| : p \in P\}. \quad (15)$$

Множества $C(P)$ и $G(P)$ приближенно определяют основные параметры кривизны поверхности во всех граничных узлах сетки, на основе которых можем разделить множество всех узлов сетки на три составляющих:

- множество узлов, которые являются вершинами P_{corner} ;
- множество узлов, которые принадлежат ребрам P_{edge} ;
- множество обычных узлов $P_{regular}$.

При этом $p \in P_{corner}$ будут соответствовать наибольшие значения из множества $G(P)$, которые можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mu_{corner}^{(t+1)} &= \frac{1}{|P_{corner}^{(t)}|} \sum_{p \in P_{corner}^{(t)}} |k_G(p)|, \\ \mu_{noncorner}^{(t+1)} &= \frac{1}{|P_{noncorner}^{(t)}|} \sum_{p \in P_{noncorner}^{(t)}} |k_G(p)|, \\ P_{corner}^{(t)} &= \{p : \|k(p) - \mu_{corner}^{(t)}\| < \|k(p) - \mu_{noncorner}^{(t)}\|, p \in P\}, \\ P_{noncorner}^{(t)} &= \{p : \|k(p) - \mu_{noncorner}^{(t)}\| < \|k(p) - \mu_{corner}^{(t)}\|, p \in P\} \end{aligned} \quad (16)$$

где $\mu_{corner}^0 = \max(|k_G(p)|), p \in P$ – начальное положение главных точек множества угловых узлов; $\mu_{noncorner}^0 = \min(|k_G(p)|), p \in P$ – начальное положение главных точек множества узлов.

Для множества узлов, которому принадлежат узлы ребер, характерным является большое значение максимальной кривизны и, в то же время, малое значение минимальной. Если считать пары множества $C(P)$ точками двумерного пространства, то формально можем записать множество P_{edge} в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mu_{edge}^{(t+1)} &= \frac{1}{|P_{edge}^{(t)}|} \sum_{p \in P_{edge}^{(t)}} (k_1(p), |k_2(p)|), \\ \mu_{nonedge}^{(t+1)} &= \frac{1}{|P_{nonedge}^{(t)}|} \sum_{p \in P_{nonedge}^{(t)}} (k_1(p), |k_2(p)|), \\ P_{edge}^{(t)} &= \{p : \|k(p) - \mu_{edge}^{(t)}\| < \|k(p) - \mu_{nonedge}^{(t)}\|, p \in P\}, \\ P_{nonedge}^{(t)} &= \{p : \|k(p) - \mu_{nonedge}^{(t)}\| < \|k(p) - \mu_{edge}^{(t)}\|, p \in P\} \end{aligned} \quad (17)$$

где $\mu_{edge}^0 = \left(\max_{p \in P}(k_1(p)), \min_{p \in P}(|k_2(p)|) \right)$ – начальное положение главной точки множества узлов, которые образуют ребра; $\mu_{nonedge}^0 = \left(\min_{p \in P}(k_1(p)), \min_{p \in P}(|k_2(p)|) \right)$ – начальное положение главной точки множества узлов, которые не образуют ребра.

Исходя из полученных множеств особых точек, множество обычных узлов будет иметь вид $P_{regular} = P_{noncorner} \cup P_{nonedge}$.

Практический пример выделения на сетке особых точек и связанных с ними ребер представлен на рис. 4.

Для различных участков границы геометрического объекта возможно применения различных методов оптимизации. Для сглаживания регулярных узлов сетки можно применять оператор сглаживания в виде

$$R_{regular}(P) : p' \leftarrow p + \Delta u(p), p \in P_{regular}, \quad (18)$$

где значение $\Delta u(p)$ аналогично выражению (12).

Очевидно, что множество узлов вершин сетки имеют фиксированное положение. Для выполнения сглаживания множества узлов, которые принадлежат ребрам геометрического объекта, рассмотрим локальный участок границы образованный узлом $p \in P_{edge}$ и парой

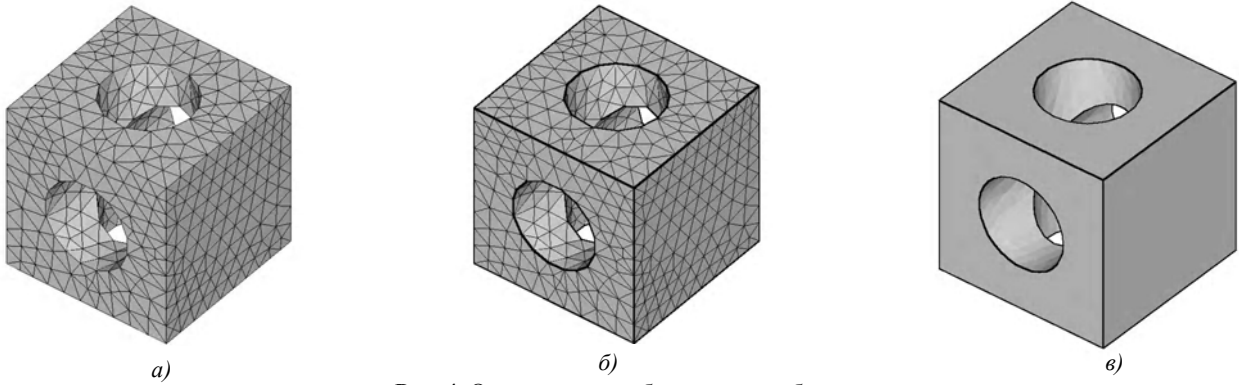


Рис. 4. Определение особых точек и ребер

соседних с ним узлов $p_i, p_j \in P_{edge}$. Тройка выбранных узлов аппроксимирует некоторый участок кривой в пространстве, поэтому коррекция положения узла p должна зависеть только от соседних узлов $p_i, p_j \in P_{edge}$, нормали к кривой $\vec{n}_2(p)$ и касательного вектора $\vec{\tau}(p)$ (рис. 5, а, б).

Пусть новое положение p' узла p будет располагаться в середине отрезка $p_i p_j$. Если тройка узлов аппроксимирует прямой участок границы, то положение p' определено правильно, иначе необходимо скорректировать его положение на величину $(p' - p) \cdot \vec{n}_2(p)$ в направлении вектора $\vec{n}_2(p)$. Таким образом, можем записать смещение узла $\Delta u(p)$ в виде

$$\begin{aligned}
 \vec{n}_1(p) &= (p_j - p) \times (p_i - p), \\
 \vec{\tau}(p) &= (p_i - p_j), \\
 \vec{n}_2(p) &= \tau(p) \times n_1(p), \\
 u(p) &= \frac{p_i + p_j}{2} - p, \\
 \gamma(p) &= (p_j - p) \cdot (p - p_i), \\
 \Delta u(p) &= \begin{cases} u(p), & \gamma(p) = 0 \\ c(u(p) - (u(p) \cdot \vec{n}_2(p)) \cdot \vec{n}_2(p)), & \gamma(p) \neq 0 \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

где c – постоянная из промежутка $[0; 1]$.

Следовательно, оператор сглаживания узлов расположенных на ребрах будет иметь вид

$$R_{edge}(P) : p' \leftarrow p + \Delta u(p), p \in P_{edge}, \tag{20}$$

где $\Delta u(p)$ определяется согласно выражению (19).

Также качество аппроксимации поверхности трехмерного геометрического объекта может быть улучшено путем добавления в сетку новых узлов. Множество новых узлов может быть получено на основе количества точек на радиус кривизны поверхности или на основе максимального расстояния от ребра до границы объекта.

В качестве примера практического применения рассмотрим геометрический объект (куб с парой цилиндрических отверстий (рис. 6)), для которого применим описанные операторы преобразования (7), (11), (18), (20) (рис. 6, б), а также сгущение сетки на основе кривизны поверхности (рис. 6, в).

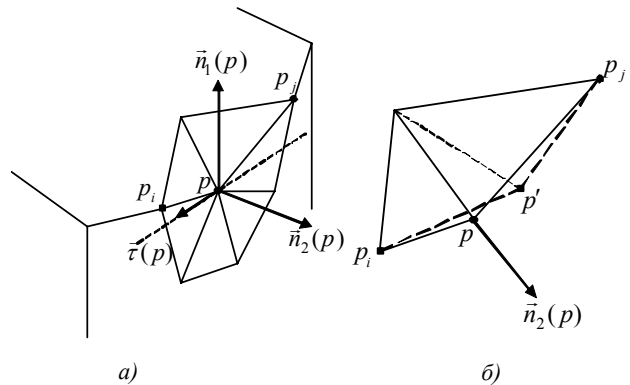


Рис. 5. Смещение узлов на границе геометрического объекта

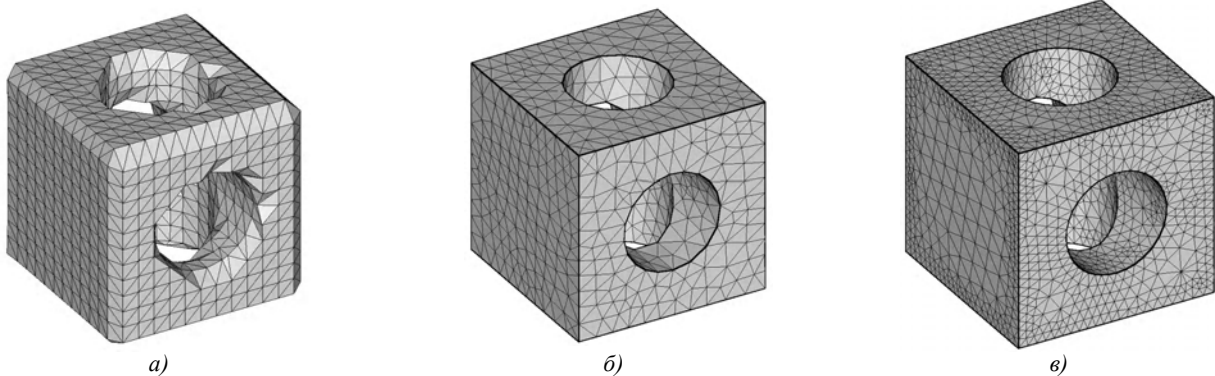


Рис. 6. Оптимизация сетки на границе геометрического объекта

ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе представлен подход, позволяющий автоматически строить дискретные модели геометрических объектов, представленных функционально. Предложены подходы к оптимизации дискретных моделей на базе треугольных конечных элементов, основанные на локальном преобразовании элементов сетки, которое стремится аппроксимировать особые точки объекта, опираясь на анализ дифференциальных характеристик его границы. В результате применения таких подходов может быть получена дискретная модель с неравномерной сеткой на основе треугольных элементов, которая сгущается в областях с наибольшей кривизной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зенкевич, О.* Метод конечных элементов в теории сооружений и механике сплошной среды / О. Зенкевич, И. Чанг. – М. : Недра, 1974. – 238 с.
2. *Liseikin, V. D.* Grid generation methods. Second edition / Vladimir D. Liseikin. – Spring, 2010. – 390 p.
3. *Галанин, М. П.* Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: итерационные методы / М. П. Галанин, И. А Щеглов. – М. : ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006. – № 9. – 32 с. – (Препринт / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН).
4. *Галанин, М. П.* Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы / М. П. Галанин, И. А Щеглов. – М. : ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2006. – № 10. – 32 с. – (Препринт / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН).
5. *George, P.* Delaunay Triangulation and Meshing. Application to Finite / P. George, H. Borouchaki. – Hermes Science Publications, 1998. – 413 p.
6. *Rebay, S.* Efficient Unstructured Mesh Generation by Means of Delaunay Triangulation and Bowyer-Watson Algorithm // Journal Of Computational Physics. – 1993. – № 106. – P. 125–138.
7. *Freitag, L. A.* Tetrahedral Mesh Improvement Using Swapping and Smoothing / L. A. Freitag, C. Ollivier-Gooch // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1995. – № 40. – P. 3979–4002.
8. *George, P. L.* Tet meshing : construction, optimization and adaptation / P. L. George // Proceedings of 8th International Meshing Roundtable. – 1999. – P. 133–141.
9. *Puppo, E.* RGB subdivision / E. Puppo, D. Panozzo // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. – 2009. – № 15(2). – P. 295–310.
10. *Puppo, E.* Selectively refinable subdivision meshes / E. Puppo // Symposium on Geometry Processing 2010. – 2010. – P. 153–162.
11. *Максименко-Шейко, К. В.* R-функции в математическом моделировании геометрических объектов в 3D по информации в 2 D / К. В Максименко-Шейко, Т. И. Шейко // Вісник Запорізького національного університету : збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2010. – № 1. – С. 98–104
12. *Рвачев, В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – К. : Наукова думка, 1982. – 106 с.
13. *Chernyaev, E. V.* Marching Cubes 33: Construction of Topologically Correct Isosurfaces / Evgeni V. Chernyaev // Computer Graphics and Visualization : GRAPHICON'95, 3–7 July, 1995. – Saint-Petersburg, 1995. – С. 21–29.
14. *Efficient Implementation of Marching Cubes Cases with Topological Guarantees / Thomas Lewiner, Hélio Lopes, Antonio Wilson Vieira, Geovan Tavares // Journal of Graphics Tools. – 2003. – № 8 (2) – P. 1–15.*
15. *Patera, J.* A comparison of fundamental methods for ISO surface extraction / Jan Patera, V clav Skala // Machine Graphics & Vision International Journal. – 2004. – № 13(4). – P. 329–343.

Стаття надійшла до редакції 28.04.2014.

Лісняк А. О.

Канд. фіз.-мат. наук, доцент, Запорізький національний університет, Україна

ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ГРАНИЦІ ТРИВИМІРНИХ МОДЕЛЕЙ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ, ВИЗНАЧЕНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ R-ФУНКЦІЙ

У статті розглядається актуальна проблема автоматизації скінченно-елементного розбиття поверхні геометричних об'єктів заданих у вигляді неявних функцій В. Л. Рвачева. Описано підходи, які дозволяють підвищити якість елементів сітки, отриманої з використанням відомих методів. Робота методів базується на мінімізації відхилень між диференціальними характеристиками функціонального опису та дискретного представлення границі геометричних об'єктів.

Ключові слова: R-функція, візуалізація, геометрична модель, дискретна модель, метод скінченних елементів.

Lisnyak A. A.

Ph. D., Zaporozhe national university, Ukraine

SURFACE DISCRETIZATION OF R-FUNCTIONS DEFINED GEOMETRICAL OBJECTS

This article describes actual problem of an automatic generation of finite elements for complex geometrical objects defined by implicit R-functions of V. L. Rvachev. Rvachev's approach of geometrical objects description is universal. R-functions allow create models of complex solids in constructive manner.

Author describes functional approach for modeling of solids and methods of surface meshing in the first section of the article. This section also contains mathematical model of the surface finite elements mesh.

Section II describes approaches for the surface mesh optimization. Author describes new some functions of quality of the mesh. Proposed approaches based on minimization of deviation between functional and mesh representations of geometrical objects.

Proposed approaches allow define regular and irregular elements of the mesh for local refinement of the mesh.

Author uses differential characteristics of the mesh for the non-uniform mesh generation. Surface curvature used for control of the non-uniform mesh generation.

Keywords: R-function, visualization, geometrical model, mesh, finite elements.

REFERENCES

1. Zenkevich O., Chang I. Metod konechnykh elementov v teorii sooruzheniy i mehanike sploshnoy sredy. Moscow, Nedra, 1974, 238 p.
2. Liseikin V. D. Grid generation methods. Second edition, Spring, 2010, 390 p.
3. Galanin M. P., Scheglov I. A. Razrabotka i realizatsiya algoritmov trehmernoy triangulyatsii slozhnykh prostranstvennykh oblastey: iteratsionnyye metody. Moscow, IPM im. M. V. Keldyisha RAN, 2006, No. 9, 32 p. – (Preprint / IPM im. M. V. Keldyisha RAN).
4. Galanin M. P., Scheglov I. A. Razrabotka i realizatsiya algoritmov trehmernoy triangulyatsii slozhnykh prostranstvennykh oblastey: pryamyie metody. Moscow, IPM im. M. V. Keldyisha RAN, 2006, No. 10, 32 p. – (Preprint / IPM im. M. V. Keldyisha RAN).
5. George P., Borouchaki H. Delaunay Triangulation and Meshing. Application to Finite, Hermes Science Publications, 1998, 413 p.
6. Rebay S. Efficient Unstructured Mesh Generation by Means of Delaunay Triangulation and Bowyer-Watson Algorithm, *Journal Of Computational Physics*, 1993, No. 106, pp. 125–138.
7. Freitag L. A., Ollivier-Gooch C. Tetrahedral Mesh Improvement Using Swapping and Smoothing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1995, No. 40, pp. 3979–4002.
8. George P. L. Tet meshing : construction, optimization and adaptation, *Proceedings of 8th International Meshing Roundtable*, 1999, P. 133–141.
9. Puppo E., Panozzo D. RGB subdivision, *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2009, No.15 (2), pp. 295–310.
10. Puppo E. Selectively refinable subdivision meshes, *Symposium on Geometry Processing 2010*, 2010, pp. 153–162.
11. Maksimenko-Sheyko K. V., Sheyko T. I. R-funktsii v matematicheskoy modelirovaniy geometricheskikh ob'ektov v 3D po informatsii v 2D. *VIsnik Zaporlzkogo natsionalnogo unIversitetu: ZbIrnik naukovih statey. FIZiko-matematichni nauki*, 2010, No. 1, pp. 98–104.
12. Rvachev V. L. Teoriya R-funktsiy i nekotoryie ee prilozheniya. Kiev, Naukova dumka, 1982, 106 p.
13. Chernyaev E. V. Marching Cubes 33: Construction of Topologically Correct Isosurfaces, *Computer Graphics and Visualization*, GRAPHICON'95, 3–7 July, 1995. Saint-Petersburg, 1995, pp. 21–29.
14. Thomas Lewiner, Hélio Lopes, Antonio Wilson Vieira, Geovan Tavares Efficient Implementation of Marching Cubes Cases with Topological Guarantees, *Journal of Graphics Tools*, 2003, No. 8(2), pp. 1–15.
15. Patera J., Skala V. A comparison of fundamental methods for ISO surface extraction, *Machine Graphics & Vision International Journal*, 2004, No.13(4), pp. 329–343.