УПРАВЛІННЯ У ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ

CONTROL IN TECHNICAL SYSTEMS

УДК 519.71

СТАБІЛІЗАЦІЯ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ З ЧАСОВИМИ ЗАТРИМКАМИ ЗА СТАНОМ ТА ОБМЕЖЕННЯМИ КЕРУЮЧИХ ВПЛИВІВ

Дорофєєв Ю. І. – д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна.

Любчик Л. М. – д-р техн. наук, професор, професор кафедри комп'ютерної математики та аналізу даних, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна.

Мельников О. С. – канд. екон. наук, доцент, доцент кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна.

АНОТАЦІЯ

Актуальність. Наявність затримок у часі має місце в багатьох складних динамічних системах, поширених у сферах сучасних комунікаційних та інформаційних технологій, зокрема при вирішенні задачі стабілізації мережевих керованих систем та високошвидкісних мереж зв'язку. У багатьох випадках часові затримки призводять до зниження ефективності систем та, навіть, до порушення умов стійкості. Для аналізу стійкості та синтезу стабілізуючих регуляторів для дискретних динамічних систем з невідомими, але обмеженими часовими затримками за станом в останнє десятиліття було запропоновано багато цікавих рішень з використанням методу функціоналів Ляпунова-Красовського. Наявність нелінійних обмежень на амплітуду керуючих впливів, зокрема у вигляді насичення, додатково ускладнює задачу та потребує розробки нових підходів та методів.

Мета. Мета роботи полягає у запровадженні процедури обчислення матриці коефіцієнтів зворотного зв'язку за станом, який забезпечує асимптотичну стійкість досліджуваної системи, а також процедури обчислення максимального допустимого значення часової затримки за станом, за якого може бути забезпечена стійкість замкнутої системи для заданого набору допустимих початкових умов.

Метод. В роботі використано метод дескрипторного перетворення моделі замкнутої системи та запропоновано поширення методу інваріантних еліпсоїдів на системи з невідомими, але обмеженими часовими затримками за станом. Застосування методу функціоналів Ляпунова-Красовського та техніки лінійних матричних нерівностей дозволило звести задачу обчислення матриці коефіцієнтів зворотного зв'язку до задачі напіввизначеного програмування, яка вирішується чисельно. Запропоновано ітераційний алгоритм вирішення білінійної матричної нерівності для обчислення максимального допустимого значення часової затримки за станом.

Результати. Результати чисельного моделювання підтверджують ефективність запропонованого підходу в задачах стабілізації дискретних систем в умовах дії часових затримок за станом та нелінійних обмежень на керуючі впливи і дозволяють рекомендувати запропонований метод для використання на практиці з метою аналізу стійкості та синтезу стабілізуючих регуляторів, а також обчислення максимального допустимого значення часових затримок.

Висновки. Запропоновано підхід, який дозволяє поширити метод інваріантних еліпсоїдів на дискретні динамічні системи з невідомими, але обмеженими часовими затримками за станом для вирішення задачі стабілізації системи за допомогою статичного зворотного зв'язку за станом на основі застосування методу функціоналів Ляпунова-Красовського. Результати чисельного моделювання підтверджують ефективність запропонованого підходу в умовах наявності нелінійних обмежень на керуючі впливи типу насичення.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: стабілізація, часова затримка, насичення управління, функціонал Ляпунова-Красовського, метод інваріантних еліпсоїдів, лінійна матрична нерівність.

АБРЕВІАТУРИ

ЛМН – лінійна матрична нерівність;
МІЕ – метод інваріантних еліпсоїдів;
ФЛ – функція Ляпунова;
ФЛК – функціонал Ляпунова-Красовського.

НОМЕНКЛАТУРА

$A,\ A_d \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – стаціонарні матриці станів системи;
$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – стаціонарна матриця входів системи;
I_n – одинична матриця розмірністю $n\times n$;

DOI 10.15588/1607-3274-2023-2-15

$K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – матриця коефіцієнтів зворотного зв'язку;

$0_{n\times m}$ – нульова матриця розмірністю $n \times m$;

$P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симетрична додатно визначена матриця;

$P_2, P_3, W_2, W_3 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – допоміжні матриці;

$Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симетрична додатно визначена матриця;

$W_1,\ Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симетричні додатно визначені матриці інваріантних еліпсоїдів;

$V(k)$ – функціонал Ляпунова-Красовського;

d^m – максимальне значення часової затримки;

$d(k) \in \mathbb{Z}_+$ – затримка в момент часу k;

iter – максимальна кількість ітерацій алгоритму;

$k = 0,1,2,...$ – номер дискретного моменту часу;

u_i^m – максимальне значення *i*-тої компоненти вектора входів $u(k)$;

$u(k) \in \mathbb{R}^m$ – вектор керування в момент часу k;

$x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор станів системи в момент часу k;

δ – допустима величина помилки;

$\varepsilon(W_1),\ \varepsilon(Z)$ – еліпсоїди з матрицями W_1 та Z, відповідно;

$\lambda(A)$ – спектр матриці A.

ВСТУП

Для дослідження широкого спектру динамічних систем використовують моделі з часовими затримками за станом. До систем такого класу, зокрема, належать мережеві виробничі та транспортні системи, системи зв'язку, підтримки прийняття рішень тощо [1]. Наявність затримок в часі може призводити до зниження продуктивності та, навіть, порушення умов стійкості систем управління. Тому аналіз стійкості та синтез методів стабілізації динамічних систем із затримками за станом має як практичне, так і теоретичне значення. Часові затримки можуть бути постійними, але найбільше уваги в літературі приділяється ситуації, коли затримки змінюються в часі, а їх величини є невідомими, проте обмеженими [2, 3].

Процеси управління динамічними системами ще більш ускладнюються, якщо існують обмеження на керуючі впливи. На практиці такі вимоги виникають доволі часто через неможливість регуляторів синтезувати сигнали управління з необмеженою амплітудою. Наявність обмежень типу насичення викликає необхідність застосування моделей з нелінійностями [4, 5]. В цьому випадку методи аналізу стійкості та синтезу стабілізуючих регуляторів, які використовуються для лінійних систем, не можуть бути безпосередньо застосовані. Тому виникає необхідність розробки нових підходів до вказаної проблеми з використанням методу функціоналів Ляпунова-Красовського та техніки лінійних матричних нерівностей.

Об'єктом дослідження є процеси управління динамічними дискретними системами з невизначеними, але обмеженими часовими затримками за станом та нелінійними обмеженнями сигналів управління типу насичення.

Предмет дослідження складає процедура синтезу закону керування у вигляді стаціонарного зворотного зв'язку за станом на основі застосування методу функціоналів Ляпунова-Красовського та техніки лінійних матричних нерівностей.

Мета роботи полягає у запровадженні процедури обчислення матриці коефіцієнтів зворотного зв'язку за станом на основі методу інваріантних еліпсоїдів, а також ітераційного алгоритму вирішення білінійної матричної нерівності з метою обчислення максимальної допустимої величини часової затримки.

1 ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Розглянемо дискретну модель динамічної системи з невизначеними, але обмеженими часовими затримками за станом

$$\begin{gathered} x(k+1) = Ax(k) + A_d x(k-d(k)) + Bu(k), \\ x(k) = \phi(k),\ \ k \in \left[-d^m,...,0\right], \end{gathered} \tag{1}$$

де $d(k)$ – додатне ціле число, яке відповідає нерівності

$$0 \le d(k) \le d^m. \tag{2}$$

Вважається, що вектор керуючих дій відповідає обмеженням по амплітуді у вигляді насичення, які мають вигляд

$$\left|u_i(k)\right| \le u_i^m,\ \ i = 1,...,m. \tag{3}$$

Закон керування визначається у вигляді статичного зворотного зв'язку за станом $u(k) = Kx(k)$. Через обмеження (3) ефективний керуючий сигнал, що подається на систему (1), визначається таким чином

$$u(k) = sat\left(Kx(k)\right), \tag{4}$$

де $u_i(k) = sat\left(K_i x(k)\right) = sign\left(K_i x(k)\right)\min\left\{u_i^m, K_i x(k)\right\}$.

З метою згладжування небажаних ефектів, спричинених насиченістю керування, сформуємо компенсуючий сигнал, який моделює нелінійну зону нечутливості та визначається як різниця між сигналом керування та ефективним вихідним сигналом регулятора

DOI 10.15588/1607-3274-2023-2-15

$$\psi\left(Kx(k)\right) = Kx(k) - sat\left(Kx(k)\right). \tag{5}$$

Тоді рівняння замкнутої системи набуде вигляду

$$\begin{aligned} x(k+1) = \left(A + BK\right)x(k) + A_d x(k - d(k)) \\ - B\psi\left(Kx(k)\right). \end{aligned} \tag{6}$$

З урахуванням наведених вище відомостей в роботі вирішуються такі задачі.

1. Знайти матрицю зворотного зв'язку K, яка забезпечує асимптотичну (або експоненціальну) стійкість системи (6) з невизначеними, але обмеженими часовими затримками за станом (2) та нелінійними обмеженнями (3) керуючих сигналів типу насичення.

2. Знайти максимальне значення часової затримки за станом d^m, за якого може бути забезпечена асимптотична (або експоненціальна) стійкість замкнутої системи для заданого набору допустимих початкових умов.

2 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

В багатьох дослідженнях з теорії автоматичного управління доведено, що часові затримки є причиною погіршення продуктивності динамічних систем, а в деяких випадках можуть призводити до порушення умов стійкості. Часові затримки можуть мати місце як у неперервних, так і в дискретних системах і можуть бути постійними або змінюватись у часі, але дослідженням саме систем з дискретним часом автори приділяють набагато менше уваги.

В літературі, яка присвячена аналізу стійкості та методам стабілізації дискретних систем з часовими затримками за станом, окремий клас складають системи з постійною затримкою, тому що вони можуть бути перетворені до еквівалентних систем без затримки за допомогою методу розширення станів (див., наприклад, [6] та посилання там). Однак, такий підхід неможливо застосувати до систем з невідомими, але обмеженими часовими затримками.

Для систем із затримками, які змінюються в часі, але мають невелику тривалість, зазвичай, використовують підхід на основі дескрипторного перетворення моделі [7], що дозволяє за рахунок введення додаткових змінних, алгебраїчно пов'язаних зі змінними станів, отримати модель з новими властивостями, які не є характерними для звичайного способу опису динамічних систем.

Для дослідження систем з невизначеними часовими затримками або такими, що змінюються в часі, зазвичай використовують методи аналізу стійкості в часовій області, які базуються на теорії стійкості О. М. Ляпунова та її узагальненнях [8].

В першому з них використовують функціонали Ляпунова-Красовського, аргументом яких, поряд з компонентами вектора станів системи, є компоненти вектора станів з затримками. Метод ФЛК дозволив отримати критерій експоненціальної стійкості лінійних дискретних стаціонарних систем з часовими затримками, а саме існування додатно визначеного функціоналу Ляпунова-Красовського, який має від'ємну першу різницю за часом вздовж всіх траєкторій системи [9].

Друге узагальнення прямого методу Ляпунова на системи з часовими затримками запропонував Б. С. Разуміхін. У ньому для аналізу стійкості використовується ФЛ, а від'ємна визначеність її першої різниці перевіряється тільки на множині функцій, що задовольняють спеціальному обмеженню – умові Разуміхіна.

Головна ідея обох узагальнень полягає в отриманні достатніх умов стійкості систем з часовими затримками шляхом побудови відповідного ФЛК або відповідної ФЛ, спосіб вибору яких є визначальним при виведенні критеріїв стійкості. Однак, тільки після того, як дослідники стали застосовувати техніку лінійних матричних нерівностей, а також були розвинені обчислювальні методи, засновані на ідеях опуклої оптимізації [10], для реалізації яких були розроблені відповідні алгоритми та програмне забезпечення, вдалося спростити процес побудови ФЛК і ФЛ, що сприяло розвитку та поширенню застосування зазначених методів.

В даний час продовжують з'являтися нові результати досліджень (див., наприклад, [11–13]), які можна розділити на два класи. До першого належать критерії, в яких умови стійкості не залежать від величини затримки. До другого класу відносяться критерії, в яких використовується інформація про величину інтервалу, що описує невизначеність затримки. Зазвичай критерії, що залежать від величини затримки, є менш консервативними, оскільки в них пропонуються умови, які забезпечують стійкість замкнутих систем тільки за умови, що величина затримки не перевищує певного значення. Тоді як в критеріях, що не залежать від затримки, розглядаються умови стійкості системи при будь-якій величині затримки. Тому в останні роки увагу дослідників здебільшого приваблювало вивчення критеріїв стійкості для систем з інтервально невизначеними часовими затримками, які залежать від величини інтервалу. Варто відзначити, що більшість отриманих результатів відносяться до систем неперервного часу, водночас дискретним системам приділяється значно менше уваги.

3 МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ

Слідуючи [4], ведемо матрицю $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ та визначимо багатогранну множину

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left| \left(K_i - G_i\right) x \right| \le u_i^m,\ i = 1, \ldots, m \right\}. \tag{7}$$

Тоді щодо нелінійності $\psi\left(Kx(k)\right)$ в [4] доведено лему.

Лема 1. Розглянемо функцію $\psi\left(Kx\right)$, визначену в (5). Якщо $x \in S$, тоді співвідношення

DOI 10.15588/1607-3274-2023-2-15

$$\psi^{\mathrm{T}}(Kx)T\left[\psi(Kx)-Gx\right]\le 0 \tag{8}$$

виконується для будь-якої діагональної додатно визначеної матриці $T\in\mathbb{R}^{m\times m}$.

Результат, отриманий у Лемі 1, можна розглядати як узагальнення класичної секторної умови, що дозволить пізніше отримати умови стійкості замкнутої системи у формі ЛМН.

Виконаємо еквівалентне дескрипторне перетворення [14] моделі (6):

$$\begin{cases} x(k+1)=y(k),\\ 0=-y(k)+A_C x(k)+A_d x(k-d(k))-B\psi\left(Kx(k)\right), \end{cases} \tag{9}$$

де $A_C=A+BK$.

Підкреслимо, що для заданих початкових умов $x(k)=\phi(k),\ k\in\left[-d^m,...,0\right]$ $x(k)$ задовольняє рівнянню (6) для будь-якого $k\ge 0$, якщо $x(k)$ задовольняє рівнянням (9).

Тоді результат розв'язання задачі синтезу стабілізуючого лінійного статичного зворотного зв'язку подано у вигляді теореми.

Теорема 1. Для заданого цілого $d^m>0$ система (1) з невизначеними, але обмеженими часовими затримками за станом $d(k)$, які задовольняють умовам (2), та нелінійними обмеженнями (3) на керуючі впливи є робастно стійкою, якщо існують матриці $W_1=W_1^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $Z=Z^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $R=R^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $W_2,W_3\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $Y,N\in\mathbb{R}^{m\times n}$, які є рішенням оптимізаційної задачі

$$trace\left(W_1\right)+trace\left(Z\right)\to\min \tag{10}$$

при обмеженнях

$$\begin{bmatrix} -W_1 & -W_1A^{\mathrm{T}}-Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}-W_2^{\mathrm{T}}A_d^{\mathrm{T}} & 0_{n\times n} & N^{\mathrm{T}} & W_2^{\mathrm{T}} & W_1\\ * & -A_dW_3-W_3^{\mathrm{T}}A_d^{\mathrm{T}} & Z & BR & W_3^{\mathrm{T}} & 0_{n\times n}\\ * & * & -Z & 0_{n\times m} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n}\\ * & * & * & -2R & 0_{m\times n} & 0_{m\times n}\\ * & * & * & * & -W_1 & 0_{n\times n}\\ * & * & * & * & * & -\dfrac{1}{d^m+1}Z \end{bmatrix}\prec 0,$$
$$W_1\succ 0,\quad Z\succ 0,\quad R\succ 0. \tag{11}$$

При цьому закон керування визначається рівнянням

$$u(k)=YW_1^{-1}x(k). \tag{12}$$

Доведення. Введемо складений вектор $\xi(k)=col\left\{x(k),y(k),x(k-d(k)),\psi\left(Kx(k)\right)\right\}$ та побудуємо функціонал Ляпунова-Красовського

$$V(k)=V_1(k)+V_2(k)+V_3(k), \tag{13}$$

терми якого визначаються таким чином:

$$V_1(k)=\xi^{\mathrm{T}}(k)EP\xi(k),\quad V_2(k)=\sum_{i=k-d(k)}^{k-1}x^{\mathrm{T}}(i)Q\,x(i),$$
$$V_3(k)=\sum_{j=-d^m+2,}^{1}\ \sum_{l=k+j-1}^{k-1}x^{\mathrm{T}}(l)Q\,x(l),$$
$$E=block\ diag\left\{I_n,0_{(2n+m)\times(2n+m)}\right\},$$
$$P=\begin{bmatrix} P_1 & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times m}\\ P_2 & P_3 & 0_{n\times n} & 0_{n\times m}\\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & I_n & 0_{n\times m}\\ 0_{m\times n} & 0_{m\times n} & 0_{m\times n} & I_m \end{bmatrix}.$$

Перший терм у виразі (13) запишемо у вигляді

$$V_1(k)=\xi^{\mathrm{T}}(k)EP\xi(k)=x^{\mathrm{T}}(k)P_1\,x(k) \tag{14}$$

та обчислимо його першу різницю по k в силу системи (9)

$$\Delta V_1(k)=x^{\mathrm{T}}(k+1)P_1\,x(k+1)-x^{\mathrm{T}}(k)P_1\,x(k)=$$
$$=y^{\mathrm{T}}(k)P_1\,y(k)-2\left[x^{\mathrm{T}}(k)\quad 0\quad 0\quad 0\right]P\begin{bmatrix} \frac{1}{2}x(k)\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Замінивши перший 0 в правій частині (15) на вираз в (9), отримаємо

$$\Delta V_1(k)=\xi^{\mathrm{T}}(k)W\xi(k), \tag{16}$$

де

$$W=\begin{bmatrix} 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times m}\\ 0_{n\times n} & P_1 & 0_{n\times n} & 0_{n\times m}\\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times m}\\ 0_{m\times n} & 0_{m\times n} & 0_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{bmatrix}-$$
$$-P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}I_n & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times m}\\ A_C & A_d & -I_n & -B\\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times m}\\ 0_{m\times n} & 0_{m\times n} & 0_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \frac{1}{2}I_n & A_C^{\mathrm{T}} & 0_{n\times n} & 0_{n\times m}\\ 0_{n\times n} & A_d^{\mathrm{T}} & 0_{n\times n} & 0_{n\times m}\\ 0_{n\times n} & -I_n & 0_{n\times n} & 0_{n\times m}\\ 0_{m\times n} & -B^{\mathrm{T}} & 0_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{bmatrix}P.$$

Перша різниця по k другого терма в (13) дорівнює

DOI 10.15588/1607-3274-2023-2-15

$$\begin{aligned}\Delta V_2(k) &= \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k} x^{\mathrm T}(i)Q\,x(i) - \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} x^{\mathrm T}(i)Q\,x(i) = \\ &= \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k} x^{\mathrm T}(i)Q\,x(i) + x^{\mathrm T}(k)Q\,x(k) - \\ &- x^{\mathrm T}(k-d(k))Q\,x(k-d(k)) + \sum_{i=k+1}^{k-1} x^{\mathrm T}(i)Q\,x(i) - \\ &- \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^{\mathrm T}(i)Q\,x(i).\end{aligned} \tag{17}$$

Оскільки $d(k) \ge 0$, отримаємо

$$\sum_{i=k+1}^{k-1} x^{\mathrm T}(i)Q\,x(i) - \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^{\mathrm T}(i)Q\,x(i) \le 0 .$$

Остання нерівність разом з (17) дозволяє стверджувати

$$\begin{aligned}\Delta V_2(k) \le \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k} x^{\mathrm T}(i)Q\,x(i) + x^{\mathrm T}(k)Q\,x(k) - \\ - x^{\mathrm T}(k-d(k))Q\,x(k-d(k)).\end{aligned}$$

Для третього терма в (13) отримаємо

$$\begin{aligned}\Delta V_3(k) &= \sum_{j=-d^m+2}^{1} \left(x^{\mathrm T}(k)Q\,x(k) - x^{\mathrm T}(k+j-1)Q\,x(k+j-1)\right) = \\ &= d^m x^{\mathrm T}(k)Q\,x(k) - \sum_{i=k+1-d^m}^{k} x^{\mathrm T}(i)Q\,x(i).\end{aligned}$$

Оскільки $d(k) \le d^m$, отримаємо

$$\sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k} x^{\mathrm T}(i)Q\,x(i) - \sum_{i=k+1-d^m}^{k} x^{\mathrm T}(i)Q\,x(i) \le 0 .$$

Тоді випливає, що

$$\begin{aligned}\Delta V_2(k) + \Delta V_3(k) \le -d^m x^{\mathrm T}(k)Q\,x(k) - \\ - x^{\mathrm T}(k-d(k))Q\,x(k-d(k)).\end{aligned} \tag{18}$$

За умови, що $x(k) \in S$, з Леми 1 випливає нерівність

$$\Delta V(k) \le \Delta V(k) - 2\psi^{\mathrm T}(Kx)T\left[\psi(Kx) - Gx\right], \tag{19}$$

де T – деяка діагональна додатно визначена матриця.

Тоді з урахуванням (16), (18), (19) отримаємо

$$\Delta V(k) \le \xi^{\mathrm T}(k)\Psi\xi(k),$$

де

$$\Psi = \begin{bmatrix} (d^m+1)Q & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & G^{\mathrm T}T \\ 0_{n\times n} & P_1 & 0_{n\times n} & 0_{n\times m} \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & -Q & 0_{n\times m} \\ TG & 0_{m\times n} & 0_{m\times n} & -2T \end{bmatrix} -$$

$$-P^{\mathrm T}\begin{bmatrix} \frac12 I_n & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times m} \\ A_C & A_d & -I_n & -B \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & 0_{m\times n} & 0_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac12 I_n & A_C^{\mathrm T} & 0_{n\times n} & 0_{n\times m} \\ 0_{n\times n} & A_d^{\mathrm T} & 0_{n\times n} & 0_{n\times m} \\ 0_{n\times n} & -I_n & 0_{n\times n} & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & -B^{\mathrm T} & 0_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{bmatrix} P.$$

Отже, достатньою умовою стійкості замкнутої системи (6) є виконання матричної нерівності

$$\Psi \prec 0 . \tag{20}$$

Перепишемо нерівність (20) у вигляді

$$\begin{bmatrix} \Lambda & -A_C P_3 - P_2 A_d & P_2^{\mathrm T} & G^{\mathrm T}T + P_2^{\mathrm T}B \\ * & P_1 - P_3^{\mathrm T}A_d - A_d^{\mathrm T}P_3 & P_3^{\mathrm T} & P_3^{\mathrm T}B \\ * & * & -Q & 0_{n\times m} \\ * & * & * & -2T \end{bmatrix} \prec 0 , \tag{21}$$

де $\Lambda = (d^m+1)Q - P_1 - A_C^{\mathrm T}P_2 - P_2^{\mathrm T}A_C$.

Для того, щоб отримати лінійну матричну нерівність, введемо обернену матрицю P^{-1}. Не важко переконатись у (21), що $P_3 + P_3^{\mathrm T} \prec 0$. Оскільки $P_1 \succ 0$, тоді матриця P є неособливою. Визначимо

$$P^{-1} = W = \begin{bmatrix} W_1 & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times m} \\ W_2 & W_3 & 0_{n\times n} & 0_{n\times m} \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & I_n & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & 0_{m\times n} & 0_{m\times n} & I_m \end{bmatrix}.$$

Виконавши конгруентне перетворення матриці нерівності (21) за допомогою матриці $W^{\mathrm T}$, отримаємо еквівалентну нерівність

$$\begin{bmatrix} (d^m+1)W_1QW_1 - W_1 & -W_1A_C^{\mathrm T} - W_2^{\mathrm T}A_d^{\mathrm T} & 0_{n\times n} & W_1G^{\mathrm T}T \\ * & -A_dW_3 - W_3^{\mathrm T}A_d^{\mathrm T} & I_n & B \\ * & * & -Q & 0_{n\times m} \\ * & * & * & -2T \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} W_2^{\mathrm T} \\ W_3^{\mathrm T} \\ 0_{n\times n} \\ 0_{m\times n} \end{bmatrix} P_1 \left[W_2 \;\; W_3 \;\; 0_{n\times n} \;\; 0_{n\times m}\right] \prec 0.$$

Двічі застосувавши доповнення Шура, подамо матрицю нерівності у вигляді

DOI 10.15588/1607-3274-2023-2-15

$$\begin{bmatrix} -W_1 & -W_1 A_C^{\mathrm{T}} - W_2^{\mathrm{T}} A_d^{\mathrm{T}} & 0_{n\times n} & W_1 G^{\mathrm{T}} T & W_2^{\mathrm{T}} & W_1 \\ * & -A_d W_3 - W_3^{\mathrm{T}} A_d^{\mathrm{T}} & I_n & B & W_3^{\mathrm{T}} & 0_{n\times n} \\ * & * & -Q & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} \\ * & * & * & -2T & 0_{m\times n} & 0_{m\times n} \\ * & * & * & * & -W_1 & 0_{n\times n} \\ * & * & * & * & * & -\dfrac{1}{d^m+1} Q^{-1} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Введемо позначення $Y = KW_1$, $Z = Q^{-1}$, $R = T^{-1}$, $N = GW_1$. Тоді матриця коефіцієнтів зворотного зв'язку відновлюється таким чином $K = YW_1^{-1}$. Виконавши конгруентне перетворення матриці (22) за допомогою блоково-діагональної матриці $diag\left\{I_{2n}, Q^{-1}, T^{-1}, I_{2n}\right\}$ та застосувавши введені матричні змінні, отримаємо ЛМН (11).

Для побудови оптимального керування в сенсі критерія, який буде обрано далі, скористаємось методом інваріантних еліпсоїдів [15, 16]. Еліпсоїд, який описується нерівністю

$$\varepsilon(W_1) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x^{\mathrm{T}}(k) W_1^{-1} x(k) \le 1\right\} \quad (23)$$

називають інваріантним за станом для системи (6), а також еквівалентної дескрипторної системи (9), якщо будь-яка траєкторія системи, яка розпочалась в еліпсоїді, залишається в ньому для будь-якого моменту часу $k \ge 0$.

Визначимо по аналогії сімейство еліпсоїдів, які є інваріантними за станом із затримками для досліджуваної системи

$$\varepsilon(Z) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x^{\mathrm{T}}(k-i) Z^{-1} x(k-i) \le 1, \; i = 1, 2, ..., d^m\right\}. \quad (24)$$

Тоді сума еліпсоїда (23) та сімейства еліпсоїдів (24), яка розглядається в сенсі еліпсоїдальної апроксимації по мінімуму об'єму, може розглядатись як апроксимація множини досяжності замкнутої системи (6), тобто дозволяє характеризувати вплив часових затримок на траєкторію системи.

Третій терм ФЛК (13) перепишемо у вигляді

$$V_3(k) = \sum_{i=1}^{d^m - 1} (d^m - i) x^{\mathrm{T}}(k-i) Q x(k-i). \quad (25)$$

Результати порівняння виразів (14) та (23), а також (25) та (24) дозволяють стверджувати, що якщо виконуються умови

$$P_1 = W_1^{-1}, \quad Q = Z^{-1}, \quad (26)$$

тоді сума еліпсоїда (23) та сімейства еліпсоїдів (24) є множиною, яка виступає верхньою оцінкою множини рівня ФЛК (13).

Отже, на основі використання MIE задача синтезу закону керування зводиться до побудови регулятора, який забезпечує мінімізацію за певним критерієм суми інваріантних еліпсоїдів при заданих обмеженнях. В якості критерію в роботі обрано суму квадратів напівосей еліпсоїдів, тобто суму сліда матриці W_1 та сліда матриці Z.

Таким чином, приходимо до оптимізаційної задачі (10) при обмеженнях, які подано у вигляді лінійних матричних нерівностей (11). ■

Зауваження 1. Оптимізаційна задача (10) при обмеженнях (11) є задачею напіввизначеного програмування, яка вирішується чисельно за допомогою відповідних вільно розповсюджуваних програмних пакетів на основі MATLAB.

Теорема 1 визначає залежну від величини затримки умову робастної стабілізації, подану в термінах розв'язуваності ЛМН, для дискретної лінійної динамічної системи з невідомими, але обмеженими часовими затримками за станом та нелінійними обмеженнями на амплітуду керуючих дій у вигляді насичення.

Перш ніж приступати до вирішення задачі синтезу робастного стабілізуючого управління, доцільно розв'язати задачу обчислення максимальної величини затримки за станом d^m, за якої виконуються умови асимптотичної (або експоненціальної) стійкості замкнутої системи.

Розглянемо систему (1) з невизначеними, але обмеженими часовими затримками за станом (2) та нелінійними обмеженнями (3) на керуючі впливи, і нехай скалярна величина $\hat{d}^m = 1/\alpha - 1$ отримана в результаті вирішення оптимізаційної задачі

$$\alpha \to \min \quad (27)$$

при обмеженнях

$$\begin{bmatrix} -W_1 & -W_1 A^{\mathrm{T}} - Y^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} - W_2^{\mathrm{T}} A_d^{\mathrm{T}} & 0_{n\times n} & N^{\mathrm{T}} & W_2^{\mathrm{T}} & W_1 \\ * & -A_d W_3 - W_3^{\mathrm{T}} A_d^{\mathrm{T}} & Z & BR & W_3^{\mathrm{T}} & 0_{n\times n} \\ * & * & -Z & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} \\ * & * & * & -2R & 0_{m\times n} & 0_{m\times n} \\ * & * & * & * & -W_1 & 0_{n\times n} \\ * & * & * & * & * & -\alpha Z \end{bmatrix} \prec 0, \quad (28)$$
$$W_1 \succ 0, \; Z \succ 0, \; R \succ 0, \; 0 < \alpha < 1,$$

де оптимізація виконується за матричними змінними $W_1 = W_1^{\mathrm{T}}$, $Z = Z^{\mathrm{T}}$, $R = R^{\mathrm{T}}$, W_2, W_3, Y, N.

Тоді при виконанні умови $d(k) \le \hat{d}^m$ для досліджуваної системи існує стабілізуючий регулятор у вигляді статичного зворотного зв'язку за станом (12).

Пошук рішення задачі (27) при обмеженнях (28) ускладнюється тим, що перша з нерівностей (28) є

DOI 10.15588/1607-3274-2023-2-15

білінійною матричною нерівністю, оскільки містить добуток скалярної змінної α та матричної змінної Z . Тому для обчислення максимальної величини затримки за станом запропоновано ітераційний алгоритм.

1. Ініціалізація:

– для заданої величини d^m обчислити початкове значення змінної $\alpha_{(0)} = 1/(d^m + 1)$;

– встановити максимальну кількість ітерацій алгоритма $iter$ та величину помилки δ ;

– встановити номер ітерації $j \leftarrow 0$.

2. Встановити $j \leftarrow j+1$. Знайти значення матриць $W_{1(j)}, W_{2(j)}, W_{3(j)}, Z_{(j)}, Y_{(j)}, N_{(j)}, R_{(j)}$ шляхом розв'язання задачі (10) при обмеженнях (11), де $d^m = \dfrac{1}{\alpha} - 1$, використовуючи значення $\alpha_{(j-1)}$.

3. Знайти значення змінної $\alpha_{(j)}$ шляхом розв'язання задачі (27) при обмеженнях (28), використовуючи матрицю $Z_{(j)}$, отриману на кроці 2.

4. Перевірити виконання умов зупинки $j \geq iter$ або $\left|\alpha_{(j)} - \alpha_{(j-1)}\right| \leq \delta$ та, якщо жодна з них не виконана, повторити кроки 2–4. В іншому випадку зупинити алгоритм.

Зауваження 2. Запропонований алгоритм, строго кажучи, не гарантує збіжності рішення. Однак, подібний підхід добре зарекомендував себе при чисельному моделюванні та застосовується у багатьох практичних додатках [17].

4 ЕКСПЕРИМЕНТИ

Для ілюстрації ефективності отриманих теоретичних результатів розглянемо чисельний приклад, який наведено в [12]. Динамічна система описується моделлю (1) з такими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,1 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{matrix} d^m = 10, \\ u^m = 3. \end{matrix}$$

Встановивши $d(k) \equiv 0$ в (1), легко побачити, що необхідною умовою стійкості системи є виконання нерівності $\left|\lambda(A + A_d)\right| < 1$. В даному випадку система є нестійкою, оскільки $\lambda(A + A_d) = -1,445 \pm i \cdot 0,288$.

В результаті вирішення задачі (10) при обмеженнях (11) за допомогою вільно розповсюджуваного пакету cvx [18] отримано:

$$W_1 = 10^{-14} \begin{bmatrix} 2,657 & 0,001 \\ 0,001 & 1,287 \end{bmatrix}, W_2 = 10^{-15} \begin{bmatrix} 0,011 & 0,709 \\ 0,033 & 5,296 \end{bmatrix},$$

$$W_3 = 10^{-14} \begin{bmatrix} 0,158 & 0,003 \\ 1,128 & -0,383 \end{bmatrix}, Z = 10^{-14} \begin{bmatrix} 0,022 & -0,051 \\ -0,051 & -3,049 \end{bmatrix},$$

$$Y = 10^{-14} \begin{bmatrix} 5,311 & 3,873 \end{bmatrix}, \quad R = 1,153 \cdot 10^{-13}.$$

Тоді для будь-яких початкових умов $x(0) \in S$, де багатогранна множина, обчислена на підставі (7) та отриманих результатів, має вигляд $S = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \left|x_1\right| \leq 2,5;\ \left|x_2\right| \leq 2,007\right\}$, регулятор (12) з матрицею $K = \begin{bmatrix} 1,998 & 3,008 \end{bmatrix}$ стабілізує досліджувану систему, оскільки отримано $\lambda(A + BK + A_d) = 0,059 \pm i \cdot 0,016$.

Обчислимо початкове значення змінної $\alpha_{(0)} = 1/(d^m + 1) = 0,091$ та застосуємо запропонований ітераційний алгоритм. Після зупинення алгоритму на третій ітерації отримано максимальне допустиме значення часової затримки за станом для досліджуваної системи $\hat{d}^m = 99$.

5 РЕЗУЛЬТАТИ

Оберемо початкові умови $x^{\mathrm{T}}(0) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}$ та змоделюємо перехідний процес в дискретній системі із затримками за станом, які змінюються в часі. Величина затримки $d(k), k = 0,1,2,...$ на кожному кроці генерувалась випадковим чином так, щоб виконувалась вимога (2). Отримані результати представлено на рис. 1 та рис. 2.

6 ОБГОВОРЕННЯ

Аналізуючи отримані результати моделювання, можна побачити, що запропонований підхід дозволяє отримати достатньо високі результати. Розглянута дискретна система з невідомими, але обмеженими затримками за станом та нелінійними обмеженнями на керуючі впливи є стійкою при застосуванні запропонованого метода синтезу статичного зворотного зв'язку за станом.

DOI 10.15588/1607-3274-2023-2-15

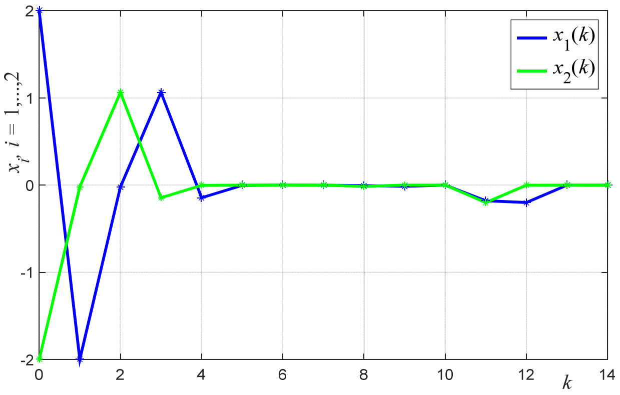

Рисунок 1 – Графік зміни станів $x_1(k)$ та $x_2(k)$

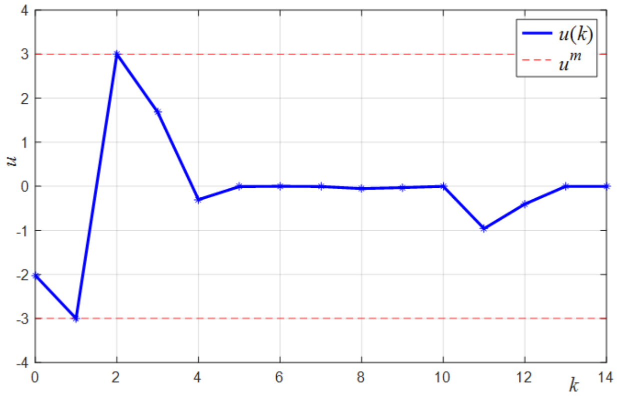

Рисунок 2 – Графік зміни керуючих впливів $u(k)$

На рис. 1 видно, що після переходу системи на 5-му кроці до стану рівноваги на 11–12 кроках спостерігаються ненульові значення станів, що, очевидно, є результатом впливу станів із затримками. Але дія регулятора впродовж двох кроків повертає систему до стану рівноваги.

На рис. 2 видно, що на 1-му та 2-му кроках моделювання величини керуючих дій обмежуються наявною вимогою $|u(k)| \le u^m = 3$, але це не призводить до порушення умов стійкості замкнутої системи.

ВИСНОВКИ

Запропоновано підхід, який дозволяє поширити метод інваріантних еліпсоїдів на дискретні динамічні системи з невідомими, але обмеженими часовими затримками за станом для вирішення задачі стабілізації системи за допомогою статичного зворотного зв'язку за станом на основі застосування методу функціоналів Ляпунова-Красовського. Результати чисельного моделювання підтверджують ефективність запропонованого підходу в умовах наявності нелінійних обмежень на керуючі впливи у вигляді насичення.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у поширенні методу інваріантних еліпсоїдів на дискретні динамічні системи з невідомими, але обмеженими часовими затримками за станом.

В роботі вперше запропоновано ітераційний алгоритм для вирішення білінійної матричної нерівності з метою обчислення максимальної величини часової затримки.

Практичне значення: результати чисельного моделювання дозволяють рекомендувати запропонований підхід для використання на практиці з метою аналізу стійкості та синтезу стабілізуючих регуляторів для дискретних динамічних систем з часовими затримками за станом.

Перспективи подальших досліджень полягають в можливостях поширення запропонованого підходу на дискретні динамічні системи з часовими затримками по управлінню, а також в умовах дії невідомих, але обмежених зовнішніх збурень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Mahmoud M. S. Recent Progress in Stability and Stabilization of Systems with Time-Delays / M. S. Mahmoud // Mathematical Problems in Engineering. – 2017. – Article ID 7354654. – 25 p. DOI: 10.1155/2017/7354654
2. Stabilization of Neutral Systems with Saturating Control Inputs / [J. M. Gomes da Silva Jr., A. Seuret, E. Fridman, J.-P. Richard] // International Journal of Systems Science. – 2010. – Vol. 42(7). – P. 1093–1103. DOI: 10.1080/00207720903353575
3. Zhang Y. Design of Robust Output Feedback Guaranteed Cost Control for a Class of Nonlinear Discrete-Time Systems / Y. Zhang, Y. Dong, T. Li // International Journal of Engineering Mathematics. – 2014. – Article ID 628041. – 9 p. DOI: 10.1155/2014/628041
4. Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators / [S. Tarbouriech, G. Garcia, J. M. Gomes da Silva Jr., I. Queinnec]. – Springer Science & Business Media, 2011. – 451 p. DOI: 10.1007/978-0-85729-941-3
5. Delay Dependent Anti-windup Synthesis for Time-varying Delay Systems with Saturating Actuators / [N. El Fezazi, F. El Haoussi, E. H. Tissir, F. Tadeo] // International Journal of Computer Applications. – 2015. – Vol. 111, No. 1. DOI: 10.5120/19499-1107
6. Chang Y.-C. LMI approach to static output feedback simultaneous stabilization of discrete-time interval systems with time delay / Y.-C. Chang, S.-F. Su, S.-S. Chen // Proceedings of International Conference on Machine Learning and Cybernetics. – Shanghai, 2004. – Vol. 7. – P. 4144–4149. DOI: 10.1109/ICMLC.2004.1384566
7. Lyubchyk L. M. Consensus control of multi-agent systems with input delays: a descriptor model approach / L. M. Lyubchyk, Y. I. Dorofieiev // Mathematical Modeling and Computing. – 2019. – Vol. 6, No. 2. – P. 333–343. DOI: 10.23939/mmc2019.02.333
8. Fridman E. Tutorial on Lyapunov-based methods for Time-Delay Systems / E. Fridman // European Journal of Control. – 2014. DOI: 10.1016/j.ejcon.2014.10.001
9. Yu M. Robust stabilization of discrete-time systems with time-varying delays / M. Yu, L. Wang, T. Chu // Proceedings of the American Control Conference: Portland, USA, June 2005. – Vol. 5. – P. 3435–3440. DOI: 10.1109/ACC.2005.1470503
10. Leite V. J. S. A convex approach for robust state-feedback control of discrete-time systems with state delay / V. J. S. Leite, S. Tarbouriech, P. L. D. Peres // Proceedings of the American Control Conference (AAC '04): Boston, Mass, USA, June 2004. – Vol. 3. – P. 2870–2875. DOI: 10.1109/ACC.2004.182543

DOI 10.15588/1607-3274-2023-2-15

11. Alexandrova I. A new LKF approach to stability analysis of linear systems with uncertain delays / I. Alexandrova, A. Zhabko // Automatica. – 2018. – Vol. 91. – P. 173–178. DOI: 10.1016/j.automatica.2018.01.012
12. Zhou B. Improved Razumikhin and Krasovskii approaches for discrete-time time-varying time-delay systems / B. Zhou // Automatica. – 2018. – Vol. 91. – P. 256–269. DOI: 10.1016/j.automatica.2018.01.004
13. Lin H. New Lyapunov-Krasovskii Functional for Stability Analysis of Linear Systems with Time-Varying Delay / H. Lin, H. Zeng, W. Wang // Journal of Systems Science and Complexity. – 2021. – Vol. 34. – P. 632–641. DOI: 10.1007/s11424-020-9179-8
14. Boukas E.-K. Discrete-time systems with time-varying time delay: stability and stabilizability / E.-K. Boukas // Mathematical Problems in Engineering. – 2006. – Article ID 42489. – 10 p. DOI: 10.1155/MPE/2006/42489
15. Poznyak A. Attractive ellipsoids in robust control / A. Poznyak, A. Polyakov, V. Azhmyakov. – Basel : Springer International Publishing, 2014. – 348 p. DOI: 10.1007/978-3-319-09210-2
16. Rotondo D. On the optimization of actuator saturation limits for LTI systems: an LMI-based invariant ellipsoid approach / D. Rotondo, G. Rizzello // IFAC-PapersOnLine. – 2020. – Vol. 53, No. 2. – P. 5567–5572. DOI: 10.1016/j.ifacol.2020.12.1568
17. Mulder E. Multivariable anti-windup controller synthesis using bilinear matrix inequalities / E. Mulder, M. Kothare, M. Morari // European Journal of Control. – 2000. – Vol. 7, No. 5. – P. 455–464. DOI: 10.1016/S0947-3580(00) 71106-X
18. Grant M. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 2.0 [Electronic resource] / M. Grant, S. Boyd // Mode of access: URL: http://cvxr.com/cvx. – Last access: 12.02.23.

Стаття надійшла до редакції 10.03.2023.
Після доробки 17.05.2023.

UDC 519.71

STABILIZATION OF DISCRETE-TIME SYSTEMS WITH STATE-DELAYS AND SATURATING CONTROL INPUTS

Dorofieiev Yu. I. – Dr. Sc., Head of the Department of System Analysis and Information Technologies, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv, Ukraine.

Lyubchyk L. M. – Dr. Sc., Professor at the Department of Computer Mathematics and Data Analysis, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv, Ukraine.

Melnikov O. S. – PhD, Assosiated Professor at the Department of System Analysis and Information Technologies, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv, Ukraine.

ABSTRACT

Context. The presence of time delays occurs in many complex dynamical systems, particularly in the areas of modern communication and information technologies, such as the problem of stabilizing networked control systems and high-speed communication networks. In many cases, time-delays lead to a decrease in the efficiency of such systems and even to the loss of stability. In the last decade, many interesting solutions using the Lyapunov-Krasovskii functional have been proposed for stability analysis and synthesis of a stabilizing regulator for discrete-time dynamic systems with unknown but bounded state-delays. The presence of nonlinear constraints on the amplitude of controls such as saturation further complicates this problem and requires the development of new approaches and methods.

Objective. The purpose of this study is to develop a procedure for calculating the control gain matrix of state feedback that ensures the asymptotic stability of the analyzed system, as well as a procedure for calculating the maximum permissible value of the state-delay under which the stability of the closed-loop system can be ensured for a given set of admissible initial conditions.

Method. The paper uses the method of descriptor transformation of the model of a closed-loop system and extends the invariant ellipsoids method to systems with unknown but bounded state-delays. The application of the Lyapunov-Krasovskii functional and the technique of linear matrix inequalities made it possible to reduce the problem of calculating the control gain matrix to the problem of semi-definite programming, which can be solved numerically. An iterative algorithm for solving the bilinear matrix inequality is proposed for calculating the maximum permissible value of the time-delay.

Results. The results of numerical modeling confirm the effectiveness of the proposed approach in the problems of stabilizing discrete-time systems under the conditions of state-delays and nonlinear constraints on controls, which allows to recommend the proposed method for practical use for the problem of stability analysis and synthesis of stabilizing regulator, as well as for calculating the maximum permissible value of time-delay.

Conclusions. An approach is proposed that allows extending the invariant ellipsoids method to discrete-time dynamic systems with unknown but bounded state-delays for solving the problem of system stabilization using static state feedback based on the application of the Lyapunov-Krasovskii functional. The results of numerical modeling confirm the effectiveness of the proposed approach in the presence of the saturation type nonlinear constraints on the control signals.

KEYWORDS: stabilization, time-delay, saturating control, Lyapunov-Krasovskii functional, invariant ellipsoids method, linear matrix inequality.

REFERENCES

1. Mahmoud M. S. Recent Progress in Stability and Stabilization of Systems with Time-Delays, *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, Article ID 7354654, 25 p. DOI: 10.1155/2017/7354654
2. Gomes da Silva Jr. J. M., Seuret A., Fridman E., Richard J.-P. Stabilization of Neutral Systems with Saturating Control Inputs, *International Journal of Systems Science*, 2010, Vol. 42(7), pp. 1093–1103. DOI: 10.1080/00207720903353575

DOI 10.15588/1607-3274-2023-2-15

3. Zhang Y., Dong Y., Li T. Design of Robust Output Feedback Guaranteed Cost Control for a Class of Nonlinear Discrete-Time Systems, *International Journal of Engineering Mathematics*, 2014, Article ID 628041, 9 p. DOI: 10.1155/2014/628041
4. Tarbouriech S., Garcia G., Gomes da Silva Jr. J. M., Queinnec I. Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators. Springer Science & Business Media, 2011, 451 p. DOI: 10.1007/978-0-85729-941-3
5. El Fezazi N., El Haoussi F., Tissir E. H., Tadeo F. Delay Dependent Anti-windup Synthesis for Time-varying Delay Systems with Saturating Actuators, *International Journal of Computer Applications*, 2015, Vol. 111, No. 1. DOI: 10.5120/19499-1107
6. Chang Y.-C., Su S.-F., Chen S.-S. LMI approach to static output feedback simultaneous stabilization of discrete-time interval systems with time delay, *Proceedings of International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, Shanghai, 2004, Vol. 7, pp. 4144–4149. DOI: 10.1109/ICMLC.2004.1384566
7. Lyubchyk L. M., Dorofieiev Y. I. Consensus control of multi-agent systems with input delays: a descriptor model approach, *Mathematical Modeling and Computing*, 2019, Vol. 6, No. 2, pp. 333–343. DOI: 10.23939/mmc2019.02.333
8. Fridman E. Tutorial on Lyapunov-based methods for Time-Delay Systems, *European Journal of Control*, 2014. DOI: 10.1016/j.ejcon.2014.10.001
9. Yu M., Wang L., Chu T. Robust stabilization of discrete-time systems with time-varying delays, *Proceedings of the American Control Conference*, Portland, USA, June 2005, Vol. 5, pp. 3435–3440. DOI: 10.1109/ACC.2005.1470503
10. Leite V. J. S., Tarbouriech S., Peres P. L. D. A convex approach for robust state-feedback control of discrete-time systems with state delay, *Proceedings of the American Control Conference (AAC ’04)*, Boston, Mass, USA, June 2004, Vol. 3, pp. 2870–2875. DOI: 10.1109/ACC.2004.182543
11. Alexandrova I., Zhabko A. A new LKF approach to stability analysis of linear systems with uncertain delays, *Automatica*, 2018, Vol. 91, pp. 173–178. DOI: 10.1016/j.automatica. 2018.01.012
12. Zhou B. Improved Razumikhin and Krasovskii approaches for discrete-time time-varying time-delay systems, *Automatica*, 2018, Vol. 91, pp. 256–269. DOI: 10.1016/j.automatica. 2018.01.004
13. Lin H., Zeng H., Wang W. New Lyapunov-Krasovskii Functional for Stability Analysis of Linear Systems with Time-Varying Delay, *Journal of Systems Science and Complexity*, 2021, Vol. 34, pp. 632–641. DOI: 10.1007/s11424-020-9179-8
14. Boukas E.-K. Discrete-time systems with time-varying time delay: stability and stabilizability, *Mathematical Problems in Engineering*, 2006, Article ID 42489, 10 p. DOI: 10.1155/MPE/2006/42489
15. Poznyak A., Polyakov A., Azhmyakov V. Attractive ellipsoids in robust control. Basel, Springer International Publishing, 2014, 348 p. DOI: 10.1007/978-3-319-09210-2
16. Rotondo D., Rizzello G. On the optimization of actuator saturation limits for LTI systems: an LMI-based invariant ellipsoid approach, *IFAC-PapersOnLine*, 2020, Vol. 53, No. 2, pp. 5567–5572. DOI: 10.1016/j.ifacol.2020.12.1568
17. Mulder E., Kothare M., Morari M. Multivariable antiwindup controller synthesis using bilinear matrix inequalities, *European Journal of Control*, 2000, Vol. 7, No. 5, pp. 455–464. DOI: 10.1016/S0947-3580(00) 71106-X
18. Grant M., Boyd S. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 2.0 [Electronic resource], Mode of access: URL: http://cvxr.com/cvx, Last access: 12.02.23.

DOI 10.15588/1607-3274-2023-2-15