УДК 62–50:519.7/8

Левин В. И.

Д-р техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Пензенского государственного технологического университета, Пенза, Россия

РАСЧЕТ И АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ НЕПОЛНОСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ ДЕТЕРМИНИЗАЦИИ

Рассмотрены существующие подходы к расчету, анализу, синтезу и оптимизации систем в условиях неопределенности. Исследование неопределенных систем формулируется в виде задач расчета, анализа и синтеза различных функций с недетерминированными параметрами, служащих соответствующими характеристиками данных систем. Все эти задачи значительно сложнее их детерминированных аналогов, которые приходится решать при исследовании систем с детерминированными (точно известными) параметрами. Такое усложнение связано с тем, что алгебра недетерминированных чисел сложнее алгебры детерминированных чисел. В статье сформулирована и подробно описана задача вычисления и анализа поведения неполностью определенной функции, заданной с точностью до интервала значений. Для решения указанной задачи предложен алгоритм детерминизации, который позволяет свести задачу к двум аналогичным – для верхней и нижней граничных функций исходной неполностью определенной функции. В этом алгоритме автором использован аппарат интервальной математики и интервально-дифференциального исчисления. Далее выделены различные типы возможного поведения интервальных функций (постоянство, возрастание, убывание, расширение, сужение) и различные типы экстремальных точек таких функций (например, точка максимума, точка минимума, точка максимального расширения, точка минимального расширения). Доказаны теоремы, которые позволяют определять участки различного поведения интервальных функций и точки с различными видами экстремума. Подробно рассмотрена работа предложенного алгоритма детерминизации, позволяющего анализировать поведение интервальных функций. Работа проиллюстрирована на конкретном примере.

Ключевые слова: оптимизация, детерминированная функция, интервальная функция, анализ поведения функций, неопределенность.

НОМЕНКЛАТУРА

$x_1, x_2, \ldots$ – вещественные независимые переменные;

y_1, y_2 – вещественные зависимые переменные;

X – множество независимых переменных;

Y – множество зависимых переменных;

a_i, b_i – вещественные числа;

$f_1, f_2, \ldots$ – вещественные детерминированные функции;

$\tilde{f} = [f_1, f_2]$ – интервальная функция;

$\tilde{a} = [a_1, a_2]$, $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ – интервальные числа;

$\vee$ – символ дизъюнкции (взятия максимума);

$\wedge$ – символ конъюнкции (взятия минимума).

ВВЕДЕНИЕ

Современная наука и практика обработки информации успешно справляется с задачами исследования различных систем с полностью определенными (детерминированными) параметрами. Эти задачи обычно формулируются как задачи расчета, анализа и синтеза тех или иных функций с детерминированными параметрами, служащих соответствующими характеристиками изучаемых систем. Но на практике часто встречаются другие системы – системы с неточно известными, т.е. неполностью определенными (недетерминированными) параметрами. Причины появления таких систем заключаются в естественной неопределенности, свойственной многим реальным процессам, происходящим в системах; в неточном задании параметров большинства систем из-за неизбежных погрешностей при их вычислении или измерении; в изменении во времени параметров систем; в необходимости или целесообразности совместного исследования целых семейств однотипных систем, имеющих одинаковые функции-характеристики и различающихся лишь значениями параметров этих функций. Учет неопределенности систем особенно важен при их проектировании, поскольку полная определенность в работе системы появляется лишь на последних этапах ее создания.

Исследование введенных неопределенных систем формулируется в виде задач расчета, анализа и синтеза различных функций с недетерминированными параметрами, служащих соответствующими характеристиками данных систем. Все эти задачи значительно сложнее их вышеупомянутых детерминированных аналогов, которые приходится решать при исследовании систем с детерминированными параметрами. Усложнение связано с тем, что алгебра недетерминированных чисел сложнее алгебры детерминированных чисел.

В настоящей статье рассматриваются задачи расчета и анализа неточно заданных (недетерминированных) функций интервального типа. В качестве математического аппарата используется интервальная алгебра и интервально-дифференциальное исчисление.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим обычную (детерминированную) функцию одной независимой переменной

$$y = f(x), \tag{1}$$

однозначно отображающую заданное множество $X = \{x\}$ независимых переменных x в заданное множество $Y = \{y\}$ зависимых переменных y в соответствии с некоторым законом f, который и называется функцией. Хорошо известно, что задача расчета (вычисления значений) функции (1) решается с помощью адекватного

DOI 10.15588/1607-3274-2016-2-6

этой задаче математического аппарата алгебры вещественных чисел, при использовании подходящих методов вычисления, а задача анализа поведения функции (1) – с помощью адекватного ей аппарата классического дифференциального исчисления [1].

Далее, рассмотрим недетерминированную (конкретно, интервальную) функцию одной независимой переменной [2]

$$\tilde{y} = \tilde{f}(x), \tag{2}$$

однозначно отображающую заданное множество $X = \{x\}$ независимых вещественных (как и в (1)) переменных x в заданное множество $\tilde{Y}=\{\tilde{y}\}$ зависимых переменных-интервалов $\tilde{y}=[y_1, y_2]$, в соответствии с законом $\tilde{f}$, который и называется интервальной функцией. По определению (2), любую интервальную функцию можно представить в виде пары обычных функций

$$\tilde{f} = \{f_1, f_2\}, \tag{3}$$

которые имеют вид

$$y_1 = f_1(x),\ y_2 = f_2(x). \tag{4}$$

Из соотношений (3), (4) видно, что интервальная функция $\tilde{f}$ эквивалентна паре обычных функций f_1, f_2, из которых первая однозначно отображает заданное множество $X=\{x\}$ независимых переменных x функции $\tilde{f}$ в множество $Y_1=\{y_1\}$ нижних границ интервалов $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ – зависимых переменных этой функции, а вторая однозначно отображает то же множество $X=\{x\}$ в множество $Y_2=\{y_2\}$ верхних границ интервалов $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ – зависимых переменных функции.

Задача настоящей работы заключается в построении двух систематических процедур (алгоритмов), связанных с изучением поведения интервальных функций (2). А именно: 1) процедура расчета (т.е. вычисления значений) интервальной функции; 2) процедура анализа поведения интервальной функции.

2 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Проблема изучения объектов, характеризуемых той или иной неопределенностью, возникла впервые в начале Второй мировой войны, в связи с необходимостью управления огнем зенитной артиллерии, в условиях случайного движения воздушных целей. Соответствующими задачами занимались выдающиеся математики-вероятностники Н. Винер [3] и А. Н. Колмогоров [4] и их многочисленные последователи. Однако широкое развитие исследований по изучению гражданских объектов, работающих в условиях неопределенности, началось только в конце 1950-х – начале 1960-х гг., в рамках математической статистики и ее новых направлений – обработка данных и планирование экспериментов [5, 6].

1970-е –1980-е годы привели к более широкому пониманию неопределенности, включившей в себя теперь не только случайность, но и незнание, неединственность возможных исходов, неопределенность целей, многокритериальность при решении задач оптимизации. В связи с этим появились новые подходы к описанию неопределенности: теория нечетких множеств, принцип недоопределенной модели, принятие решений в многокритериальных задачах [7, 8. 9].

Наконец, с 1980-х годов начал интенсивно применяться подход к описанию неопределенности, базирующийся на интервальной математике, позволяющей получать оценки характеристик неопределенных систем с гарантированной точностью [10–16]. При этом указанный подход применялся сначала в метрологии для определения интервального значения известной функции при интервальных значениях аргументов. Затем его развитие пошло по двум направлениям. За рубежом этот подход развивался как средство автоматического учета ошибок округления при численном решении задач на компьютерах, в то время как в СССР и России ученые развивали его с целью нахождения области возможных значений результата вычислений с учетом структуры данных и функций, заданных в символьном виде. Но во всех упомянутых выше подходах к изучению систем с неопределенностями не фигурирует элементарная по форме, но очень важная в практических приложениях базовая задача изучения поведения неполностью определенной функции, служащей характеристикой такой системы, которая аналогична базовой для математического анализа задаче анализа поведения полностью определенной функции. Настоящая статья направлена на решение именно этой задачи.

3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Начнем с решения задачи расчета (вычисления значений) интервальной функции. При этом возможны два случая.

Случай 1. Интервальная функция задана в разделенном виде, в котором верхняя и нижняя границы интервального значения функции выражены каждая по отдельности. Этот вид представления интервальной функции вытекает из соотношений (2)–(4). Именно, из (2), (3) следует явное представление интервальной функции в виде интервала

$$[y_1, y_2] = [f_1(x), f_2(x)], \tag{5}$$

границы которого согласно (5) выражаются формулами

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x). \tag{6}$$

Итак, вычисление интервального значения $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ интервальной функции (2), соответствующего значению x независимой переменной этой функции, осуществляется по алгоритму:

Шаг 1. Записываем вычисляемую интервальную функцию (2) в разделенном виде (5), (6) с помощью нижней f_1 и верхней f_2 граничных функций функции (2).

Шаг 2. Вычисляем нижнюю граничную функцию f_1, используя для этого какой-либо подходящий известный метод вычисления обычных (детерминированных, т.е. полностью определенных) функций [17].

Шаг 3. Вычисляем соответствующую верхнюю граничную функцию f_2, используя ту же методику, что и на шаге 2.

Шаг 4. Соединяя вычисленные значения нижней f_1 и верхней f_2 граничных функций, получим явное представление (5) вычисленной интервальной функции (2) в виде интервала.

Случай 2. Интервальная функция задана в неразделенном виде, т.е. в виде суперпозиции элементарных интервальных функций: интервального сложения и вычитания, умножения интервала на вещественное число, умножения и деления интервалов [11]. В указанном случае перед собственно вычислением интервальная функция приводится к разделенному виду, после чего к функции применяется 4-шаговый алгоритм случая 1. Приведение любой интервальной функции к разделенному виду можно осуществить с помощью основных формул интервальной математики, выражающих результаты элементарных преобразований интервалов [11]

$$[a_1,a_2]+[b_1,b_2]=[a_1+b_1,a_2+b_2];$$
$$[a_1,a_2]-[b_1,b_2]=[a_1-b_2,a_2-b_1];$$
$$k\cdot[a_1,a_2]=\begin{cases}[ka_1,ka_2], & k>0,\\ [ka_2,ka_1], & k<0;\end{cases} \tag{7}$$
$$[a_1,a_2]\cdot[b_1,b_2]=[\min_{i,j}(a_i\cdot b_j),\max_{i,j}(a_i\cdot b_j)];$$
$$[a_1,a_2]/[b_1,b_2]=[a_1,a_2]\cdot[1/b_2,1/b_1].$$

Пример 1. Привести к разделенному виду интервальную функцию

$\tilde{y}=([2,3]x+[1,2]x)\cdot([5,7]x+[4,6]x)$ в области $x\geq 0$.

Решение. Применяя к заданной интервальной функции последовательно третью, первую и четвертую формулы (7), получим нужный вид функции

$$\tilde{y}=[y_1,y_2]=([2x,3x]+[x,2x])\times$$
$$\times([5x,7x]+[4x,6x])=[3x,5x]\cdot[9x,13x]=$$
$$[\min(3\cdot 9x^2,3\cdot 13x^2,5\cdot 9x^2,5\cdot 13x^2),$$
$$\max(3\cdot 9x^2,3\cdot 13x^2,5\cdot 9x^2,5\cdot 13x^2)=[27x^2,65x^2].$$

Таким образом, $y_1=27x^2, y_2=65x^2$, и наконец, разделенная форма заданной интервальной функции $\tilde{y}=[y_1,y_2]=[27x^2,65x^2]$.

Перейдем к описанию уже упомянутой ранее (п. 1) задачи анализа поведения интервальной функции. Постановка этой задачи аналогична постановке задачи анализа поведения обычной детерминированной функции и включает, в первую очередь, отыскание

1) интервалов возрастания функции;
2) интервалов убывания функции;
3) интервалов постоянства значений функции;
4) точек максимума функции;
5) точек минимума функции.

Кроме того, постановка задачи анализа поведения интервальной функции может включать отыскание особых интервалов (особых точек) такой функции. Существование таких интервалов (таких точек) связано с интервальным характером этой функции. У обычных детерминированных функций такие интервалы (точки) отсутствуют.

Очевидно, что решение задач анализа поведения интервальной функции требует сравнения величин интервалов. В связи с этим ниже кратко изложены основные результаты теории сравнения интервалов [18, 19]. Эти результаты составляют теоретическую базу детерминизационного подхода к принятию решений в условиях интервальной неопределенности. Теоретические основы других возможных подходов к принятию решений в условиях неопределенности можно найти в литературе [20–23]. Принятие решений в условиях неопределенности является важной составной частью онтологии проектирования [24].

Рассмотрим два интервала $\tilde{a}=[a_1,a_2]$ и $\tilde{b}=[b_1,b_2]$. Попытаемся сравнить величины этих интервалов, рассматривая их как интервальные числа. Прямое сравнение интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ на основе отношений отдельных пар вещественных чисел (a_i,b_j), где $a_i\in\tilde{a}, b_j\in\tilde{b}$, не всегда возможно, так как в общем случае одни пары чисел будут находиться в отношении $(a_i>b_j)$, а другие – в противоположном отношении $(a_i<b_j)$. Поэтому остается только реализовать сравнение интервалов на теоретико-множественном уровне, рассматривая каждый из интервалов как единое целое, не делимое на части. При этом операции нахождения максимума $\vee$ и минимума $\wedge$ двух интервалов $\tilde{a}=[a_1,a_2]$ и $\tilde{b}=[b_1,b_2]$ можно ввести в виде следующих теоретико-множественных конструкций

$$\tilde{a}\vee\tilde{b}=\{a\vee b\mid a\in\tilde{a},b\in\tilde{b}\},\ \tilde{a}\wedge\tilde{b}=\{a\wedge b\mid a\in\tilde{a},b\in\tilde{b}\}. \tag{8}$$

Таким образом, взятие максимума (минимума) двух интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ определяется, согласно (8), как нахождение множества максимумов (минимумов) двух точных величин a и b, при условии, что эти величины пробегают все возможные значения соответственно из интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$. Теперь для того, чтобы интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ можно было сравнить по величине, при этом установив их отношение $\tilde{a}\geq\tilde{b}$ или $\tilde{a}\leq\tilde{b}$, нужно, чтобы 1) введенные операции $\vee,\wedge$ над этими интервалами существовали; 2) эти операции давали в результате один из операндов: $\tilde{a}$ или $\tilde{b}$; 3) указанные две операции были согласованы, т. е. если большим (меньшим) оказывается один из интервалов, то меньшим (большим) является другой из них. Сформулированное условие сравнимости величин интервалов является, очевидно необходимым и достаточным.

Нетрудно доказать, что условие согласованности операций $\vee$ и $\wedge$ над интервалами всегда выполняется. Очевидно также, что эти операции существуют для любой пары $\tilde{a},\tilde{b}$, причем результатом операции в общем случае оказывается некоторый новый интервал, отличный как от $\tilde{a}$, так и от $\tilde{b}$. Таким образом, необходимым и достаточным условием сравнимости интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ оказывается условие, по которому операции $\tilde{a}\vee\tilde{b}$ и $\tilde{a}\wedge\tilde{b}$ должны иметь своим результатом один из интервалов – $\tilde{a}$ или $\tilde{b}$. Из этой формулировки условия сравнимости интервалов выводятся различные его конструктивные формы, удобные для практического применения. Эти формы содержатся в следующих теоремах 1–4.

Теорема 1. Для того чтобы два интервала $\tilde{a}=[a_1,a_2]$ и $\tilde{b}=[b_1,b_2]$ были сравнимы по величине и находились в отношении $\tilde{a} \geq \tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$a_1 \geq b_1,\, a_2 \geq b_2\,, \tag{9}$$

а для того чтобы эти интервалы были сравнимы по величине и находились в отношении $\tilde{a} \leq \tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$a_1 \leq b_1,\, a_2 \leq b_2\,. \tag{10}$$

Из этой теоремы вытекает, что любые интервалы $\tilde{a},\tilde{b}$ сравнимы по величине (по отношению $\geq$ или $\leq$) и находятся в этом отношении только тогда, когда в таком же отношении находятся их одноименные границы a_1, b_1 и a_2, b_2.

Значение теоремы 1 в том, что она сводит сравнение интервалов и выбор большего (меньшего) из них к очевидной операции сравнения границ указанных интервалов, являющихся вещественными числами.

Теорема 2. Для того чтобы два интервала $\tilde{a}=[a_1,a_2]$ и $\tilde{b}=[b_1,b_2]$ были несравнимы по величине (по отношению $\geq$ или $\leq$), т. е. не находились в отношении $\tilde{a} \geq \tilde{b}$ или $\tilde{a} \leq \tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$(a_1 < b_1,\, a_2 > b_2) \quad \text{или} \quad (b_1 < a_1,\, b_2 > a_2)\,. \tag{11}$$

Из приведенной выше теоремы 2 вытекает, что интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ не сравнимы по отношениям $\geq$ и $\leq$ только тогда, когда один из них полностью накрывает другой. Значение теоремы состоит в том, что она выявляет существование определенных случаев несравнимости интервалов по отношениям $\geq$ и $\leq$, в отличие от обычных вещественных чисел, которые всегда сравнимы по этим отношениям. Несравнимость некоторых интервалов – естественный результат того, что интервальные числа, в отличие от обычных вещественных чисел, задаются не точно, а с неопределенностью (т. е. число принимает некоторое значение в заданном интервале, но при этом не уточняется, какое именно это значение).

Будем рассматривать теперь систему нескольких интервалов

$$\tilde{a}_1 = [a_{11}, a_{12}],\, \tilde{a}_2 = [a_{21}, a_{22}],\, \tilde{a}_3 = [a_{31}, a_{32}], \ldots \tag{12}$$

Сравнение по отношениям $\geq, \leq$ величин интервалов выписанной системы (12), рассматриваемых как интервальные числа, реализуется в результате попарного сравнения указанных интервалов, выполняемого в соответствии с теоремами 1, 2. Основные результаты, получаемые этим путем, содержатся в теоремах 3 и 4.

Теорема 3. Для того чтобы в системе нескольких интервалов (12) существовал максимальный интервал, который находится со всеми остальными интервалами в отношении $\geq$, и этим интервалом являлся $\tilde{a}_1$, необходимо и достаточно, чтобы границы этого интервала были расположены относительно одноименных границ всех остальных интервалов согласно условиям

$$\begin{array}{l} a_{11} \geq a_{21},\; a_{11} \geq a_{31},\; a_{11} \geq a_{41}, \ldots \\ a_{12} \geq a_{22},\; a_{12} \geq a_{32},\; a_{12} \geq a_{42}, \ldots \end{array} \tag{13}$$

Теорема 4. Для того чтобы в системе нескольких интервалов (12) существовал минимальный интервал, который находится со всеми остальными интервалами в отношении $\leq$, и этим интервалом являлся $\tilde{a}_1$, необходимо и достаточно, чтобы границы данного интервала были расположены относительно одноименных границ всех остальных интервалов согласно условиям

$$\begin{array}{l} a_{11} \leq a_{21},\; a_{11} \leq a_{31},\; a_{11} \leq a_{41}, \ldots \\ a_{12} \leq a_{22},\; a_{12} \leq a_{32},\; a_{12} \leq a_{42}, \ldots \end{array} \tag{14}$$

Как показывают теоремы 3, 4, интервал является максимальным (минимальным) в системе интервалов только тогда, когда максимальны (минимальны) его нижняя граница – среди нижних границ всех интервалов и верхняя граница – среди верхних границ всех интервалов. Подобно случаю сравнения двух интервалов, сравнение произвольного числа интервалов не выявит экстремального интервала, если интервалы, входящие в систему, попарно не сравнимы.

До сих пор мы рассматривали процедуры выделения, вообще говоря, нестрого максимального (нестрого минимального) интервала, основанные на теоретико-множественных операциях (8) вычисления нестрогого максимума (нестрогого минимума) двух интервалов. Аналогично этому вводятся процедуры выделения строго максимального (строго минимального) интервала, т.е. единственного интервала, являющегося максимальным (минимальным).

Будем считать равными по определению совпадающие интервалы, т.е. для произвольных интервалов $\tilde{a}=[a_1,a_2]$ и $\tilde{b}=[b_1,b_2]$, условие их равенства вводится таким образом:

$$(\tilde{a} = \tilde{b}) \Leftrightarrow (a_1 = b_1, a_2 = b_2). \tag{15}$$

Из выражения (15) следует, что неравными являются интервалы, удовлетворяющие следующему условию:

$$(\tilde{a} \neq \tilde{b}) \Leftrightarrow (a_1 \neq b_1 \text{ или } a_2 \neq b_2)\,. \tag{16}$$

Теперь определение того факта, что некоторый интервал $\tilde{a}$ является строго максимальным из двух интервалов $\tilde{a},\tilde{b}$, можно записать в виде

$$(\tilde{a} > \tilde{b}) \Leftrightarrow (\tilde{a} \vee \tilde{b} = \tilde{a},\, \tilde{a} \wedge \tilde{b} = \tilde{b},\, \tilde{a} \neq \tilde{b})\,, \tag{17}$$

аналогичным образом, определение того, что некоторый интервал $\tilde{a}$ является строго минимальным из двух интервалов $\tilde{a},\tilde{b}$, записывается в виде

$$(\tilde{a} < \tilde{b}) \Leftrightarrow (\tilde{a} \vee \tilde{b} = \tilde{b},\, \tilde{a} \wedge \tilde{b} = \tilde{a},\, \tilde{a} \neq \tilde{b})\,. \tag{18}$$

Здесь $\vee$ и $\wedge$ – теоретико-множественные операции (8) вычисления максимума и минимума двух интервалов.

Из формулировки условий (17), (18) сравнимости интервалов в виде строгих неравенств между ними можно вывести различные конструктивные формы этих условий, удобные для использования. Такие формы содержатся в теоремах 5–8, которые подобны теоремам 1–4, дающим удобные конструктивные формы сравнимости интервалов в виде нестрогих неравенств.

Теорема 5. Для того чтобы два интервала $\tilde{a}=[a_1,a_2],\tilde{b}=[b_1,b_2]$ были сравнимы по величине и находились в отношении $\tilde{a}>\tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$(a_1>b_1, a_2\geq b_2) \text{ или } (a_1\geq b_1, a_2>b_2), \tag{19}$$

а для того чтобы эти интервалы были сравнимы по величине и находились в отношении $\tilde{a}<\tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$(a_1<b_1, a_2\leq b_2) \text{ или } (a_1\leq b_1, a_2<b_2). \tag{20}$$

Из теоремы 5 ясно, что интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ сравнимы по величине (отношению $>$ или $<$) и находятся в указанном отношении лишь тогда, когда в том же отношении находятся их нижние границы a_1,b_1 (при этом верхние границы a_2,b_2 находятся в соответствующем нестрогом отношении – для $>$ это $\geq$, а для $<$ это $\leq$) или же, наоборот, их верхние границы (при этом нижние границы a_1,b_1 находятся в соответствующем нестрогом отношении).

Теорема 6. Для того чтобы два интервала $\tilde{a}=[a_1,a_2]$ и $\tilde{b}=[b_1,b_2]$ были не сравнимы по величине (по отношению $>$ или $<$), т.е. не находились в отношении $\tilde{a}>\tilde{b}$ или $\tilde{a}<\tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$(a_1<b_1, a_2>b_2) \text{ или } (b_1<a_1, b_2>a_2) \text{ или } (a_1=b_1, a_2=b_2). \tag{21}$$

Итак, произвольные интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ не сравнимы по отношениям $>$ и $<$ только в тех случаях, когда один из них полностью накрывает другой либо когда интервалы равны между собой.

Значение теоремы 6 в том, что она показывает существование случаев несравнимости интервалов по отношениям $>$ и $<$ даже тогда, когда сравниваемые интервалы не равны между собой, а только накрывают один другой. Эта ситуация отличается от ситуации со сравнением вещественных чисел, где неравные числа всегда сравнимы по отношениям $>$ и $<$.

Рассмотрим теперь систему нескольких интервалов (12). Сравнение по отношениям $>$ и $<$ величин интервалов системы (12), рассматриваемых как интервальные числа, реализуется путем попарного сравнения этих интервалов, в соответствии с теоремами 5 и 6. Основные результаты, получаемые этим путем, изложены в теоремах 7, 8.

Теорема 7. Для того чтобы в системе нескольких интервалов (12) существовал максимальный интервал, который находится со всеми остальными интервалами в отношении $>$, и этим интервалом был $\tilde{a}_1$, необходимо и достаточно, чтобы границы этого интервала были расположены относительно одноименных границ всех остальных интервалов согласно условиям

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}>a_{21}, a_{12}\geq a_{22}) \text{ или } (a_{11}\geq a_{21}, a_{12}>a_{22})\\ (a_{11}>a_{31}, a_{12}\geq a_{32}) \text{ или } (a_{11}\geq a_{31}, a_{12}>a_{32})\\ (a_{11}>a_{41}, a_{12}\geq a_{42}) \text{ или } (a_{11}\geq a_{41}, a_{12}>a_{42})\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\}. \tag{22}$$

Теорема 8. Для того чтобы в системе нескольких интервалов (12) существовал минимальный интервал, который находится со всеми остальными интервалами в отношении $<$, и этим интервалом являлся $\tilde{a}_1$, необходимо и достаточно, чтобы границы данного интервала были расположены относительно одноименных границ всех остальных интервалов согласно условиям

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}<a_{21}, a_{12}\leq a_{22}) \text{ или } (a_{11}\leq a_{21}, a_{12}<a_{22})\\ (a_{11}<a_{31}, a_{12}\leq a_{32}) \text{ или } (a_{11}\leq a_{31}, a_{12},<a_{32})\\ (a_{11}<a_{41}, a_{12}\leq a_{42}) \text{ или } (a_{11}\leq a_{41}, a_{12}<a_{42})\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\}. \tag{23}$$

4 АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В предыдущем разделе мы изложили вспомогательный для задачи анализа поведения интервальной функции материал, связанный со сравнением интервальных величин. Теперь мы займемся собственно анализом поведения интервальных функций.

Рассмотрим произвольную интервальную функцию (2). Будем считать, что эта функция задана в разделенном виде (5), (6). Это не ограничивает общности рассмотрения, так как функция, заданная в неразделенном виде, всегда может быть приведена к разделенному виду (п. 2). Будем также полагать, что нижняя и верхняя граничные функции интервальной функции непрерывны и дифференцируемы. Сформулируем условия, при которых функция возрастает, убывает, остается постоянной, достигает максимума (минимума), ведет себя иным способом.

По аналогии с обычными (детерминированными) функциями [1] мы введем понятия возрастания, убывания, постоянства, максимума и минимума интервальной функции.

Определение 1. Интервальная функция $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ называется возрастающей на интервале (a,b), если для любых x_1 и x_2 из указанного интервала, для которых $x_1<x_2$, выполняется неравенство $\tilde{f}(x_1)<\tilde{f}(x_2)$.

Определение 2. Интервальная функция $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ называется убывающей на интервале (a,b), если для любых x_1 и x_2 из данного интервала, для которых $x_1<x_2$, выполняется неравенство $\tilde{f}(x_1)>\tilde{f}(x_2)$.

Определение 3. Интервальная функция $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ называется постоянной на интервале (a,b), если для любых x_1 и x_2 из этого интервала, для которых $x_1<x_2$, выполняется равенство $\tilde{f}(x_1)=\tilde{f}(x_2)$.

Определение 4. Точка $x=x_0$ называется точкой максимума заданной интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$, а само число $\tilde{f}(x_0)$ – максимумом этой функции, если для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0, не совпадающих с x_0, истинно строгое неравенство $\tilde{f}(x_0)>\tilde{f}(x)$.

Определение 5. Точка $x=x_0$ называется точкой минимума интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$, а число $\tilde{f}(x_0)$ – минимумом этой функции, если для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0, не совпадающих с x_0, выполняется строгое неравенство $\tilde{f}(x_0)<\tilde{f}(x)$.

Определение 6. Интервальная функция $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ называется расширяющейся на интервале (a,b), если для любых точек x_1 и x_2 из этого интервала, для которых $x_1<x_2$, интервал $\tilde{f}(x_2)$ полностью «накрывает» интервал $\tilde{f}(x_1)$.

Определение 7. Интервальная функция $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ называется сужающейся на интервале (a,b), если для любых точек x_1,x_2 из этого интервала, для которых $x_1<x_2$, интервал $\tilde{f}(x_1)$ полностью накрывает интервал $\tilde{f}(x_2)$.

Определение 8. Точку $x=x_0$ будем называть точкой максимального расширения интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$, а число $D(x_0)=f_2(x_0)-f_1(x_0)$ – максимальной шириной указанной функции, если для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0, не совпадающих с x_0, интервал полностью накрывает интервал $\tilde{f}(x)$.

Определение 9. Точку $x=x_0$ будем называть точкой максимального сужения интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$, а число $d(x_0)=f_2(x_0)-f_1(x_0)$ – минимальной шириной функции $\tilde{f}(x)$, если для всех точек x некоторой окрестности точки x_0, не совпадающих с x_0, интервал $\tilde{f}(x)$ полностью «накрывает» $\tilde{f}(x_0)$.

Сформулируем и докажем условия, которые определяют то или иное поведение интервальной функции.

Теорема 9. Для того чтобы интервальная функция $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ являлась возрастающей на интервале (a,b), необходимо и достаточно, чтобы на указанном интервале ее нижняя граничная функция $f_1(x)$ была возрастающей, а верхняя граничная функция $f_2(x)$ – неубывающей либо, наоборот, функция $f_2(x)$ была возрастающей, а функция $f_1(x)$ – неубывающей.

Доказательство. Представим нашу интервальную функцию $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ в интервальной форме (5): $\tilde{y}=[f_1(x),f_2(x)]$. Возрастание данной функции на интервале (a,b) по определению (1) означает, что для любых x_1,x_2 из этого интервала, таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $[f_1(x_1),f_2(x_1)]<[f_1(x_2),f_2(x_2)]$, которое, по теореме 5, приводит к двум возможным вариантам:

$$f_1(x_1)<f_1(x_2),\ f_2(x_1)\le f_2(x_2) \text{ или } f_1(x_1)\le f_1(x_2),\ f_2(x_1)<f_2(x_2).$$

Итак, либо на всем интервале (a,b) нижняя граничная функция $f_1(x)$ нашей интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ является возрастающей, а верхняя граничная функция $f_2(x)$ – неубывающей либо наоборот, $f_2(x)$ является возрастающей, $f_1(x)$ – неубывающей, что и требовалось доказать.

Теорема 10. Для того чтобы интервальная функция $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ была убывающей на интервале (a,b), необходимо и достаточно, чтобы на указанном интервале ее нижняя граничная функция $f_1(x)$ была убывающей, а верхняя граничная функция $f_2(x)$ – невозрастающей либо, наоборот, функция $f_2(x)$ была убывающей, а функция $f_1(x)$ – невозрастающей.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9, однако использует определение 2 вместо определения 1.

Теорема 11. Для того чтобы интервальная функция $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ была постоянной на интервале (a,b), необходимо и достаточно, чтобы на этом интервале ее нижняя $f_1(x)$ и верхняя $f_2(x)$ граничные функции были постоянными.

Доказательство следует прямо из определения интервала как множества всех вещественных чисел между заданными двумя числами – границами интервала, включая сами границы.

Теорема 12. Для того чтобы $x=x_0$ была точкой максимума интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$, а число $\tilde{f}(x_0)$ – максимумом этой функции, необходимо и достаточно, чтобы в указанной точке достигала максимума ее нижняя граничная функция $f_1(x)$ и не достигала минимума ее верхняя граничная функция $f_2(x)$ либо, наоборот, достигала максимума ее верхняя граничная функция $f_2(x)$ и не достигала минимума ее нижняя граничная функция $f_1(x)$.

Доказательство. Представим нашу интервальную функцию $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ в интервальной форме (5): $\tilde{y}=[f_1(x),f_2(x)]$. Существование максимума этой функции в точке $x=x_0$ по определению 4 означает, что для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0, не совпадающих с x_0, выполняется неравенство $\tilde{f}(x_0)>\tilde{f}(x)$ или, в интервальной форме $[f_1(x_0),f_2(x_0)]>[f_1(x),f_2(x)]$, причем последнее неравенство, согласно теореме 5, эквивалентно условию

$$(f_1(x_0)>f_1(x),\ f_2(x_0)\ge f_2(x)) \text{ или } (f_1(x_0)\ge f_1(x),\ f_2(x_0)>f_2(x)).$$

Условия левой скобки показывают, что в точке x_0 функция $f_1(x)$ обращается в максимум, функция $f_2(x)$ при этом не обращается в минимум. Условия правой скобки говорят, что в точке x_0 функция $f_2(x)$ обращается в максимум, а функция $f_1(x)$ не обращается в минимум, что и требовалось доказать.

Теорема 13. Для того чтобы $x=x_0$ была точкой минимума интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$, а число $\tilde{f}(x_0)$ – минимумом этой функции, необходимо и достаточно, чтобы в указанной точке достигала минимума ее нижняя граничная функция $f_1(x)$ и не достигала максимума ее верхняя граничная функция $f_2(x)$ либо, наоборот, достигала минимума ее верхняя граничная функция $f_2(x)$ и не достигала максимума ее нижняя граничная функция $f_1(x)$.

Доказательство теоремы 13 аналогично доказательству теоремы 12, но использует определение 5.

Теорема 14. Для того чтобы интервальная функция $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ являлась расширяющейся на интервале (a,b), необходимо и достаточно, чтобы на этом интервале была убывающей ее нижняя граничная функция $f_1(x)$ и была возрастающей ее верхняя граничная функция $f_2(x)$.

Доказательство. Для любых точек x_1,x_2 из интервала (a,b), таких, что $x_1<x_2$, в силу расширения функции f

на этом интервале должно выполняться условие: интервал $\tilde{f}(x_2)$ полностью накрывает интервал $\tilde{f}(x_1)$. Выражая интервалы $\tilde{f}(x_1)$ и $\tilde{f}(x_2)$ в явной интервальной форме $\tilde{f}(x_1)=[f_1(x_1),f_2(x_1)], \tilde{f}(x_2)=[f_1(x_2),f_2(x_2)]$, имеем условие накрытия интервалов:

$$f_1(x_2)<f_1(x_1),\ f_2(x_2)>f_2(x_1).$$

Первое из неравенств показывает, что функция $f_1(x)$ убывающая, а второе – что функция $f_2(x)$ возрастающая. Что и требовалось доказать.

Теорема 15. Для того чтобы интервальная функция $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ была сужающейся на интервале (a,b), необходимо и достаточно, чтобы на данном интервале была убывающей ее верхняя граничная функция $f_2(x)$ и была возрастающей ее нижняя граничная функция $f_1(x)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 14.

Теорема 16. Для того чтобы точка $x=x_0$ являлась точкой максимального расширения интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$, а число $D(x_0)=f_2(x_0)-f_1(x_0)$ – максимальной шириной этой функции, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности точки x_0 слева функция $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ была расширяющейся, а в некоторой окрестности точки x_0 справа она была сужающейся.

Теорема 17. Для того чтобы точка $x=x_0$ была точкой максимального сужения интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$, а число $d(x_0)=f_2(x_0)-f_1(x_0)$ минимальной шириной данной функции, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности точки x_0 слева функция $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ была сужающейся, а в некоторой окрестности точки x_0 справа она была расширяющейся.

Доказательства теорем 16, 17 вытекают прямо из определений 8, 9 точек максимального расширения и сужения интервальной функции.

Анализ поведения интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$, как показывает изложенный в этом параграфе материал, всегда сводится к анализу поведения двух обычных детерминированных функций: нижней $f_1(x)$ и верхней $f_2(x)$ граничных функций функции $\tilde{f}(x)$. Это позволяет нам использовать для анализа поведения интервальных функций хорошо известные и разработанные методы анализа поведения обычных (детерминированных) функций, основанные на применении классического дифференциального исчисления [1]. При этом алгоритм анализа поведения произвольной интервальной функции может быть описан следующим образом.

Шаг 1. Проверка формы, в которой представлена интервальная функция $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$, подлежащая анализу. Если она неразделенная, т.е. не имеющая вид интервала $\tilde{y}=[y_1,y_2]=[f_1(x),f_2(x)]$, где $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ – соответственно нижняя и верхняя граничные функции заданной интервальной функции, то выполняем переход к шагу 2. Если она разделенная, т.е. имеющая указанный вид, то переход к шагу 3.

Шаг 2. Приведение функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ из неразделенного вида к разделенному с помощью основных формул интервальной математики (7) (см. пример 1).

Шаг 3. Анализ поведения нижней граничной функции $y_1=f_1(x)$ нашей интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ с помощью известных методов анализа поведения обычных (детерминированных) функций, на основе классического дифференциального исчисления. В ходе анализа устанавливаем интервалы возрастания и убывания функции f_1 и точки ее максимумов и минимумов.

Шаг 4. Анализ поведения верхней граничной функции $y_2=f_2(x)$ той же самой интервальной функции. Он выполняется теми же методами и по той же программе, что и предыдущий шаг.

Шаг 5. Составление сводной таблицы поведения граничных функций $y_1=f_1(x), y_2=f_2(x)$ путем заполнения в ней первых трех строк (табл. 1), в соответствии с результатом анализа поведения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (шаги 3, 4).

Шаг 6. Анализ сводной таблицы с помощью теорем 9–15, позволяющих идентифицировать последовательные интервалы $(-\infty,x_1),(x_1,x_2),...,(x_{n-1},x_n),(x_n,\infty)$ в ней как интервалы возрастания, убывания, расширения или сужения анализируемой интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$, а промежуточные точки $x_1,x_2,...,x_n$ между интервалами как точки максимума (минимума) или точки максимума (минимума) ее расширения или сужения. Например, если на некотором интервале (x_i,x_{i+1}) функция $f_2(x)$ возрастает, а на соседнем интервале (x_{i+1},x_{i+2}) убывает, так что в точке x_{i+1} она максимальна, и при этом функция $f_1(x)$ на обоих интервалах постоянная, то согласно теоремам 9, 10, 12 интервальная функция $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ на интервале (x_i,x_{i+1}) возрастает, в точке x_{i+1} достигает максимума, затем на интервале (x_{i+1},x_{i+2}) убывает.

После выполнения шага 6 заполняется четвертая строка сводной таблицы поведения и на этом анализ поведения заданной интервальной функции заканчивается.

5 РЕЗУЛЬТАТЫ

Характерный возможный вид четвертой строки сводной таблицы поведения интервальной функции проиллюстрирован в табл. 1.

По результатам анализа можно вычертить график функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ (рис. 1).

6 ОБСУЖДЕНИЕ

Проблема анализа поведения неполностью определенных функций существенно отличается от аналогичной проблемы для полностью определенных функций, что связано с известным отличием проблемы сравнения неполностью определенных (в рассматриваемом случае – интервальных) чисел от проблемы сравнения полностью определенных чисел.

Вследствие этих отличий для анализа поведения полностью определенных функций имеются простые и ясные методики, основанные на использовании дифференциального исчисления, позволяющие разбить область определения любой функции на подобласти, в которых

Таблица 1 – Фрагмент сводной таблицы поведения интервальной функции

y	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	(x_2,x_3)	x_3	(x_3,x_4)	…	(x_{n-1},x_n)	x_n	(x_n,∞)
$y_1=f_1(x)$	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная	…	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная
$y_2=f_2(x)$	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная	…	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная
$\tilde{y}=\tilde{f}(x)$	возрастание	максимум	убывание	минимум	расширение	максимальное расширение	сужение	…	сужение	максимальное сужение	расширение

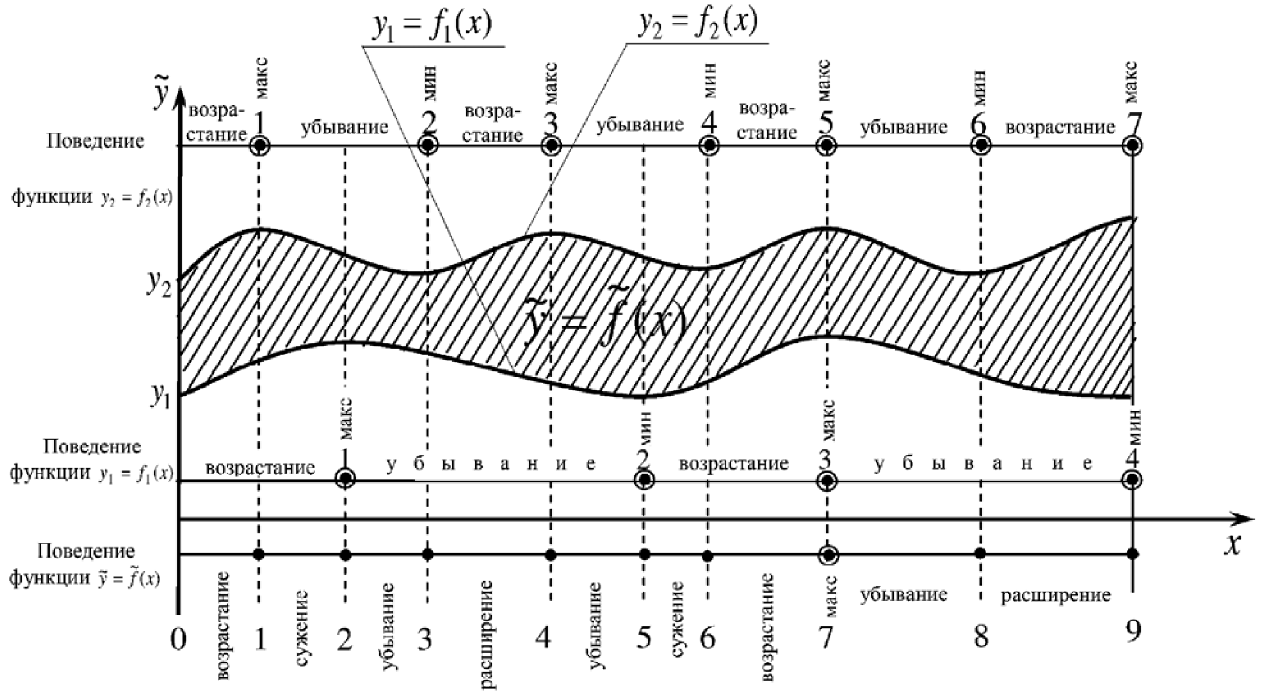

Рисунок 1 – Пример интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ ($y_1=f_1(x)$ – нижняя граничная функция, $y_2=f_2(x)$ – верхняя граничная функция)

функция изменяется монотонно: возрастает или убывает, в то время как анализ поведения неполностью определенной – интервальной – функции оказывается более сложным.

Этот анализ, как показано в статье, базируется на сравнении интервалов путем сравнения их границ и далее сводится к анализу поведения двух полностью определенных функций, являющихся нижней и верхней граничными функциями исходной интервальной функции.

Такой анализ позволяет разбить область определения произвольной неполностью определенной (интервальной) функции на подобласти, в которых интервал возможных значений функции изменяется одним из четырех способов: монотонно возрастает, монотонно убывает, монотонно расширяется, монотонно сужается.

При этом, если первые два способа поведения недетерминированной (интервальной) функции аналогичны соответствующим способам поведения полностью определенной (детерминированной) функции, то третий и четвертый способы поведения интервальной функции являются принципиально новыми и невозможны у полностью определенных функций. Последние два способа поведения интервальной функции возникают вследствие появления у функции подобластей, в которых различные значения этой функции несравнимы и потому стандартное поведение функции – возрастание или убывание – оказывается невозможным. Конечно, два указанных нестандартных способа поведения интервальной функции являются следствием недостатка информации об этой функции, проявляющемся в ее неточном, интервальном задании.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье сформулирована и рассмотрена задача вычисления и анализа поведения неполностью определенной функции, заданной с точностью до интервала значений.

В качестве математического аппарата использованы интервальная алгебра и дифференциальные характеристики верхней и нижней границ интервальных функций, которые можно рассматривать как специальное дифференциальное исчисление для неточно задаваемых функций интервального типа.

Разработаны систематические методы решения задач расчета и анализа поведения недетерминированных функций интервального типа, в которых функции определяются с точностью до интервала возможных значений.

Предложен алгоритм детерминизации, который позволяет свести решаемую задачу к двум аналогичным – для верхней и нижней граничных функций исходной неполностью определенной функции.

Выделены различные типы возможного поведения интервальных функций (постоянство, возрастание, убывание, расширение, сужение) и различные типы экстремальных точек таких функций (например, точка максимума, точка минимума, точка максимального расширения, точка минимального расширения).

Доказаны теоремы, которые позволяют определять участки различного поведения интервальных функций и точки с различными видами экстремума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Физматлит, 2001. – 616 с.
2. Левин В. И. Интервальная производная и начала недетерминистского дифференциального исчисления / В. И. Левин // Онтология проектирования. – 2013. – № 4. – С. 72–84.
3. Wiener N. Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series / N. Wiener. – N.Y.: Technology Press and Wiley, 1949. – 180 p. (рассекреченный отчет 1942 года).
4. Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей / А. Н. Колмогоров // Известия АН СССР. Математика. – 1941. – № 5. – С. 3–14.
5. Налимов В. В. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов / В. В. Налимов, Н. А. Чернова. – М. : Наука, 1965. – 340 с.
6. Налимов В. В. Теория эксперимента / В. В. Налимов, Н. А. Чернова. – М. : Наука, 1971. – 320 с.
7. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. А. Заде. – М. : Мир, 1976. – 176 с.
8. Нариньяни А. С. Недоопределенность в системе представления и обработки знаний / А. С. Нариньяни // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1986. – № 5. – С. 17–25.
9. Hyvonen E. Constraint Reasoning Based on Interval Arithmetic: the Tolerance Propagation Approach / E. Hyvonen // Artificial Intelligence. – 1992. Vol. 58. – P. 19.
10. Moore R. E. Interval Analysis / R. E. Moore. – N. Y. : Prentice-Hall, 1966. – 230 p.
11. Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М. : Мир, 1987. – 360 с.
12. Канторович Л. В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений / Л. В. Канторович // Сибирский математический журнал. – 1962. Т. 3, № 5.
13. Вощинин А. П. Оптимизация в условиях неопределенности / А. П. Вощинин, Г. Р. Сотиров. – М. : МЭИ-Техника, 1989. – 226 с.
14. Вощинин А. П. Интервальный анализ данных / А. П. Вощинин, А. Ф. Бочков, Г. Р. Сотиров // Заводская лаборатория. – 1990. – № 7. – С. 76–81.
15. Куржанский А. Б. Задача идентификации – теория гарантированных оценок / А. Б. Куржанский // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 4. – С. 75–89.
16. Вощинин А. П. Интервальный метод калибровки / А. П. Вощинин // Датчики и системы. – 2000. – № 7. – С. 63–69.
17. Милн В. Э. Численный анализ / В. Э. Милн. – М. : Издательство иностранной литературы, 1980. – 350 с.
18. Левин В. И. Интервальные методы оптимизации систем в условиях неопределенности / В. И. Левин. – Пенза : Изд-во Пензенского технологического ин-та, 1999. – 101 с.
19. Левин В. И. Оптимизация в условиях интервальной неопределенности. Метод детерминизации / В. И. Левин // Автоматика и вычислительная техника. – 2012. – № 4. – С. 157–163.
20. Tsoukias A. A Characterization of PQI Interval Orders / A. Tsoukias, P. Vincke // Discrete Applied Mathematics. – 2003. – № 127 (2). – P. 387–397.
21. Ozturk M. Positive and Negative Reasons in the Interval Comparisons: Valued PQI Interval Orders / M. Ozturk, A. Tsoukias // Proceedings of the 10th Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU-2004), Perugia, Italy, July 4–9, 2004. – P. 983–989.
22. Давыдов Д. В. Идентификация параметров линейных интервальных управляемых систем с интервальным наблюдением / Д. В. Давыдов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2008. – № 6. – С. 25–29.
23. Пиявский С.А. Простой и универсальный метод принятия решений в пространстве критериев «стоимость-эффективность» / С. А. Пиявский // Онтология проектирования. – 2014. – № 3. – С. 89–102.
24. Боргест Н.М. Ключевые термины онтологии проектирования / Н.М. Боргест // Онтология проектирования. – 2013. – № 3. – С. 9–31.

Статья поступила в редакцию 10.01.2016.

После доработки 25.01.2013.

Левін В. І.

Д-р техн. наук, професор, провідний науковий співробітник Пензенського державного технологічного університету, Пенза, Росія

РОЗРАХУНОК І АНАЛІЗ ПОВОДЖЕННЯ НЕЦІЛКОМ ВИЗНАЧЕНИХ ФУНКЦІЙ МЕТОДОМ ДЕТЕРМІНІЗАЦІЇ

Розглянуто існуючі підходи до розрахунку, аналізу, синтезу й оптимізації систем в умовах невизначеності. Дослідження невизначених систем формулюється у виді задач розрахунку, аналізу і синтезу різних функцій з недетермінованими параметрами, що слугують відповідними характеристиками даних систем. Усі ці задачі є значно складнішими за їхніх детермінованих аналогів, що приходиться вирішувати при дослідженні систем з детермінованими (точно відомими) параметрами. Таке ускладнення пов’язане з тим, що алгебра недетермінованих чисел є складнішою алгебри детермінованих чисел. У статті сформульована і докладно описана задача обчислення й аналізу поводження нецілком визначеної функції, заданої з точністю до інтервалу значень. Для вирішення зазначеної задачі запропонований алгоритм детермінізації, що дозволяє звести задачу до двох аналогічних – для верхньої і нижньої граничних функцій вихідної нецілком визначеної функції. У цьому алгоритмі автором використаний апарат інтервальної математики та інтервально-диференційного числення. Далі виділені різні типи можливого поводження інтервальних функцій (сталість, зростання, убування, розширення, звуження) і різні типи екстремальних точок таких функцій (наприклад, точка максимуму, точка мінімуму, точка максимального розширення, точка мінімального розширення). Доведено теореми, що дозволяють визначати ділянки різного поводження інтервальних функцій і точки з різними видами екстремума. Докладно розглянута робота запропонованого алгоритму детермінізації, що дозволяє аналізувати поводження інтервальних функцій. Робота проілюстрована на конкретному прикладі.

Ключові слова: оптимізація, детермінована функція, інтервальна функція, аналіз поводження функцій, невизначеність.

Levin V. I.
Dr Sc., Professor of Mathematical Department of Penza State Technological University, Penza, Russia

CALCULATION AND ANALYSIS OF INCOMPLETELY DEFINED FUNCTIONS BY DETERMINATION METHOD

This article reviews current approaches to the calculation, analysis, synthesis and optimization under uncertainty. Studying uncertain systems is formulated as problems of the calculation, analysis and synthesis of various non-deterministic functions with parameters that serve as the relevant characteristics of these systems. All these problems are much more difficult their deterministic counterparts which should be solved in the study of systems with deterministic (exactly known) parameters. Complexity is due to the fact that the non-deterministic algebra is more complicated then algebra of deterministic numbers. The article stated and described in detail the problem of calculating and analyzing the behavior of a function which is given up to a range of values. To solve this problem, the algorithm of determination is presented. This algorithm reduces the problem to the two same – for the lower and upper boundary functions of the original incompletely defined function. In this algorithm author uses interval mathematics and interval-differential calculus. The different types of possible behavior of interval functions are highlighted (consistency, increase, decrease, expansion, contraction) and various types of extreme points of such functions (for example, the maximum point, a minimum point, the point of maximum expansion, the point of minimum extension) are shown. Theorems that allow you to define areas of different behavior of interval functions and points with different types of extreme are proved. The work of the proposed algorithm of determination for analyzing the behavior of interval functions is considered in detail. Operation of algorithm is illustrated by concrete example.

Keywords: optimization, deterministic function, non-deterministic function, uncertainty, analysis of behavior of function, uncertainty.

REFERENCES

1. Fihtengolc G.M. Kurs differencialnogo i integralnogo ischisleniya. V. 1. Moscow, Fizmatlit, 2001, 616 p.
2. Levin V.I. Intervalnaya proizvodnaya i nachala nedeterministskogo differencialnogo ischisleniya, *Ontologiya proektirovaniya*, 2013, No. 4, pp. 72–84.
3. Wiener N. Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. N.Y., Technology Press and Wiley, 1949, 180 p. (expired report of 1942 year).
4. Kolmogorov A. N. Interpolirovanie i extrapolirovanie stacionarnyh sluchaynyh posledovatelnostey, *Izvestiya AN SSSR: Seriya Mathematicheskaya*, 1941, No. 5, pp. 3–14.
5. Nalimov V. V., Chernova N. A. Statisticheskie metody planirovaniya extremalnyh exsperimentov. Moscow, Nauka, 1965, 340 p.
6. Nalimov V. V., Chernova N. A. Teoriya experimenta. Moscow, Nauka, 1971, 320 p.
7. Zadeh L. A. The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning, *Information Sciences*, 1975, No. 8; 9, pp. 199–249, 301–357; 43–80.
8. Narinyani A. S. Nedoopredelennost v sisteme predstavleniya i obrabotki znaniy, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1986. Vol. 24, No. 5, pp. 17–25.
9. Hyvonen E. Constraint Reasoning Based on Interval Arithmetic: the Tolerance Propagation Approach, *Artificial Intelligence*, 1992, Vol. 58, pp. 19.
10. Moore R.E. Interval Analysis. N. Y., Prentice-Hall, 1966, 230 p.
11. Alefeld G., Herzberger J. Introduction to Interval Computation. N.Y., Academic Press, 1983, 352 p.
12. Kantorovich L.V. O nekotoryh novyh podhodah k vychislitelnym metodam i obrabotke nablyudeniy, *Siberian Mathematical Journal*, 1962, Vol. 3, No. 5.
13. Voschinin A.P. G.R. Sotirov. Optimizaciya v usloviyah neopredelennosti. Moscow, MEI-Tehnika, 1989, 226 p.
14. Voschinin A. P., Bochkov A. F., Sotirov G. R. Intervalniy analiz dannyh. Industrial Laboratory, 1990, Vol. 56, No. 7, pp. 76–81.
15. Kurzhanskii A.B. Identification Problem – Theory of Guaranteed Estimates, *Automation and Remote Control*, 1991, Vol. 52, No. 4, Part 1, pp. 447–465.
16. Voschinin A.P. Intervalniy metod kalibrovki, *Datchiki i Sistemy*, 2000, No. 7, pp. 63–69.
17. Milne W. E. Numerical Calculus. Princeton, University Press, 1949, 393 p.
18. Levin V. I. Intervalnye metody optimizacii system v usloviyah neopredelennosti. Penza, Penza Technological Institute Publishing, 1999, 95 p.
19. Levin V.I. Optimization in Terms of Interval Uncertainty: The Determinization Method, *Automatic Control and Computer Sciences*, 2012, Vol. 46, No. 4, pp. 157–163.
20. Tsoukias A., Vincke P. A Characterization of PQI Interval Orders, *Discrete Applied Mathematics*, 2003, No. 127 (2), pp. 387–397.
21. Ozturk M., Tsoukias A. Positive and Negative Reasons in the Interval Comparisons: Valued PQI Interval Orders, *Proceedings of the 10th Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU-2004)*, Perugia, Italy, July 4–9, 2004, pp. 983–989.
22. Davydov D. V. Identification of Parameters of Linear Interval Controllable Systems with the Interval Observation, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2008, Vol. 47, No. 6, pp. 861–865.
23. Piyavskiy S. A. Prostoy i universalniy metod prinyatiya resheniy v prostranstve kriteriev “stoimost-effektivnost”, *Ontologiya proektirovaniya*, 2014, No. 3, pp. 89–102.
24. Borgest N. M. Klyuchevye terminy ontologii proektirovaniya, *Ontologiya proektirovaniya*, 2013, No. 3, pp. 9–31.