

УДК 534.121.1

Петрищев О. Н.<sup>1</sup>, Шарапов В. М.<sup>2</sup>, Сотула Ж. В.<sup>3</sup>, Базило К. В.<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры акустики и акустоэлектроники Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт», Киев, Украина

<sup>2</sup>Д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой компьютеризированных и информационных технологий в приборостроении Черкасского государственного технологического университета, Черкассы, Украина

<sup>3</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры компьютеризированных и информационных технологий в приборостроении Черкасского государственного технологического университета, Черкассы, Украина

<sup>4</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры компьютеризированных и информационных технологий в приборостроении Черкасского государственного технологического университета, Черкассы, Украина

## ПРИНЦИПЫ РАСЧЕТА ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ С ЧАСТИЧНО ЭЛЕКТРОДИРОВАННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Решена актуальная задача определения вычислительных процедур, которые позволяют выполнить оценку параметров напряженно-деформированного состояния и передаточных характеристик пьезоэлектрических элементов с частичным электродированием поверхностей. Предложена последовательность вычислительных процедур, которая позволяет при расчете передаточных характеристик учитывать полный набор физико-механических и геометрических параметров пьезоэлектрического элемента и конечное значение выходного электрического импеданса генератора электрических сигналов. Предложена методика, которая позволяет выполнить адекватную реальной ситуации оценку эффекта связности упругих и электрических полей в случае их произвольного распределения в объеме колеблющегося пьезоэлектрического элемента. Сформулированный полный набор граничных задач технической электродинамики и динамической теории упругости представляет собой математическое содержание энергосилового метода анализа физического состояния пьезоэлектрических элементов в режиме вынужденных колебаний под действием внешнего источника электрической энергии. Предложенная последовательность вычислительных процедур может быть рекомендована в качестве основы расчета характеристик пьезоэлектрических элементов с частичным электродированием поверхности и микроэлектромеханических структур.

: частичное электродирование поверхностей пьезоэлемента, микроэлектромеханические структуры.

МЭМС – микроэлектромеханические структуры;

$\chi_{ij}^E$  – матрица диэлектрических проницаемостей;

$e_{k\beta}$  – матрица пьезоэлектрических модулей;

$c_{\beta\lambda}^E$  – матрица модулей упругости;

$U_0$  – амплитуда электрического потенциала на электродированной поверхности;

$U_r$  – амплитудное значение электрического потенциала на выходе генератора;

$\omega$  – круговая частота;

$t$  – время;

$\vec{B}^*(x_k)$  – амплитуда гармонически изменяющегося во времени вектора индукции;

$\vec{H}^*(x_k)$  – амплитуда гармонически изменяющегося во времени вектора напряженности магнитного поля;

$\vec{J}^*(x_k)$  – амплитуда вектора поверхностной плотности тока проводимости;

$\rho_0$  – плотность деформируемого твердого тела;

$C^E(\omega, \Pi)$  – динамическая электрическая емкость пьезоэлектрического элемента;

$I$  – амплитуда электрического тока в проводниках, которые подключаются к электродированным участкам поверхности пьезоэлектрического элемента;

$Z_{эл}(\omega)$  – электрический импеданс пьезоэлектрического элемента;

$\chi_{33}^E$  – компонент тензора диэлектрической проницаемости в направлении электрической поляризации;

$\chi_{11}^E$  – компонент тензора диэлектрической проницаемости в любом направлении на плоскости, которая перпендикулярна направлению электрической поляризации материала диска.

В 1986 г. [1] впервые на страницах научной периодики появилась аббревиатура MEMS, которая заменяла длинное и долго произносимое словосочетание МЭМС. В настоящее время ведущие фирмы – изготовители радиоэлектронных компонентов серийно выпускают достаточно обширный перечень элементов, в состав которых включены различные МЭМС. Это, прежде всего, различные акселерометры, которые выпускаются миллионными тиражами, резонаторы и реализованные на их основе фильтры электрических сигналов, трансформаторы и другие микроминиатюрные электромеханические системы.

Технологии изготовления МЭМС в настоящее время принято называть микросистемными технологиями. МЭМС или, что то же самое, пьезоэлектрические элементы, изготовленные с помощью микросистемных технологий, имеют много общего с обычными, т. е. не микроскопических размеров, пьезоэлектрическими элементами, которые изготавливаются из пьезокерамики. Для реализации тех или иных функциональных возможностей в МЭМС используются поликристаллические сегнетоэлектрики, которые поляризуются постоянным электрическим полем в заданном направлении. Обычные пьезоэлектрические элементы изготавливаются из пьезокерамики, которая изначально является поликристаллическим сегнетоэлектриком, который на последнем технологическом этапе изготовления пьезоэлектрического изделия поляризуется постоянным электрическим полем заданной ориентации. Отличительной чертой между МЭМС и обычными пьезоэлементами является способ электродирования рабочих поверхностей. Обычные пьезоэлектрические элементы имеют, как правило, сплошное электродирование поверхности. В некоторых

специальных случаях электроды разделяются (разрезаются) на отдельные области, которые не имеют между собой гальванической связи. В МЭМС, как правило, используется частичное электродирование рабочих поверхностей, когда только часть поверхности поляризованного сегнетоэлектрика покрывается металлической пленкой. Этот способ электродирования позволяет возбуждать в объеме МЭМС несколько типов упругих колебаний. Манипулируя геометрическими параметрами электродированных поверхностей, можно управлять энергетикой колебательных процессов в МЭМС, т. е. создавать условия, когда один тип колебательных движений будет доминировать над остальными по амплитуде вектора упругих смещений материальных частиц.

Целью данной работы являлась разработка вычислительных процедур, которые позволяют выполнить оценку параметров напряженно-деформированного состояния и передаточных характеристик пьезоэлектрических элементов с частичным электродированием поверхностей.

1

Рассмотрим пьезоэлектрический элемент, для определенности в форме пластинки, ограниченной произвольным криволинейным контуром К (рис. 1). Пластинка располагается в декартовой системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  таким образом, что начало системы находится на срединной поверхности пластинки.

Для упрощения последующих рассуждений, будем полагать, что пластинка выполнена из поляризованной по толщине, т. е. в направлении оси  $Ox_3$ , пьезокерамики. Будем также полагать, что поляризация выполнена постоянным электрическим полем, аксиальный компонент вектора напряженности которого имел постоянное значение в любой точке объема пластинки. Это позволяет утверждать, что материальные константы пьезоэлектрической пластинки (компоненты тензоров диэлектрической проницаемости, пьезоэлектрических модулей и модулей упругости) не зависят от координат точки внутри объема пластинки и задаются матрицами следующего вида:

а) матрица диэлектрических проницаемостей  $\chi_{ij}^\epsilon$ , которые экспериментально определяются в режиме постоянства (равенства нулю) упругих деформаций (верхний символ  $\epsilon$ ):

$$|\chi_{ij}^\epsilon| = \begin{vmatrix} \chi_{11}^\epsilon & 0 & 0 \\ & \chi_{22}^\epsilon & 0 \\ & & \chi_{33}^\epsilon \end{vmatrix}, \quad (1)$$

где  $\chi_{11}^\epsilon = \chi_{22}^\epsilon \neq \chi_{33}^\epsilon$ ;

б) матрица пьезоэлектрических модулей  $e_{k\beta}$  ( $k = 1, 2, 3$ ;  $\beta = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  – индекс Фойгта):

$$|e_{k\beta}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (2)$$

где  $e_{31} = e_{32} \neq e_{33}$ ;  $e_{15} = e_{24} = (e_{33} - e_{31})/2$ ;

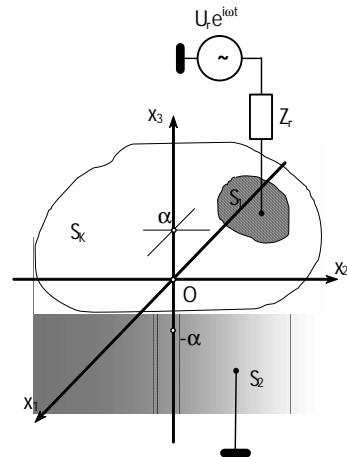


Рисунок 1 – Пьезоэлектрический элемент с частичным электродированием поверхностей  $x_3 = \pm \alpha$

в) матрица модулей упругости  $c_{\beta\lambda}^E$ , которые экспериментально определяются в режиме постоянства (равенства нулю) напряженности электрического поля (верхний символ  $E$ ),  $((\beta, \lambda) = 1, \dots, 6$  – индексы Фойгта):

$$|c_{\beta\lambda}^E| = \begin{vmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22}^E & c_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44}^E & 0 & 0 \\ & & & & c_{55}^E & 0 \\ & & & & & c_{66}^E \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где  $c_{11}^E = c_{22}^E \neq c_{33}^E$ ;  $c_{12}^E = c_{13}^E = c_{23}^E$ ;  $c_{44}^E = c_{55}^E$ ;  $c_{66}^E = (c_{11}^E - c_{12}^E)/2$ .

Предположим, что на верхней ( $x_3 = \alpha$ ) и нижней ( $x_3 = -\alpha$ ) поверхностях пьезоэлектрической пластинки имеются произвольно расположенные области  $S_1$  и  $S_2$ , соответственно (рис. 1), которые покрыты тонким слоем металла, т. е. электродированы. При этом, в общем случае  $S_1 \neq S_2 \neq S_K$ , где  $S_K$  – поверхность пластинки, ограниченная контуром К. На поверхность  $S_1$  подается от генератора электрических сигналов электрический потенциал  $U_0 e^{i\omega t}$  ( $U_0$  – амплитуда электрического потенциала на электродированной поверхности  $S_1$ ; естественно, что  $U_0 \neq U_i$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ). Символом  $Z_i$  на рис. 1 обозначен выходной электрический импеданс генератора электрических сигналов.

2

Частичное электродирование поверхности имеет своим следствием то, что электрические поля в объеме сегнетоэлектрика становятся зависимыми от значений координат точки наблюдения за параметрами электрического поля. Этот феномен отсутствует в обычных пьезоэлектрических элементах. На условии постоянства напряженности переменного, созданного внешним генератором электрических сигналов, электрического поля в объеме

пьезоелектрического елемента базуються методики расчета напряженно-деформированного состояния пьезоелектрических пластин [2] и оболочек [3]. В случае частичного электродривования поверхности пьезоелектрического елемента эти методики не работают.

Последнее побуждает искать новые подходы к процедуре расчета параметров напряженно-деформированного состояния и передаточных характеристик пьезоелектрических элементов с частичным электродривованием поверхности. Ниже будет изложена общая схема выполнения вычислительных процедур, которая, в принципе, позволяет выполнить оценку параметров напряженно-деформированного состояния и передаточных характеристик пьезоелектрических элементов с частичным электродривованием поверхностей. Эта схема может быть использована в качестве теоретической основы при математическом моделировании МЭМС.

### 3

Обозначим амплитудное значение вектора напряженности переменного электрического поля символом  $\vec{E}^*(x_k)$ . Электрическую поляризацию, которая создается переменным электрическим полем в объеме пьезоелектрической пластинки, будем определять изменяющимся во времени по закону  $e^{i\omega t}$  вектором электрической индукции, амплитудное значение которого обозначим символом  $\vec{D}^*(x_k)$ . При этом между компонентами векторов электрической индукции и напряженности электрического поля имеется линейное соответствие следующего вида:

$$D_k^*(x_k) = \chi_{kj}^e E_j^*(x_k). \quad (4)$$

В соотношении (4) и во всех последующих записях подобного типа предполагается суммирование по дважды повторяющемуся индексу. В формуле (4) таким индексом является символ  $j$ , который последовательно принимает значения 1, 2, 3.

Характеристики переменного электрического поля в объеме пьезоелектрического елемента определяются уравнениями Максвелла, которые для амплитудных значений электрической и магнитной составляющих электромагнитного поля записываются в следующем виде:

$$\text{rot } \vec{H}^*(x_k) = \vec{J}^*(x_k) + i\omega \vec{D}^*(x_k), \quad (5)$$

$$\text{rot } \vec{E}^*(x_k) = -i\omega \vec{B}^*(x_k), \quad (6)$$

где  $\vec{B}^*(x_k) = \mu_0 \vec{H}^*(x_k)$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная проницаемость вакуума. Так как пьезокерамика является довольно хорошим диэлектриком, можно записать, что  $\vec{J}^*(x_k) = 0$ . Последнее означает, что реальной пьезокерамике приписываются свойства идеально диэлектрика.

Вычисляя дивергенцию от левой и правой частей уравнения Максвелла (5), получаем, в случае идеально диэлектрика, следующий результат:

$$\text{div } \vec{D}^*(x_k) = 0. \quad (7)$$

В монографии [3] доказывается, что в диапазоне частот от нуля до десятков мегагерц уравнение (6) для идеальных диэлектриков можно записывать в следующем виде:

$$\text{rot } \vec{E}^*(x_k) \cong 0. \quad (8)$$

Условие (8) свидетельствует о потенциальном характере переменного электрического поля в объеме пьезоелектрического елемента. По этой причине возможно описание этого поля с помощью скалярного потенциала  $\Phi^*(x_k) e^{i\omega t}$ . При этом амплитудное значение  $\vec{E}^*(x_k)$  вектора напряженности переменного электрического поля, которое создается внешним источником, т. е. генератором электрических сигналов, определяется стандартным [4] образом:

$$\vec{E}^*(x_k) = -\text{grad } \Phi^*(x_k). \quad (9)$$

Подставляя определение (9) в соотношение (4), а полученный результат – в условие (7) отсутствия свободных носителей электричества, получаем дифференциальное уравнение Лапласа, решение которого определяет амплитудные значения электрического потенциала  $\Phi^*(x_k)$ :

$$\frac{\partial^2 \Phi^*(x_k)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi^*(x_k)}{\partial x_2^2} + \xi^2 \frac{\partial^2 \Phi^*(x_k)}{\partial x_3^2} = 0, \quad (10)$$

где  $\xi^2 = \chi_{33}^e / \chi_{11}^e$  – квадрат коэффициента анизотропии диэлектрической проницаемости пьезоелектрика.

Общее решение дифференциального уравнения (10) должно удовлетворять следующим условиям на границах области существования:

$$\Phi^*(x_k) \Big|_{x_3 = \alpha} = U_0 \quad \forall (x_1, x_2) \in S_1; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Phi^*(x_k)}{\partial x_3} \Big|_{x_3 = \alpha} = 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in S_K - S_1, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Phi^*(x_k)}{\partial n} = 0 \quad \forall (x_k) \in K, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \Phi^*(x_k)}{\partial x_3} \Big|_{x_3 = -\alpha} = 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in S_K - S_2, \quad (14)$$

$$\Phi^*(x_k) \Big|_{x_3 = -\alpha} = 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in S_2, \quad (15)$$

где символ  $\partial/\partial n$  означает производную в направлении внешней единичной нормали к боковой поверхности пластинки, которая опирается на контур  $K$ .

Условия (11) и (15) самоочевидны. Условия (12)–(14) носят приближенный характер [3] и выполняются тем точнее, чем больше отличается диэлектрическая прони-

цаемость пьезоэлектрика от диэлектрической проницаемости вакуума  $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м. Для пьезокерамики типа ЦТС диэлектрические проницаемости  $\chi_{ij}^\varepsilon \geq 10^3 \chi_0$  и поэтому граничные условия (12)–(14) можно считать практически точными. Если диэлектрическая проницаемость поляризованного сегнетоэлектрика в МЭМС менее  $10\chi_0$ , что, кстати сказать, еще не случилось, то условия (12)–(14) необходимо переформулировать с учетом существования полей рассеяния.

Решение граничной задачи (10)–(15) является первой вычислительной процедурой при выполнении расчетов параметров напряженно-деформируемого состояния пьезоэлектрических элементов совместимых с микросистемными технологиями. На этом этапе фактически определяются уровни энергии электрического поля в любой, произвольно заданной точке объема пьезоэлектрического элемента. Необходимо подчеркнуть, что потенциал  $\Phi^*(x_k)$  рассчитывается в предположении, что он полностью определяется геометрическими параметрами пьезоэлектрического элемента и не зависит от параметров упругих и электрических полей, которые формируются в объеме колеблющегося пьезоэлемента.

После определения потенциала  $\Phi^*(x_k)$  уравнения физического состояния колеблющегося пьезоэлектрического элемента, расчетная схема которого показана на рис. 1, можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{ij} = c_{ijk\ell}^E \frac{\partial u_\ell}{\partial x_k} - e_{kij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_k}, \quad (16)$$

$$D_m = e_{mij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \chi_{mj}^\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_j}, \quad (17)$$

где  $\sigma_{ij}$  – амплитудное значение компонента тензора результирующих механических напряжений;  $u_\ell$  – амплитуда изменяющегося во времени по гармоническому закону  $e^{i\omega t}$   $\ell$ -го компонента вектора смещения материальных частиц пьезоэлектрика;  $\Phi \equiv \Phi(x_k)$  – скалярный потенциал внутреннего электрического поля [5], которое возникает в результате смещения ионов пьезоэлектрика из равновесных положений узлов кристаллической решетки;  $\Phi^* \equiv \Phi^*(x_k)$  – известный скалярный потенциал переменного электрического поля, которое создается внешним источником (генератором). По своему физическому содержанию уравнение физического состояния (16) является обобщенным законом Гука для упругой среды с пьезоэлектрическими эффектами, а уравнение (17) – законом электрической поляризации диэлектрика с пьезоэлектрическими свойствами.

Второй закон Ньютона в дифференциальной форме или, что то же самое – уравнение движения материальной частицы упруго деформируемого твердого тела, в общем случае записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}(x_k, t)}{\partial x_j} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i(x_k, t)}{\partial t^2}. \quad (18)$$

Подставляя в определение (18) уравнение (16), и принимая во внимание, что все физические поля в объеме деформируемого пьезоэлектрического элемента изменяются во времени по гармоническому закону  $e^{i\omega t}$ , получаем уравнение следующего вида:

$$c_{ijk\ell}^E \frac{\partial^2 u_\ell}{\partial x_k \partial x_j} - e_{kij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \partial x_j} + \rho_0 \omega^2 u_i = f_i^K(x_k), \quad (19)$$

где  $f_i^K(x_k) = e_{kij} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x_k \partial x_j}$  – амплитудное значение  $i$ -го

компонента вектора объемной плотности сил Кулона, которые создаются внешним источником (генератором) электрического поля. Естественно, что второе слагаемое в левой части уравнения (19) также имеет смысл  $i$ -го компонента амплитудного значения вектора объемной плотности сил Кулона, которые возникают в объеме деформируемого пьезоэлектрика внутренним электрическим полем и препятствуют его деформированию электрическими полями внешних источников. При малых значениях пьезоэлектрических модулей, т. е. в случае, когда  $e_{kij} \leq 1$  Кл/м<sup>2</sup>, вторым слагаемым в уравнении можно, в принципе, пренебречь. Но для пьезоэлектрических керамик типа ЦТС (PZT), у которых  $e_{kij} \leq 20$  Кл/м<sup>2</sup>, силами Кулона внутреннего электрического поля пренебрегать нельзя. Эти силы, т. е. второе слагаемое в уравнении (19), действуют согласно (связанно) с силами упругости (первое слагаемое) и увеличивают эффективную жесткость пьезоэлектрика. В некоторых направлениях жесткость пьезокерамики может увеличиваться более чем на 50%.

Условие (7) отсутствия свободных носителей электричества в пьезодиэлектрике справедливо, очевидно, при любом представлении вектора электрической индукции. Поскольку  $\text{div } \vec{D}(x_k) = 0$ , то, после подстановки в это условие уравнения (17), получаем следующий результат:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \xi^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} + \frac{1}{\chi_1^\varepsilon} e_{mij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_m \partial x_j} = 0. \quad (20)$$

Уравнения (19), (20) представляют собой в общем случае систему из четырех дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. Единственность решения этой системы уравнений обеспечивают граничные условия. Если пьезоэлектрический элемент колеблется в вакууме, т. е. не имеет механических контактов с другими материальными объектами, то на его боковых поверхностях вследствие выполнения третьего закона Ньютона должны обращаться в нуль нормальные и касательные напряжения, действующие на элементарных площадках этих поверхностей. Применительно к расчетной схеме, которая показана на рис. 1, сказанное выше записывается следующим образом:

$$c_{3jk\ell} \frac{\partial u_\ell}{\partial x_k} - e_{k3j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_k} \Bigg|_{x_3 = \pm \alpha} = 0 \forall (x_1, x_2) \in S_K, \quad (21)$$

$$n_i c_{ijk\ell} \frac{\partial u_\ell}{\partial x_k} - e_{kij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_k} = 0 \forall x_k \in K, \quad (22)$$

где  $n_i$  – компоненты вектора внешней единичной нормали к боковой цилиндрической поверхности пьезоэлемента, в основании которой лежит криволинейный контур  $K$  (рис. 1).

Скалярный потенциал  $\Phi(x_k)$  внутреннего электрического поля должен удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\Phi(x_k)|_{x_3=\alpha} = 0 \forall (x_1, x_2) \in S_1, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \Phi(x_k)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\alpha} = 0 \forall (x_1, x_2) \in S_K - S_1, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \Phi(x_k)}{\partial x_1} \Big|_{x_3=\alpha} = \frac{\partial \Phi(x_k)}{\partial x_2} \Big|_{x_3=\alpha} = 0 \forall (x_1, x_2) \in S_1, \quad (25)$$

$$n_i \frac{\partial \Phi(x_k)}{\partial x_i} = 0 \forall x_k \in K, \quad (26)$$

$$\Phi(x_k)|_{x_3=-\alpha} = 0 \forall (x_1, x_2) \in S_2, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \Phi(x_k)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=-\alpha} = 0 \forall (x_1, x_2) \in S_K - S_2, \quad (28)$$

$$\frac{\partial \Phi(x_k)}{\partial x_1} \Big|_{x_3=-\alpha} = \frac{\partial \Phi(x_k)}{\partial x_2} \Big|_{x_3=-\alpha} = 0 \forall (x_1, x_2) \in S_1. \quad (29)$$

Сформулированная соотношениями (19)–(29) граничная задача является наиболее полной и общей математической формулировкой граничной задачи электроупругости установившихся гармонических колебаний пьезоэлектрических элементов конечных размеров.

Не вдаваясь в пространные рассуждения, можно утверждать, что точное решение этой граничной задачи осуществить невозможно. Вместе с тем, вполне возможно построить алгоритм приближенного решения граничной задачи (19)–(29). Вычислительную процедуру, о которой пойдет речь, можно назвать методом последовательных приближений. При этом искомые компоненты вектора смещения  $u_\ell(x_k)$  и скалярного потенциала  $\Phi(x_k)$  представляются сходящимися рядами следующего содержания:

$$u_\ell(x_k) = u_\ell^{(0)}(x_k) + \sum_{v=1}^{\infty} \Delta u_\ell^{(v)}(x_k),$$

$$\Phi(x_k) = \Phi^{(0)}(x_k) + \sum_{v=1}^{\infty} \Delta \Phi^{(v)}(x_k), \quad (30)$$

где  $u_\ell(x_k)$  и  $\Phi(x_k)$  – точные решения системы уравнений (19), (20);  $u_\ell^{(0)}(x_k)$  и  $\Phi^{(0)}(x_k)$  – нулевые приближе-

ния к точным решениям;  $\Delta u_\ell^{(v)}(x_k)$  и  $\Delta \Phi^{(v)}(x_k)$  – поправки  $v$ -го порядка к нулевым приближениям точных решений  $u_\ell(x_k)$  и  $\Phi(x_k)$ .

Нулевое приближение  $u_\ell^{(0)}(x_k)$  к точному значению амплитуды  $\ell$ -го компонента вектора смещения материальных частиц пьезоэлектрического элемента находится в результате решения следующей стационарной граничной задачи:

$$c_{ijk\ell}^E \frac{\partial^2 u_\ell^{(0)}}{\partial x_k \partial x_j} + \rho_0 \omega^2 u_\ell^{(0)} = f_i^K, \quad (31)$$

$$c_{3jkl}^E \frac{\partial u_\ell^{(0)}}{\partial x_k} - \sigma_{3j}^K \Big|_{x_3=\pm\alpha} = 0 \forall (x_1, x_2) \in S_K, \quad (32)$$

$$n_i c_{ijk\ell}^E \frac{\partial u_\ell^{(0)}}{\partial x_k} - \sigma_{ij}^K = 0 \forall x_k \in K, \quad (33)$$

где  $\sigma_{3j}^K = e_{k3j} \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_k} \right)$ ,  $\sigma_{ij}^K = e_{kij} \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_k} \right)$  – поверхностные плотности сил Кулона электрического поля внешнего источника или, что то же самое, напряжения Кулона.

Таким образом, нулевое приближение к точным значениям компонентов вектора смещения материальных частиц пьезоэлектрика формируется решением граничной задачи (31)–(33). По физическому содержанию эта граничная задача динамической теории упругости является задачей о возбуждении гармонических колебаний пьезоэлектрического элемента системой объемных ( $f_i^K$ ) и поверхностных ( $\sigma_{ij}^K$ ) нагрузок. Следует подчеркнуть, что при полном электродировании поверхностей пьезоэлементов и даже в случае разрезных электродов объемная плотность сил Кулона равна нулю и возбуждение упругих колебаний в таких пьезоэлементах осуществляется поверхностными нагрузками  $\sigma_{ij}^K$ .

После решения граничной задачи (31)–(33) определяется нулевое приближение к точному значению скалярного потенциала внутреннего электрического поля. При этом уравнение (20) записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x_2^2} + \xi^2 \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x_3^2} = -\frac{\rho_{пз}^{(0)}}{\chi_1^\xi}, \quad (34)$$

где  $\rho_{пз}^{(0)} = e_{mij} \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial x_m \partial x_j}$  – нулевое приближение к точно-

му значению объемной плотности поляризационного электрического заряда в объеме деформируемого пьезоэлектрика. Общее решение уравнения Пуассона (34), т. е. функция  $\Phi^{(0)}(x_k)$ , должно удовлетворять граничным условиям (23)–(29).

После определения нулевого приближения  $\Phi^{(0)}(x_k)$  выполняется расчет поправки  $\Delta u_\ell^{(1)}$ . Для этого в уравнение (19) подставляются значения  $\bar{u}(x_k) \approx \bar{u}^{(0)}(x_k) + \Delta \bar{u}^{(0)}(x_k)$  и  $\Phi(x_k) \approx \Phi^{(0)}(x_k)$ . Уравнение (19) принимает следующий вид

$$c_{ijk\ell}^E \frac{\partial^2 \Delta u_\ell^{(1)}}{\partial x_k \partial x_j} + \rho_0 \omega^2 \Delta u_\ell^{(1)} = f_i^{(0)}, \quad (35)$$

где  $\Delta u_\ell^{(1)}$  и  $\Delta u_i^{(1)}$  – поправки первого порядка к нулевым приближениям  $u_\ell^{(0)}$  и  $u_i^{(0)}$  точных значений компонентов  $u_\ell(x_k)$  и  $u_i(x_k)$  вектора смещений материальных частиц пьезоэлектрика;  $f_i^{(0)} = e_{kij} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x_k \partial x_j}$  – нулевое при-

ближение к точному значению  $i$ -го компонента вектора объемной плотности сил Кулона, которые формируются внутренним электрическим полем в объеме деформируемого пьезоэлектрика.

Единственность решения системы уравнений (35) обеспечивается граничными условиями, которые записываются следующим образом:

$$c_{3jk\ell}^E \frac{\partial \Delta u_\ell^{(1)}}{\partial x_k} - \sigma_{3j}^{(0)} \Big|_{x_3 = \pm \alpha} = 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in S_K, \quad (36)$$

$$n_i c_{ijk\ell}^E \frac{\partial \Delta u_\ell^{(1)}}{\partial x_k} - \sigma_{ij}^{(0)} = 0 \quad \forall x_k \in K, \quad (37)$$

где  $\sigma_{3j}^{(0)} = e_{k3j} \left( \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_k} \right)$ ,  $\sigma_{ij}^{(0)} = e_{kij} \left( \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_k} \right)$  – нулевые приближения к точным значениям поверхностных плотностей сил Кулона, которые формируются внутренним электрическим полем в объеме колеблющегося пьезоэлектрического элемента.

Следует особо подчеркнуть, что граничная задача (35)–(37) решается по той же самой схеме, по которой была решена граничная задача (31)–(33). Это означает, что после построения аналитического выражения для  $\bar{u}^{(0)}(x_k)$ , т. е. для нулевого приближения к точному значению вектора смещения материальных частиц пьезоэлектрического элемента, не нужно заново конструировать общие решения для поправки  $\Delta \bar{u}^{(1)}(x_k)$  первого порядка и для поправок  $\Delta \bar{u}^{(v)}(x_k)$  всех последующих порядков. Для получения численных значений поправок  $\Delta \bar{u}^{(v)}(x_k)$  необходимо только лишь подставлять в общие решения граничной задачи (31)–(33) соответствующие значения объемных и поверхностных плотностей сил Кулона, которые формируются внутренним электричес-

ким полем в объеме колеблющегося пьезоэлектрического элемента.

Получив первое приближение  $\bar{u}^{(1)}(x_k) = \bar{u}^{(0)}(x_k) + \Delta \bar{u}^{(1)}(x_k)$  к точному значению вектора смещения материальных частиц, можно выполнить оценку поправки  $\Delta \Phi^{(1)}(x_k)$  к точному значению  $\Phi(x_k)$  скалярного потенциала внутреннего электрического поля. Подставляя значение  $\bar{u}^{(1)}(x_k) = \bar{u}^{(0)}(x_k) + \Delta \bar{u}^{(1)}(x_k)$  в уравнение (34) и полагая при этом, что  $\Phi(x_k) \approx \Phi^{(0)}(x_k) + \Delta \Phi^{(1)}(x_k)$ , получаем уравнение Пуассона для определения поправки  $\Delta \Phi^{(1)}(x_k)$ :

$$\frac{\partial^2 \Delta \Phi^{(1)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Delta \Phi^{(1)}}{\partial x_2^2} + \xi^2 \frac{\partial^2 \Delta \Phi^{(1)}}{\partial x_3^2} = -\frac{\Delta \rho_{пз}^{(1)}}{\chi_1^\varepsilon}, \quad (38)$$

где  $\Delta \rho_{пз}^{(1)} = e_{mij} \frac{\partial^2 \Delta u_i^{(1)}}{\partial x_m \partial x_j}$  – поправка первого порядка к

нулевому приближению точного значения объемной плотности поляризованного заряда в объеме деформируемого пьезоэлектрика. Единственность решения уравнения (38) обеспечивается граничными условиями (23)–(29).

Вновь, как и при определении поправки  $\Delta \bar{u}^{(1)}(x_k)$ , можно сделать очевидный вывод. Для получения поправки  $\Delta \Phi^{(1)}(x_k)$  как, очевидно, и всех последующих поправок  $\Delta \Phi^{(v)}(x_k)$ , нет необходимости в новом решении уравнения (38) и в последующем удовлетворении граничных условий (23)–(29). Для определения поправки  $\Delta \Phi^{(1)}(x_k)$  необходимо и достаточно подставить в общее решение уравнения (34) вместо объемной плотности  $\rho_{пз}^{(0)}$  величину  $\Delta \rho_{пз}^{(1)}$ . Очевидно, что поправка  $v$ -го порядка, т. е. величина  $\Delta \Phi^{(v)}(x_k)$ , определяется общим решением уравнения (34), в правой части которого записывается поправка  $\Delta \rho_{пз}^{(v)}(x_k)$ .

Приближенное вычисление компонентов вектора смещения и скалярного потенциала внутреннего электрического поля составляет содержание второй вычислительной процедуры при математическом моделировании процессов, которые развиваются в объеме пьезоэлектрического элемента с частичным электродриванием поверхностей.

Результаты, которые получаются после выполнения первой и второй вычислительных процедур, т. е. расчетные формулы для потенциала  $\Phi^*(x_k)$  электрического поля, созданного в объеме пьезоэлектрического элемента генератором электрических сигналов, для скалярного потенциала  $\Phi(x_k)$  внутреннего электрического поля и вектора смещения  $\bar{u}(x_k)$  материальных частиц, линей-

но зависят от электрического потенциала  $U_0$ , который существует на электродированной поверхности  $S_1$ . Из сказанного выше следует, что эти расчетные соотношения можно представить в следующем виде:

$$\Phi^*(x_k) = U_0 \tilde{\Phi}^*(x_k, \Pi), \quad \Phi(x_k) = U_0 \tilde{\Phi}(x_k, \omega, \Pi), \quad (39)$$

$$u_\ell(x_k) = U_0 \frac{e_{33}}{c_{33}^E} \tilde{u}_\ell(x_k, \omega, \Pi), \quad (40)$$

где  $\tilde{\Phi}^*(x_k, \Pi)$ ,  $\tilde{\Phi}(x_k, \omega, \Pi)$  и  $\tilde{u}_\ell(x_k, \omega, \Pi)$  – безразмерные функции координат точки наблюдения и набора физико-механических и геометрических (символ  $\Pi$  в списке аргументов) параметров пьезоэлектрического элемента; конструкция правой части выражения (40) обусловлена размерностью входящих в нее величин.

Поскольку потенциал  $U_0 \neq U_\Gamma$ , т. е. потенциал  $U_0$  фактически является неопределенной величиной, постольку третья и последняя вычислительная процедура имеет своей целью определение амплитудного значения потенциала на электродированной поверхности пьезоэлектрического элемента.

Очевидно, что влияние пьезоэлектрического элемента на амплитуду электрического тока в проводнике, который соединяет его с генератором электрических сигналов, можно описать с помощью электрического импеданса  $Z_{эл}(\omega)$  пьезоэлектрического элемента. Электрический импеданс  $Z_{эл}(\omega)$  должен удовлетворять основным положениям и определениям теоретической электротехники и, стало быть, закону Ома для участка электрической цепи, т. е.

$$Z_{эл}(\omega) = \frac{U_0}{I}, \quad (41)$$

где  $I$  – амплитуда электрического тока в проводниках, которые подключаются к электродированным участкам поверхности пьезоэлектрического элемента (рис. 1). Сила тока, или амплитудное значение  $I$ , прямо пропорциональна скорости изменения во времени электрического заряда  $Q$  на электродированной поверхности пьезоэлектрического элемента. При гармоническом изменении во времени по закону  $e^{i\omega t}$  амплитуда  $I$  определяется следующим образом:

$$I = -i\omega Q_1 = -i\omega Q_2, \quad (42)$$

где  $Q_1$  и  $Q_2$  – амплитудные значения электрических зарядов на поверхностях  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 1).

Амплитудное значение электрического заряда  $Q_1$  определяется следующим образом:

$$Q_1 = \iint_{S_1} D_3(x_1, x_2, \alpha) dS_1 = \iint_{S_1} e_{3ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \chi_{3j}^\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_j} \Bigg|_{x_3 = \alpha},$$

$$dS_1 = U_0 \iint_{S_1} e_{3ij} \frac{e_{33}}{c_{33}^E} \frac{\partial \tilde{u}_i(x_k, \omega, \Pi)}{\partial x_j} + \chi_{3j}^\varepsilon \frac{\partial \tilde{\Phi}(x_k, \omega, \Pi)}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{\Phi}^*(x_k, \Pi)}{\partial x_j} \Bigg|_{x_3 = \alpha}, \quad dS_1 = U_0 C^\varepsilon(\omega, \Pi). \quad (43)$$

Таким образом,  $I = -i\omega U_0 C^\varepsilon(\omega, \Pi)$  и электрический импеданс пьезоэлектрического элемента

$$Z_{эл}(\omega) = -\frac{1}{i\omega C^\varepsilon(\omega, \Pi)}. \quad (44)$$

Из схемы подключения генератора электрических сигналов (рис. 1) следует, что

$$U_0 = \frac{U_\Gamma Z_{эл}(\omega)}{Z_\Gamma + Z_{эл}(\omega)} = \frac{U_\Gamma}{1 - i\omega Z_\Gamma C^\varepsilon(\omega, \Pi)}, \quad (45)$$

где  $C^\varepsilon(\omega, \Pi)$  определена двойным интегралом в формуле (43).

Вычисление электрического потенциала  $U_0$  является содержанием третьей вычислительной процедуры при математическом моделировании пьезоэлектрических элементов с частичным электродированием поверхностей.

После выполнения третьей и последней вычислительной процедуры можно записать выражение для расчета смещений материальных частиц пьезоэлектрического элемента в следующем, окончательном, виде:

$$u_\ell(x_k) = \frac{e_{33} U_\Gamma}{c_{33}^E [1 - i\omega Z_\Gamma C^\varepsilon(\omega, \Pi)]} \tilde{u}_\ell(x_k, \omega, \Pi). \quad (46)$$

Выражение (46) является математической моделью динамического напряженно-деформированного состояния пьезоэлектрического элемента с частичным электродированием поверхности и является ключевым соотношением для количественных оценок передаточных характеристик пьезоэлемента при любых вариантах его функционального использования. Частотно-зависимая функция  $C^\varepsilon(\omega, \Pi)$  является теоретической основой для построения эквивалентных электрических схем в том смысле, в котором они были предложены в 1925–1928 гг. Вальтером Г. Кэди радиоинженерам, которые занимались расчетом и проектированием высокочастотных генераторов электрических сигналов с кварцевым резонатором в цепи стабилизации частоты генерации [6].

#### 4

Рассмотрим первую вычислительную процедуру, т. е. расчет пространственного распределения в объеме пьезоэлектрического элемента переменного электрического поля. Решение этой задачи позволяет выполнить оценку количества энергии, которая потребляется пьезоэлектрическим элементом от внешнего источника, т. е. от генератора электрических сигналов. Эта процедура является первым этапом энергосилового метода [7–10] анализа физического состояния пьезоэлектрических элементов в режиме вынужденных колебаний под действием внешнего источника электрической энергии.

Рассмотрим диск (рис. 2) из поляризованной по толщине пьезоэлектрической керамики типа ЦТС (PZT). Электрод на верхней ( $z = \alpha$ ) поверхности пьезокерамического диска (позиция 1 на рис. 2) имеет форму круга радиуса  $R_0$  с центром на оси  $Oz$  цилиндрической системы коор-

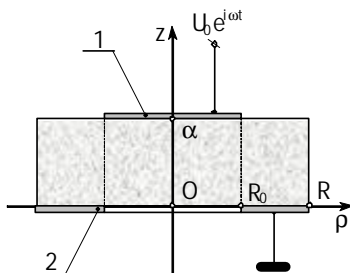


Рисунок 2 – Пьезоелектрический диск с частичным электродированием поверхностей

динат. На этот электрод подается гармонически изменяющийся во времени по закону  $e^{i\omega t}$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) электрический потенциал  $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$ . Электрод на нижней ( $z = 0$ ) поверхности диска (позиция 2 на рис. 2) выполнен в форме кольца с центром на оси  $Oz$ . Кольцевой электрод заземлен, т. е. его потенциал всегда равен нулю.

Исследуем характер распределения переменного электрического поля в объеме пьезокерамического диска в предположении, что внешний радиус  $R_0$  верхнего электрода совпадает с внутренним радиусом нижнего.

Итак, переменное электрическое поле в объеме пьезоэлектрического диска определяется с помощью скалярного потенциала  $\Phi^*(\rho, \varphi, z)e^{i\omega t}$ . При соосном расположении верхнего и нижнего электродов амплитудное значение скалярного потенциала зависит только от радиальной  $\rho$  и аксиальной  $z$  координаты цилиндрической системы координат. Говоря иными словами, показанная на рис. 2 электродная структура создает в объеме диска из поляризованной по толщине пьезокерамики осесимметричное переменное электрическое поле, скалярный потенциал которого определяется уравнением Лапласа следующего вида:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi^*(\rho, z)}{\partial \rho} \right) + \xi^2 \frac{\partial^2 \Phi^*(\rho, z)}{\partial z^2} = 0, \quad (47)$$

где  $\xi^2 = \chi_{33}^\epsilon / \chi_{11}^\epsilon$  – квадрат коэффициента анизотропии диэлектрической проницаемости поляризованной керамики.

Для упрощения последующих вычислений разобьем объем пьезокерамического диска на две области. Первую область ( $0 \leq \rho \leq R_0$ ;  $0 \leq z \leq \alpha$ ) будем называть внутренней и электрический потенциал в ее пределах будем обозначать символом  $\Phi_{(1)}^*(\rho, z)$ . Кольцевую область ( $R_0 \leq \rho \leq R$ ;  $0 \leq z \leq \alpha$ ) будем называть внешней областью или второй областью, а электрический потенциал в пределах этой области будем обозначать символом  $\Phi_{(2)}^*(\rho, z)$ .

На внешних и внутренних поверхностях внутренней и внешней областей потенциалы  $\Phi_{(1)}^*(\rho, z)$  и  $\Phi_{(2)}^*(\rho, z)$  должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\Phi_{(1)}^*(\rho, \alpha) = U_0 \forall \rho \in [0, R_0], \quad (48)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_{(1)}^*(\rho, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \forall \rho \in [0, R_0], \quad (49)$$

$$\Phi_{(1)}^*(R_0, z) - \Phi_{(2)}^*(R_0, z) = 0 \forall z \in [0, \alpha], \quad (50)$$

$$\frac{\partial \Phi_{(1)}^*(R_0, z)}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_{(2)}^*(R_0, z)}{\partial z} = 0 \forall z \in [0, \alpha], \quad (51)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_{(1)}^*(\rho, z)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R_0} - \left. \frac{\partial \Phi_{(2)}^*(\rho, z)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R_0} = 0 \forall z \in [0, \alpha], \quad (52)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_{(2)}^*(\rho, z)}{\partial z} \right|_{z=\alpha} = 0 \forall \rho \in [R_0, R], \quad (53)$$

$$\Phi_{(2)}^*(\rho, 0) = 0 \forall \rho \in [R_0, R], \quad (54)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_{(2)}^*(\rho, z)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = 0 \forall z \in [0, \alpha]. \quad (55)$$

Условия (49), (53) и (55) являются приближенными [3] и выполняются тем точнее, чем больше диэлектрические проницаемости  $\chi_{33}^\epsilon$  и  $\chi_{11}^\epsilon$  отличаются от диэлектрической проницаемости вакуума  $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м. Поскольку диэлектрические проницаемости  $\chi_{33}^\epsilon$  и  $\chi_{11}^\epsilon$  более чем на три порядка превосходят диэлектрическую проницаемость окружающей пьезокерамический диск среды, постольку эти граничные условия можно рассматривать как практически точные. Условия (50)–(52) имеют смысл условий сшивания решений уравнения (47) на границе  $\rho = R_0$  внутренней и внешней областей.

Решение уравнения (47) как во внешней, так и во внутренней областях, будем искать по стандартной технологии разделения переменных [11], т. е. будем полагать, что

$$\Phi_{(k)}^*(\rho, z) = R^{(k)}(\rho) Z^{(k)}(z), \quad k = 1, 2, \quad (56)$$

где  $R^{(k)}(\rho)$  и  $Z^{(k)}(z)$  функции, зависящие только от радиальной и аксиальной координаты, соответственно.

Подставляя предполагаемый вид решения (56) в уравнение (47), получаем возможность записать его в следующем виде:

$$\frac{1}{R^{(k)}(\rho)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial R^{(k)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 R^{(k)}(\rho)}{\partial \rho^2} = \frac{\xi^2}{Z^{(k)}(z)} \frac{\partial^2 Z^{(k)}(z)}{\partial z^2}. \quad (57)$$

Равенство (57) может выполняться при произвольных значениях переменных  $\rho$  и  $z$  только в одном случае, когда его левая и правая части не зависят от  $\rho$  и  $z$ , соответственно, и обе равны одной и той же константе, которая называется константой разделения [11]. Выбор константы разделения в значительной мере предопределяется физическим содержанием решаемой задачи. Обозначим, для удобства



последующих записей константу разделения символом  $\beta^2$ . При этом из уравнения (57) следуют два обыкновенных дифференциальных уравнения следующего вида:

$$\frac{1}{R^{(k)}(\rho)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial R^{(k)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 R^{(k)}(\rho)}{\partial \rho^2} = \beta^2, \quad (58)$$

$$-\frac{\xi^2}{Z^{(k)}(z)} \frac{\partial^2 Z^{(k)}(z)}{\partial z^2} = \beta^2. \quad (59)$$

Обилие граничных условий (см. соотношения (48)–(55)) требует соответствующего набора констант в общих решениях  $\Phi_{(k)}^*(\rho, z)$ . Обеспечить соответствующее количество констант можно следующим образом.

Рассмотрим внутреннюю область ( $k = 1$ ).

Если в уравнениях (58) и (59) определить параметр  $\beta$  как действительное число  $\beta_1$ , то получаем следующее выражение для скалярного потенциала:

$$\Phi_{(11)}^*(\rho, z) = I_0(\beta_1 \rho) [A_1 \cos(\lambda_1 z) + B_1 \sin(\lambda_1 z)], \quad (60)$$

где  $I_0(\beta_1 \rho)$  – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка;  $A_1$  и  $B_1$  – константы;  $\lambda_1 = \beta_1 / \xi$ ;  $\beta_1$  – подлежащее определению действительное число.

Предположим теперь, что параметр  $\beta$  является мнимым числом  $i\beta_2$ , т. е.  $\beta^2 = -\beta_2^2$ . Тогда из уравнений (58) и (59) получаем следующее выражение для расчета скалярного потенциала внутренней области дискового пьезоэлемента:

$$\Phi_{(12)}^*(\rho, z) = J_0(\beta_2 \rho) [A_2 \operatorname{ch}(\lambda_2 z) + B_2 \operatorname{sh}(\lambda_2 z)], \quad (61)$$

где  $J_0(\beta_2 \rho)$  – функция Бесселя нулевого порядка;  $A_2$  и  $B_2$  – константы;  $\lambda_2 = \beta_2 / \xi$ ;  $\beta_2$  – подлежащее определению число. Очевидно, что суперпозиция общих решений  $\Phi_{(11)}^*(\rho, z)$  и  $\Phi_{(12)}^*(\rho, z)$  также является общим решением уравнения (47), т. е.

$$\Phi_{(1)}^*(\rho, z) = \Phi_{(11)}^*(\rho, z) + \Phi_{(12)}^*(\rho, z). \quad (62)$$

Из граничного условия (49) следует, что

$$\lambda_1 I_0(\beta_1 \rho) B_1 + \lambda_2 J_0(\beta_2 \rho) B_2 = 0 \quad \forall \rho \in [0, R_0]. \quad (63)$$

Если положить константы  $B_1 = B_2 = 0$ , то равенство (63) и, соответственно, граничное условие (49), будут выполняться автоматически.

Поскольку числа  $\beta_1$  и  $\beta_2$  могут назначаться по произволу расчетчика, постольку их определим так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\cos(\lambda_1 \alpha) = 0, \quad (64)$$

$$J_0(\beta_2 R_0) = 0. \quad (65)$$

Из условий (64) и (65) следует, что

$$\beta_1 = \beta_n = \frac{\pi}{2\alpha} (1 + 2n)\xi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (66)$$

$$\beta_2 = q_m / R_0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (67)$$

где  $q_m$  –  $m$ -й корень уравнения  $J_0(x) = 0$ . Первые пять корней этого уравнения имеют следующие числовые значения:  $q_1 = 2,404826$ ,  $q_2 = 5,520078$ ,  $q_3 = 8,653728$ ,  $q_4 = 11,791534$  и  $q_5 = 14,930918$ . Легко заметить, что  $q_m - q_{m-1} \approx \pi$ , при этом приближенное равенство выполняется тем точнее, чем больше  $m$  номер корня.

Так как собственные числа  $\beta_k$  и  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2$ ) образуют бесконечные множества, то им должны соответствовать бесконечные множества констант  $A_{1n}$  и  $A_{2m}$ . При этом выражение для расчета скалярного потенциала  $\Phi_{(1)}^*(\rho, z)$  принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{(1)}^*(\rho, z) = & \sum_{n=0}^{\infty} A_{1n} I_0(\beta_n \rho) \cos \frac{\pi z}{2\alpha} (1 + 2n) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m} J_0 \frac{q_m \rho}{R_0} \operatorname{ch}(\lambda_m z), \end{aligned} \quad (68)$$

где  $\lambda_m = q_m / (\xi R_0)$ .

При  $z = \alpha$  должно выполняться граничное условие (49). Подставляя  $z = \alpha$  в расчетную формулу (68), получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{2m} J_0 \frac{q_m \rho}{R_0} \operatorname{ch}(\lambda_m \alpha) = U_0. \quad (69)$$

Функции Бесселя  $J_0(q_m \rho / R_0)$  на интервале  $0 \leq \rho \leq R_0$  образуют систему ортогональных функций, т. е. существует интеграл [12] следующего вида:

$$\int_0^{R_0} \rho J_0(q_m \rho / R_0) J_0(q_p \rho / R_0) d\rho = \begin{cases} 0, & \forall m \neq p; \\ R_0^2 J_1^2(q_m) / 2, & m = p, \end{cases} \quad (70)$$

где  $J_1(q_m)$  – функция Бесселя первого порядка. Используя свойство ортогональности (70), из уравнения (69) получаем следующие значения коэффициентов  $A_{2m}$ :

$$A_{2m} = U_0 \tilde{A}_{2m}(q_m), \quad (71)$$

где безразмерный множитель  $\tilde{A}_{2m}(q_m)$  определяется следующим выражением:

$$\tilde{A}_{2m}(q_m) = \frac{2}{q_m J_1(q_m) \operatorname{ch} \frac{q_m \alpha}{\xi R_0}}. \quad (72)$$

## 5

В таблице 1 приведены результаты расчетов безразмерных весовых множителей  $\tilde{A}_{2m}(q_m)$  для первых двадцати корней уравнения  $J_0(x) = 0$ . При выполнении вычислений коэффициент анизотропии  $\xi = \sqrt{\chi_{33}^{\epsilon} / \chi_{11}^{\epsilon}}$  ди-

электрической проницаемости поляризованной пьезо-керамики принят равным единице, т. е. принято, что  $\chi_{33}^e/\chi_{11}^e = 1$ . В действительности для пьезокерамики типа ЦТС-19 коэффициент  $\xi = 0,97 \div 0,99$ . В третьей колонке табл. 1 приведены значения весового коэффициента  $\tilde{A}_{2m}^0 = 1/[q_m J_1(q_m)]$ , которые не зависят от геометрического параметра  $\alpha/R_0$ . Безразмерный весовой множитель  $\tilde{A}_{2m}(q_m)$  рассчитывался при различных значениях параметра  $\alpha/R_0$ , что указано в заголовках соответствующих колонок табл. 1.

6

Предложена схема решения задачи для случая, когда расположенные на торцевых поверхностях диска электроды имеют форму соосно расположенных круга и кольца, причем наружный радиус кольца равен радиусу диэлектрического диска, а радиус круга совпадает с внутренним радиусом кольца.

Предложенная схема решения задачи использует метод последовательных приближений, что позволяет получить аналитические выражения для расчета коэффициентов в математическом описании потенциала электрического поля в объеме диска с анизотропной диэлектрической проницаемостью.

В работе решена актуальная задача определения вычислительных процедур, которые позволяют выполнить оценку параметров напряженно-деформированного состояния и передаточных характеристик пьезоэлектрических элементов с частичным электродированием поверхностей.

Научная новизна результатов, полученных в статье, состоит в том, что впервые предлагается последовательность вычислительных процедур, которая позволяет при расчете передаточных характеристик учитывать полный набор физико-механических и геометрических параметров пьезоэлектрического элемента и конечное значение выходного электрического импеданса генератора электрических

сигналов, а также впервые предлагается методика, которая позволяет выполнить адекватную реальной ситуации оценку эффекта связности упругих и электрических полей в случае их произвольного распределения в объеме колеблющегося пьезоэлектрического элемента. Сформулированный полный набор граничных задач технической электродинамики и динамической теории упругости представляет собой математическое содержание энергосилового метода анализа физического состояния пьезоэлектрических элементов в режиме вынужденных колебаний под действием внешнего источника электрической энергии.

Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что предложенная последовательность вычислительных процедур может быть рекомендована в качестве основы расчета характеристик пьезоэлектрических элементов с частичным электродированием поверхности и микроэлектромеханических структур.

Перспективы дальнейших исследований состоят в определении процедуры расчета амплитудного значения потенциала на поверхности дискового пьезоэлектрического элемента с частичным электродированием.

Работа выполнена в рамках госбюджетной научно-исследовательской темы Черкасского государственного технологического университета «Разработка новой технологии проектирования и создания на ее основе малогабаритных низкочастотных пьезоэлектрических преобразователей для гидроакустики, электроакустики, компьютерной техники, приборостроения» (№ гос. регистрации 0113U003349).

1. Варадан В. ВЧ МЭМС и их применение / В. Варадан, К. Виной, К. Джозе. – М. : Техносфера, 2004. – 528 с.
2. Ананьева А. А. К расчету поршневого пьезоэлектрического излучателя без учета внутренних потерь / А. А. Ананьева // Акустический журнал. – 1958. – Т. 4, № 3. – С. 223–232.
3. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – К. : Наук. думка, 1989. – 280 с.
4. Тамм И. Е. Основы теории электричества / И. Е. Тамм. – М. : Наука, 1976. – 616 с.

Таблица 1 – Результаты экспериментов

m	q <sub>m</sub>	$\tilde{A}_{2m}^0$	$\tilde{A}_{2m}(q_m)$			
			$\alpha/R_0 = 0,1$	$\alpha/R_0 = 0,2$	$\alpha/R_0 = 0,4$	$\alpha/R_0 = 0,8$
1	2	3	4	5	6	7
1	2,404826(00)	1,601975(00)	1,556743(00)	1,433008(00)	1,068376(00)	4,581400(-01)
2	5,520078(00)	-1,064799(00)	-9,208959(-01)	-6,361205(-01)	-2,312844(-01)	-2,572544(-02)
3	8,653728(00)	8,513992(-01)	6,088411(-01)	2,924759(-01)	5,338622(-02)	1,677065(-03)
4	1,179153(01)	-7,296452(-01)	-4,100099(-01)	-1,367963(-01)	-1,305292(-02)	-1,167732(-04)
5	1,493092(01)	6,485236(-01)	2,774129(-01)	6,530816(-02)	3,305117(-03)	8,422161(-06)
6	1,807106(01)	-5,895428(-01)	-1,884451(-01)	-3,173932(-02)	-8,556177(-04)	-6,208900(-07)
7	2,121164(01)	5,441802(-01)	1,286367(-01)	1,564097(-02)	2,248713(-04)	4,646171(-08)
8	2,435247(01)	-5,078936(-01)	-8,828160(-02)	-7,790196(-03)	-5,975099(-05)	-3,514693(-09)
9	2,749348(01)	4,780125(-01)	6,090726(-02)	3,912089(-03)	1,600895(-05)	2,680750(-10)
10	3,063461(01)	-4,528506(-01)	-4,222733(-02)	-1,977401(-03)	-4,317264(-06)	-2,057938(-11)
11	3,377582(01)	4,312839(-01)	2,940508(-02)	1,004760(-03)	1,170395(-06)	1,588077(-12)
12	3,691710(01)	-4,125307(-01)	-2,055546(-02)	-5,127524(-04)	-3,186614(-07)	-1,230758(-13)
13	4,005843(01)	3,960282(-01)	1,441773(-02)	2,626185(-04)	8,707525(-08)	9,572677(-15)
14	4,319979(01)	-3,813595(-01)	-1,014249(-02)	-1,349206(-04)	-2,386668(-08)	-7,468262(-16)
15	4,634119(01)	3,682084(-01)	7,153367(-03)	6,949911(-05)	6,558958(-09)	5,841790(-17)
16	4,948261(01)	-3,563301(-01)	-5,056596(-03)	-3,588208(-05)	-1,806645(-09)	-4,579974(-18)
17	5,262405(01)	3,455318(-01)	3,581565(-03)	1,856312(-05)	4,986362(-10)	3,597905(-19)
18	5,576551(01)	-3,356591(-01)	-2,541305(-03)	-9,620500(-06)	-1,378691(-10)	-2,831427(-20)
19	5,890698(01)	3,265869(-01)	1,806041(-03)	4,993823(-06)	3,818014(-11)	2,231754(-21)
20	6,204847(01)	-3,182126(-01)	-1,285331(-03)	-2,595887(-06)	-1,058825(-11)	-1,761575(-22)

Примечание. Запись 1,856312(-05) эквивалентна записи 1,856312×10<sup>-5</sup>

5. Петрищев О. Н. Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Ч. 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса / О. Н. Петрищев. – К. : Аверс, 2012. – 300 с.
6. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение / У. Кэди. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1949. – 720 с.
7. Sharapov V. Piezoceramic sensors / V. Sharapov. – Heidelberg, Dordrecht, London, New York : Springer Verlag, 2011. – 498 p.
8. Шарапов В. М. Пьезоэлектрические датчики / В. М. Шарапов, М. П. Мусиенко, Е. В. Шарапова. – М. : Техносфера, 2006. – 632 с.
9. Sharapov V. Piezoelectric electroacoustic transducers / V. Sharapov, Zh. Sotula, L. Kunitskaya. – Heidelberg, Dordrecht, London, New York: Springer Verlag, 2013. – 240 p.
10. Шарапов В. М. Электроакустические преобразователи / В. М. Шарапов, И. Г. Минаев, Ж. В. Сотула, Л. Г. Куницкая. – М.: Техносфера, 2013. – 280 с.
11. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М. : Высшая школа, 1970. – 712 с.
12. Прудников А. П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М. : Наука, 1983. – 752 с.

Статья поступила в редакцию 08.09.2014.  
После доработки 27.01.2015.

Петрищев О. М.<sup>1</sup>, Шарапов В. М.<sup>2</sup>, Сотула Ж. В.<sup>3</sup>, Базіло К. В.<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Д-р техн. наук, професор, професор кафедри акустики та акустоелектроніки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

<sup>2</sup>Д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри комп'ютеризованих та інформаційних технологій в приладобудуванні Черкаського державного технологічного університету, Черкаси, Україна

<sup>3</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедри комп'ютеризованих та інформаційних технологій в приладобудуванні Черкаського державного технологічного університету, Черкаси, Україна

<sup>4</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедри комп'ютеризованих та інформаційних технологій в приладобудуванні Черкаського державного технологічного університету, Черкаси, Україна

Вирішена актуальна задача визначення обчислювальних процедур, які дозволяють виконати оцінку параметрів напружено-деформованого стану та передаточних характеристик п'єзоелектричних елементів з частковим електродуванням поверхонь. Запропонована послідовність обчислювальних процедур, яка дозволяє при розрахунку передаточних характеристик враховувати повний набір фізико-механічних і геометричних параметрів п'єзоелектричного елемента і кінцеве значення вихідного електричного імпедансу генератора електричних сигналів. Запропоновано методику, яка дозволяє виконати адекватну реальній ситуації оцінку ефекту зв'язності пружних і електричних полів у разі їх довільного розподілу в об'ємі п'єзоелектричного елемента, який здійснює коливання. Сформульований повний набір граничних задач технічної електродинаміки та динамічної теорії пружності являє собою математичний зміст енергосилового методу аналізу фізичного стану п'єзоелектричних елементів в режимі вимушених коливань під дією зовнішнього джерела електричної енергії. Запропонована послідовність обчислювальних процедур може бути рекомендована в якості основи розрахунку характеристик п'єзоелектричних елементів з частковим електродуванням поверхні і мікроелектромеханічних структур.

: часткове електродування поверхонь п'єзоелемента, мікроелектромеханічні структури.

Petrishchev O. N.<sup>1</sup>, Sharapov V. M.<sup>2</sup>, Sotula Zh. V.<sup>3</sup>, Bazilo K. V.<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Dr.Sc., Professor, Professor of department of acoustics and acoustoelectronics, National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine

<sup>2</sup>Dr.Sc., Professor, Head of Instrument Making Department, Cherkasy State Technological University, Cherkasy, Ukraine

<sup>3</sup>PhD, Associate Professor of Instrument Making Department, Cherkasy State Technological University, Cherkasy, Ukraine

<sup>4</sup>PhD, Associate Professor of Instrument Making Department, Cherkasy State Technological University, Cherkasy, Ukraine

#### PRINCIPLES OF CALCULATION OF THE PIEZOELECTRIC ELEMENTS WITH SURFACES PARTIAL ELECTRODES COVERING

The sequence of computational procedures, which allows when calculating transfer characteristics to use the full range of physical, mechanical and geometrical parameters of the piezoelectric element and the final value of the output electric impedance of the electrical signals generator, is proposed. The method, which allows you to perform the real situation adequate assessment of the connectivity effect of elastic and electric fields in the case of their arbitrary distribution in the volume of vibrating piezoelectric element, is proposed. The formulated complete set of boundary problems of technical electrostatics and elasticity dynamic theory is the mathematical content of the energy-power method of the piezoelectric elements physical state analysis in the regime of forced oscillations under the influence of the electrical energy external source. The proposed sequence of computational procedures can be recommended as a theoretical basis for characteristics calculating of the piezoelectric elements with partial surfaces covering by electrodes and microelectromechanical structures.

**Keywords:** piezoelectric element surfaces partial electrodes covering, microelectromechanical structures.

#### REFERENCES

1. Varadan V., Vinoj K., Dzhoze K. VCh ME'MS i ix primeneniye. Moscow, Texnosfera, 2004, 528 p.
2. Anan'eva A. A. K raschetu porshnevogo p'ezoe'lektricheskogo izluchatelya, *Akusticheskij zhurnal*, 1958, vol. 4, No. 3, pp. 223–232.
3. Grinchenko V. T., Ulitko A. F., Shul'ga N. A. Mexanika svyazannyx polej v e'lementax konstrukcij. Vol. 5. E'lektroprugost'. Kiev, Nauk. dumka, 1989, 280 p.
4. Tamm I. E. Osnovy teorii e'lektricheskogo stva. Moscow, Nauka, 1976, 616 p.
5. Petrishchev O. N. Garmonicheskie kolebaniya p'ezokeramicheskix e'lementov. Ch 1. Garmonicheskie kolebaniya p'ezokeramicheskix e'lementov v vakuume i metod rezonansa – antirezonansa. Kiev, Avers, 2012, 300 p.
6. Ke'di U. P'ezoe'lektrichestvo i ego prakticheskoe primeneniye. Moscow, Izd-vo inostrannoij literatury, 1949, 720 p.
7. Sharapov V. Piezoceramic sensors. Heidelberg, Dordrecht, London, New York, Springer Verlag, 2011, 498 p.
8. Sharapov V. M., Musienko M. P., Sharapova E. V. P'ezoe'lektricheskije datchiki. Moscow, Texnosfera, 2006, 632 p.
9. Sharapov V., Sotula Zh., Kunitskaya L. Piezoelectric electroacoustic transducers. Heidelberg, Dordrecht, London, New York, Springer Verlag, 2013, 240 p.
10. Sharapov V. M., Minaev I. G., Sotula Zh. V., Kunickaya L. G. E'lektroakusticheskie preobrazovateli. Moscow, Texnosfera, 2013, 280 p.
11. Koshlyakov N. S., Gliner E'. B., Smirnov M. M. Uravneniya v chastny'x proizvodny'x matematicheskoi fiziki. Moscow, Vy'sshaya shkola, 1970, 712 p.
12. Prudnikov A. P., Bry'chkov Yu. A., Marichev O. I. Integraly' i ryady'. Special'ny'e funkcii. Moscow, Nauka, 1983, 752 p.