

p-ISSN 1607-3274  
e-ISSN 2313-688X

Радіоелектроніка  
Інформатика  
Управління



Radio Electronics  
Computer Science  
Control

Радиоэлектроника  
Информатика  
Управление



2021/3



Національний університет «Запорізька політехніка»

## **Радіоелектроніка, інформатика, управління**

Науковий журнал

Виходить чотири рази на рік

№ 3(58) 2021

Заснований у січні 1999 року.

Засновник і видавець – Національний університет «Запорізька політехніка».

ISSN 1607-3274 (друкований), ISSN 2313-688X (електронний).

Запоріжжя

НУ «Запорізька політехніка»

2021

National University «Zaporizhzhia Polytechnic»

## **Radio Electronics, Computer Science, Control**

The scientific journal

Published four times per year

№ 3(58) 2021

Founded in January 1999.

Founder and publisher – National University «Zaporizhzhia Polytechnic».

ISSN 1607-3274 (print), ISSN 2313-688X (on-line).

Zaporizhzhia

NU «Zaporizhzhia Polytechnic»

2021

Национальный университет «Запорожская политехника»

## **Радиоэлектроника, информатика, управление**

Научный журнал

Выходит четыре раза в год

№ 3(58) 2021

Основан в январе 1999 года.

Основатель и издатель – Национальный университет «Запорожская политехника».

ISSN 1607-3274 (печатный), ISSN 2313-688X (электронный).

Запорожье

НУ «Запорожская политехника»

2021

**Науковий журнал «Радіоелектроніка, інформатика, управління»** (скорочена назва – РІУ) видається Національним університетом «Запорізька політехніка» (НУ «Запорізька політехніка») з 1999 р. періодичністю чотири номери на рік.

Зареєстровано у Міністерстві юстиції України 19.11.2019 р. (Свідчення про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації серія КВ № 24220-14060 ПР.)

ISSN 1607-3274 (друкований), ISSN 2313-688X (електронний).

Наказом Міністерства освіти і науки України № 409 від 17.03.2020 р. «Про затвердження рішень Атестаційної колегії Міністерства щодо діяльності спеціалізованих вчених рад від 06 березня 2020 року» журнал включений до переліку наукових фахових видань України в категорії «А» (найвищий рівень), в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора наук і доктора філософії (кандидата наук).

Журнал включений до польського Переліку наукових журналів та рецензованих матеріалів міжнародних конференцій з присвоєною кількістю балів (додаток до оголошення Міністра науки та вищої освіти Республіки Польща від 31 липня 2019 р.: № 16981).

В журналі безкоштовно публікуються наукові статті англійською, російською та українською мовами.

**Правила оформлення статей** подано на сайті: <http://ric.zntu.edu.ua/information/authors>.

Журнал забезпечує **безкоштовний відкритий он-лайн доступ** до повнотекстових публікацій.

Журнал дозволяє авторам мати авторські права і зберігати права на видання без обмежень. Журнал дозволяє користувачам читати, завантажувати, копіювати, поширювати, друкувати, шукати або посилатися на повні тексти своїх статей. Журнал дозволяє повторне використання його вмісту у відповідності Creative Commons ліцензіїю CC BY-SA..

Опублікованим статтям присвоюється унікальний ідентифікатор цифрового об'єкта DOI.

**Журнал входить до наукометричної бази Web of Science.**

**Журнал реферується та індексується** у провідних міжнародних та національних реферативних журналах і наукометричних базах даних, а також розміщується у цифрових архівах та бібліотеках з безкоштовним доступом у режимі on-line, повний перелік яких подано на сайті: <http://ric.zntu.edu.ua/about/editorialPolicies#custom-0>.

**Журнал розповсюджується** за Каталогом періодичних видань України (передплатний індекс – 22914).

**Тематика журналу:** телекомунікації та радіоелектроніка, програмна інженерія (включаючи теорію алгоритмів і програмування), комп'ютерні науки (математичне і комп'ютерне моделювання, оптимізація і дослідження операцій, управління в технічних системах, міжмашинна і людино-машинна взаємодія, штучний інтелект, включаючи системи, засновані на знаннях, і експертні системи, інтелектуальний аналіз даних, розпізнавання образів, штучні нейронні і нейро-нечіткі мережі, нечітку логіку, колективний інтелект і мультиагентні системи, гібридні системи), комп'ютерна інженерія (апаратне забезпечення обчислювальної техніки, комп'ютерні мережі), інформаційні системи та технології (структури та бази даних, системи, засновані на знаннях та експертні системи, обробка даних і сигналів).

Усі статті, пропонувані до публікації, одержують **об'єктивний розгляд**, що оцінюється за суттю без урахування раси, статі, віросповідання, етнічного походження, громадянства або політичної філософії автора(ів).

Усі статті проходять двоступінчасте закриті (анонімне для автора) **рецензування** штатними редакторами і незалежними рецензентами – провідними вченими за профілем журналу.

## РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

**Головний редактор – Субботін Сергій Олександрович** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри програмних засобів, Національний університет «Запорізька політехніка», Україна.

**Заступник головного редактора – Піза Дмитро Макарович** – доктор технічних наук, професор, директор інституту інформатики та радіоелектроніки, професор кафедри радіотехніки та телекомунікацій, Національний університет «Запорізька політехніка», Україна.

### Члени редколегії:

**Андрюлідакіс Іосіф** – доктор філософії, голова департаменту телефонії Центру обслуговування мереж, Університет Яніни, Греція;

**Бодяньскій Євгеній Володимирович** – доктор технічних наук, професор, професор кафедри штучного інтелекту, Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна;

**Веннекенс Юст** – доктор філософії, доцент, доцент факультету інженерних технологій (кампус Де Наїр), Католицький університет Льовена, Бельгія;

Рекомендовано до видання Вченою радою НУ «Запорізька політехніка», протокол № 1/21 від 27.08.2021.

Журнал зверстаний редакційно-видавничим відділом НУ «Запорізька політехніка».

**Веб-сайт журналу:** <http://ric.zntu.edu.ua>.

**Адреса редакції:** Редакція журналу «РІУ», Національний університет «Запорізька політехніка», вул. Жуковського, 64, м. Запоріжжя, 69063, Україна.

Тел: (061) 769-82-96 – редакційно-видавничий відділ

E-mail: [rvv@zntu.edu.ua](mailto:rvv@zntu.edu.ua)

**Вольф Карстен** – доктор філософії, професор, професор кафедри технічної інформатики, Дортмундський університет прикладних наук та мистецтв, Німеччина;

**Вуттке Ганс-Дітріх** – доктор філософії, доцент, провідний науковий співробітник інституту технічної інформатики, Технічний університет Льменау, Німеччина;

**Горбань Олександр Миколайович** – доктор фізико-математичних наук, професор, професор факультету математики, Університет Лестера, Велика Британія;

**Городничий Дмитро Олегович** – доктор філософії, кандидат технічних наук, доцент, провідний науковий співробітник Дирекції науки та інженерії, Канадська агенція прикордонної служби, Канада;

**Дробахін Олег Олегович** – доктор фізико-математичних наук, професор, перший проректор, Дніпровський національний університет імені Олеса Гончара, Україна;

**Зайцева Олена Миколаївна** – кандидат фізико-математичних наук, професор, професор кафедри інформатики, Жилінський університет в Жиліні, Словаччина;

**Камеяма Мічітака** – доктор наук, професор, професор факультету науки та інженерії, Університет Ішіномакі Сеншу, Японія;

**Карташов Володимир Михайлович** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри медіаінженерії та інформаційних радіоелектронних систем, Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна;

**Левашенко Віталій Григорович** – кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри інформатики, Жилінський університет в Жиліні, Словаччина;

**Луенго Давид** – доктор філософії, професор, завідувач кафедри теорії сигналів та комунікацій, Мадридський політехнічний університет, Іспанія;

**Марковська-Качмар Урсула** – доктор технічних наук, професор, професор кафедри обчислювального інтелекту, Вроцлавська політехніка, Польща;

**Олійник Андрій Олександрович** – доктор технічних наук, доцент, професор кафедри програмних засобів, Національний університет «Запорізька політехніка», Україна;

**Павліков Володимир Володимирович** – доктор технічних наук, старший науковий співробітник, проректор з наукової роботи, Національний аерокосмічний університет ім. Н.Е. Жуковського «ХАІ», Україна;

**Папшицький Марцін** – доктор наук, професор, професор відділу інтелектуальних систем, Дослідний інститут систем Польської академії наук, м. Варшава, Польща;

**Скруський Степан Юрійович** – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерних систем і мереж, Національний університет «Запорізька політехніка», Україна;

**Табунчик Галина Володимирівна** – кандидат технічних наук, професор, професор кафедри програмних засобів, Національний університет «Запорізька політехніка», Україна;

**Тригано Томас** – доктор філософії, старший викладач кафедри електричної та електронної інженерії, Інженерний коледж ім. С. Шамон, м. Ашдод, Ізраїль;

**Хенке Карстен** – доктор технічних наук, професор, науковий співробітник факультету інформатики та автоматизації, Технічний університет Льменау, Німеччина;

**Шарпанських Олексій Альбертович** – доктор філософії, доцент, доцент факультету аерокосмічної інженерії, Делфтський технічний університет, Нідерланди.

## РЕДАКЦІЙНО-КОНСУЛЬТАТИВНА РАДА

**Аррас Пітер** – доктор філософії, доцент, доцент факультету інженерних технологій (кампус Де Наїр), Католицький університет Льовена, Бельгія;

**Ліснянський Анатолій** – кандидат фізико-математичних наук, головний науковий експерт, Ізраїльська електрична корпорація, Хайфа, Ізраїль;

**Мадрицх Христіан** – доктор філософії, професор факультету інженерії та інформаційних технологій, Університет прикладних наук Каринфії, Австрія;

**Маркосян Мгер Вардкесович** – доктор технічних наук, професор, директор Єреванського науково-дослідного інституту засобів зв'язку, професор кафедри телекомунікацій, Російсько-вірменський університет, м. Єреван, Вірменія;

**Рубель Олег Володимирович** – кандидат технічних наук, доцент факультету інженерії, Університет МакМастера, Гамільтон, Канада;

**Тавхелідзе Автанділ** – кандидат фізико-математичних наук, професор, професор школи бізнесу, технології та освіти, Державний університет ім. Іллі Чавчавадзе, Тбілісі, Грузія;

**Уреутью Дору** – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри електроніки та обчислювальної техніки, Трансильванський університет в Брашові, Румунія;

**Шульц Пітер** – доктор технічних наук, професор, професор факультету інженерії та комп'ютерних наук, Гамбургський університет прикладних наук (HAW Hamburg), Гамбург, Німеччина.

The scientific journal «Radio Electronics, Computer Science, Control» is published by the National University «Zaporizhzhia Polytechnic» NU «Zaporizhzhia Polytechnic» since 1999 with periodicity four numbers per year.

The journal is registered by the Ministry of Justice of Ukraine in 19.11.2019. (State Registration Certificate of printed mass media series KB № 24220-14060 IIP).

ISSN 1607-3274 (print), ISSN 2313-688X (on-line).

By the Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine from 17.03.2020 № 409 “On approval of the decision of the Certifying Collegium of the Ministry on the activities of the specialized scientific councils dated 06 March 2020” journal is included in the list of scientific specialized periodicals of Ukraine in category “A” (highest level), where the results of dissertations for Doctor of Science and Doctor of Philosophy may be published.

The journal is included to the Polish List of scientific journals and peer-reviewed materials from international conferences with assigned number of points (Annex to the announcement of the Minister of Science and Higher Education of Poland from July 31, 2019: Lp. 16981).

The journal publishes scientific articles in English, Russian, and Ukrainian free of charge.

The article formatting rules are presented on the site: <http://ric.zntu.edu.ua/information/authors>.

The journal provides policy of on-line open (free of charge) access for full-text publications. The journal allow the authors to hold the copyright without restrictions and to retain publishing rights without restrictions. The journal allow readers to read, download, copy, distribute, print, search, or link to the full texts of its articles. The journal allow reuse and remixing of its content, in accordance with Creative Commons license CC BY-SA.

Published articles have a unique digital object identifier (DOI).

The journal is included into Web of Science.

The journal is abstracted and indexed in leading international and national abstracting journals and scientometric databases, and also placed to the digital archives and libraries with a free on-line access, full list of which is presented at the site: <http://ric.zntu.edu.ua/about/editorialPolicies#custom-0>.

The journal is distributed by the Catalogue of Ukrainian periodicals (the catalog number is 22914).

The journal scope: telecommunications and radio electronics, software engineering (including algorithm and programming theory), computer science (mathematical modeling and computer simulation, optimization and operations research, control in technical systems, machine-machine and man-machine interfacing, artificial intelligence, including data mining, pattern recognition, artificial neural and neuro-fuzzy networks, fuzzy logic, swarm intelligence and multiagent systems, hybrid systems), computer engineering (computer hardware, computer networks), information systems and technologies (data structures and bases, knowledge-based and expert systems, data and signal processing methods).

All articles proposed for publication receive an objective review that evaluates substantially without regard to race, sex, religion, ethnic origin, nationality, or political philosophy of the author(s).

All articles undergo a two-stage blind peer review by the editorial staff and independent reviewers – the leading scientists on the profile of the journal.

## EDITORIAL BOARD

**Editor-in-Chief** – **Sergey Subbotin** – Dr. Sc., Professor, Head of Software Tools Department, National University “Zaporizhzhia Polytechnic”, Ukraine.

**Deputy Editor-in-Chief** – **Dmytro Piza** – Dr. Sc., Professor, Director of the Institute of Informatics and Radio Electronics, Professor of the Department of Radio Engineering and Telecommunications, National University “Zaporizhzhia Polytechnic”, Ukraine.

### Members of the Editorial Board:

**Iosif Androulidakis** – PhD, Head of Telephony Department, Network Operation Center, University of Ioannina, Greece;

**Evgeny Bodyanskiy** – Dr. Sc., Professor, Professor of the Department of Artificial Intelligence, Kharkiv National University of Radio Electronics, Ukraine;

**Oleg Drobakhin** – Dr. Sc., Professor, First Vice-Rector, Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine;

**Alexander Gorban** – PhD, Professor, Professor of the Faculty of Mathematics, University of Leicester, United Kingdom;

**Dmitry Gorodnichy** – PhD, Associate Professor, Leading Research Fellow at the Directorate of Science and Engineering, Canada Border Services Agency, Ottawa, Canada;

**Karsten Henke** – Dr. Sc., Professor, Research Fellow, Faculty of Informatics and Automation, Technical University of Ilmenau, Germany;

**Michitaka Kameyama** – Dr. Sc., Professor, Professor of the Faculty of Science and Engineering, Ishinomaki Senshu University, Japan;

**Volodymyr Kartashov** – Dr. Sc., Professor, Head of the Department of Media Engineering and Information Radio Electronic Systems, Kharkiv National University of Radio Electronics, Ukraine;

**Vitaly Levashenko** – PhD, Professor, Head of Department of Informatics, University of Žilina, Slovakia;

**David Luengo** – PhD, Professor, Head of the Department of Signal Theory and Communication, Madrid Polytechnic University, Spain;

**Ursula Markowska-Kaczmar** – Dr. Sc., Professor, Professor of the Department of Computational Intelligence, Wrocław University of Technology, Poland;

**Andrii Oliinyk** – Dr. Sc., Associate Professor, Professor, Department of Software Tools, National University “Zaporizhzhia Polytechnic”, Ukraine;

**Marcin Paprzycki** – Dr. Sc., Professor, Professor of the Department of Intelligent Systems, Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland;

**Volodymyr Pavlikov** – Dr. Sc., Senior Researcher, Vice-Rector for Research, N. E. Zhukovsky National Aerospace University “KhAI”, Ukraine;

**Alexei Sharpanskykh** – PhD, Associate Professor, Associate Professor of Aerospace Engineering Faculty, Delft University of Technology, Netherlands;

**Stepan Skrupsky** – PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Computer Systems and Networks, National University “Zaporizhzhia Polytechnic”, Ukraine;

**Galyna Tabunshchyk** – PhD, Professor, Professor of the Department of Software Tools, National University “Zaporizhzhia Polytechnic”, Ukraine;

**Thomas (Tom) Trigano** – PhD, Senior Lecturer of the Department of Electrical and Electronic Engineering, Sami Shamoon College of Engineering, Ashdod, Israel;

**Joost Vennekens** – PhD, Associate Professor, Associate Professor, Faculty of Engineering (Campus de Nair), Katholieke Universiteit Leuven, Belgium;

**Carsten Wolff** – PhD, Professor, Professor of the Department of Technical Informatics, Dortmund University of Applied Sciences and Arts, Germany;

**Heinz-Dietrich Wuttke** – PhD, Associate Professor, Leading Researcher at the Institute of Technical Informatics, Technical University of Ilmenau, Germany;

**Elena Zaitseva** – PhD, Professor, Professor, Department of Informatics, University of Žilina, Slovakia.

## EDITORIAL-ADVISORY COUNCIL

**Peter Arras** – PhD, Associate Professor, Associate Professor, Faculty of Engineering (Campus De Nair), Katholieke Universiteit Leuven, Belgium;

**Anatoly Lisnianski** – PhD, Chief Scientific Expert, Israel Electric Corporation Ltd., Haifa, Israel;

**Christian Madritsch** – PhD, Professor of the Faculty of Engineering and Information Technology, Carinthia University of Applied Sciences, Austria;

**Mher Markosyan** – Dr. Sc., Professor, Director of the Yerevan Research Institute of Communications, Professor of the Department of Telecommunications, Russian-Armenian University, Yerevan, Armenia;

**Oleg Rubel** – PhD, Associate Professor, Faculty of Engineering, McMaster University, Hamilton, Canada;

**Peter Schulz** – Dr. Sc., Professor, Professor, Faculty of Engineering and Computer Science, Hamburg University of Applied Sciences (HAW Hamburg), Hamburg, Germany;

**Avtandil Tavkhelidze** – PhD, Professor, Professor of the School of Business, Technology and Education, Ilia State University, Tbilisi, Georgia;

**Doru Ursuțiu** – Dr. Sc., Professor, Professor, Department of Electronics and Computer Engineering, University of Transylvania at Brasov, Romania.

Recommended for publication by the Academic Council of NU «Zaporizhzhia Polytechnic», protocol № 1/21 dated 27.08.2021.

The journal is imposed by the editorial-publishing department of NU «Zaporizhzhia Polytechnic».

The journal web-site is <http://ric.zntu.edu.ua>.

The address of the editorial office: Editorial office of the journal «Radio Electronics, Computer Science, Control», National University «Zaporizhzhia Polytechnic», Zhukovskiy street, 64, Zaporizhzhia, 69063, Ukraine.

Tel.: +38-061-769-82-96 – the editorial-publishing department.

E-mail: [rvv@zntu.edu.ua](mailto:rvv@zntu.edu.ua)

Fax: +38-061-764-46-62

© National University «Zaporizhzhia Polytechnic», 2021

**Научный журнал «Радиоэлектроника, информатика, управление»** (сокращенное название – РИУ) издается национальным университетом «Запорожская политехника» (НУ «Запорожская политехника») с 1999 г. периодичностью четыре номера в год.

Зарегистрирован в Министерстве юстиции Украины 19.11.2019 г. (Свидетельство о государственной регистрации печатного средства массовой информации серия KB № 24220-14060 ПР).

ISSN 1607-3274 (печатный), ISSN 2313-688X (электронный).

Приказом Министерства образования и науки Украины № 409 от 17.03.2020 г. «Об утверждении решений Аттестационной коллегии Министерства относительно деятельности специализированных ученых советов от 06 марта 2020 года» журнал включен в перечень научных профессиональных изданий Украины в категории «А» (наивысший уровень), в которых могут публиковаться результаты диссертационных работ на соискание ученых степеней доктора наук и доктора философии (кандидата наук).

Журнал включен в польский Перечень научных журналов и рецензируемых материалов международных конференций с присвоенным числом баллов (приложение к объявлению Министра науки и высшего образования Республики Польша от 31 июля 2019 г.: № 16981).

В журнале бесплатно публикуются научные статьи на английском, русском и украинском языках.

**Правила оформления статей** представлены на сайте: <http://ric.zntu.edu.ua/information/authors>.

Журнал обеспечивает **бесплатный открытый он-лайн доступ** к полнотекстовым публикациям. Журнал разрешает авторам иметь авторские права и сохранять права на издание без ограничений. Журнал разрешает пользователям читать, загружать, копировать, распространять, печатать, искать или ссылаться на полные тексты своих статей. Журнал разрешает повторное использование его содержания в соответствии Creative Commons лицензией CC BY-SA..

Опубликованным статьям присваивается уникальный идентификатор цифрового объекта DOI.

**Журнал входит в наукометрическую базу Web of Science.**

**Журнал реферирован и индексируется** в ведущих международных и национальных реферативных журналах и наукометрических базах данных, а также размещается в цифровых архивах и библиотеках с бесплатным доступом on-line, полный перечень которых представлен на сайте: <http://ric.zntu.edu.ua/about/editorialPolicies#custom-0>.

**Журнал распространяется** по Каталогу периодических изданий Украины (подписной индекс – 22914).

**Тематика журнала:** телекоммуникации и радиоэлектроника, программная инженерия (включая теорию алгоритмов и программирования), компьютерные науки (математическое и компьютерное моделирование, оптимизация и исследование операций, управление в технических системах, межмашинное и человеко-машинное взаимодействие, искусственный интеллект, включая интеллектуальный анализ данных, распознавание образов, искусственные нейронные и нейро-нечеткие сети, нечеткую логику, коллективный интеллект и мультиагентные системы, гибридные системы), компьютерная инженерия (аппаратное обеспечение вычислительной техники, компьютерные сети), информационные системы и технологии (структуры и базы данных, системы, основанные на знаниях, и экспертные системы, обработка данных и сигналов).

Все статьи, предлагаемые к публикации, получают **объективное рассмотрение**, которое оценивается по существу без учета расы, пола, вероисповедания, этнического происхождения, гражданства или политической философии автора(ов).

Все статьи проходят двухступенчатое закрытое (анонимное для автора) **рецензирование** штатными редакторами и независимыми рецензентами – ведущими учеными по профилю журнала.

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Главный редактор – Субботин Сергей Александрович** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой программных средств, Национальный университет «Запорожская политехника», Украина.

**Заместитель главного редактора – Пиза Дмитрий Макарович** – доктор технических наук, профессор, директор института информатики и радиоэлектроники, профессор кафедры радиотехники и телекоммуникаций, Национальный университет «Запорожская политехника», Украина.

### **Члены редколлегии:**

**Андрюлидакис Иосиф** – доктор философии, глава департамента телефонии Центра обслуживания сетей, Университет Янины, Греция;

**Бодянский Евгений Владимирович** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры искусственного интеллекта, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина;

**Венескенс Юст** – доктор философии, доцент факультета инженерных технологий (кампус де Наир), Католический университет Левена, Бельгия;

**Вольф Карстен** – доктор философии, профессор, профессор кафедры технической информатики, Дортмундский университет прикладных наук и искусств, Германия;

**Вуттке Ганс-Дитрих** – доктор философии, доцент, ведущий научный сотрудник института технической информатики, Технический университет Ильменау, Германия;

**Горбань Александр Николаевич** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор факультета математики, Университет Лестера, Великобритания;

**Городничий Дмитрий Олегович** – доктор философии, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Дирекции науки и инженерии, Канадское агентство пограничной службы, Канада;

**Дробахин Олег Олегович** – доктор физико-математических наук, профессор, первый проректор, Днепровский национальный университет имени Олеся Гончара, Украина;

**Зайцева Елена Николаевна** – кандидат физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информатики, Жилинский университет в Жилине, Словакия;

**Камеяма Мичитака** – доктор наук, профессор, профессор факультета науки и инженерии, Университет Ишиномаки Сеншу, Япония;

**Карташов Владимир Михайлович** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой медиаинженерии и информационных радиоэлектронных систем, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина;

**Левашенко Виталий Григорьевич** – кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики, Жилинский университет в Жилине, Словакия;

**Луэнго Давид** – доктор философии, профессор, заведующий кафедрой теории сигналов и коммуникации, Мадридский политехнический университет, Испания;

**Марковска-Качмар Урсула** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры вычислительного интеллекта, Вроцлавская политехника, Польша;

**Олейник Андрей Александрович** – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры программных средств, Национальный университет «Запорожская политехника», Украина;

**Павликов Владимир Владимирович** – доктор технических наук, старший научный сотрудник, проректор по научной работе, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Э. Жуковского «ХАИ», Украина;

**Панищкий Марцин** – доктор наук, профессор, профессор отдела интеллектуальных систем, Исследовательский институт систем Польской академии наук, г. Варшава, Польша;

**Скруцкий Степан Юрьевич** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры компьютерных систем и сетей, Национальный университет «Запорожская политехника», Украина;

**Табунщик Галина Владимировна** – кандидат технических наук, профессор, профессор кафедры программных средств, Национальный университет «Запорожская политехника», Украина;

**Тригано Томас** – доктор философии, старший преподаватель кафедры электрической и электронной инженерии, Инженерный колледж им. С. Шамон, г. Ашдод, Израиль;

**Хенке Карстен** – доктор технических наук, профессор, научный сотрудник факультета информатики и автоматизации Технический университет Ильменау, Германия;

**Шарпаньских Алексей Альбертович** – доктор философии, доцент факультета аэрокосмической инженерии, Делфтский технический университет, Нидерланды.

## РЕДАКЦИОННО-КОНСУЛЬТАТИВНЫЙ СОВЕТ

**Аррас Питер** – доктор философии, доцент факультета инженерных технологий (кампус де Наир), Католический университет Левена, Бельгия;

**Лиснянский Анатолий** – кандидат физико-математических наук, главный научный эксперт, Израильская электрическая корпорация, Хайфа, Израиль;

**Мадритц Христиан** – доктор философии, профессор факультета инженерии и информационных технологий, Университет прикладных наук Каринфии, Австрия;

**Маркосан Мгер Вардкесович** – доктор технических наук, профессор, директор Ереванского научно-исследовательского института средств связи, профессор кафедры телекоммуникаций, Российско-армянский университет, Ереван, Армения;

**Рубель Олег Владимирович** – кандидат технических наук, доцент факультета инженерии, Университет МакМастер, Гамильтон, Канада;

**Тавхелидзе Автандил** – кандидат физико-математических наук, профессор, профессор школы бизнеса, технологии и образования, Государственный университет им. Ильи Чавчавадзе, Тбилиси, Грузия;

**Урсутью Дору** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры электроники и вычислительной техники, Трансильванский университет в Брашове, Румыния;

**Шульца Питер** – доктор технических наук, профессор, профессор факультета инженерии и компьютерных наук, Гамбургский университет прикладных наук (HAW Hamburg), Гамбург, Германия.

Рекомендовано к изданию Ученым советом НУ «Запорожская политехника», протокол № 1/21 от 27.08.2021.

Журнал сверстан редакционно-издательским отделом НУ «Запорожская политехника».

**Веб-сайт журнала:** <http://ric.zntu.edu.ua>.

**Адрес редакции:** Редакция журнала «РИУ», Национальный университет «Запорожская политехника», ул. Жуковского, 64, г. Запорожье, 69063, Украина.

Тел.: +38-061-769-82-96 – редакционно-издательский отдел

Факс: +38-061-764-46-62

E-mail: [rvv@zntu.edu.ua](mailto:rvv@zntu.edu.ua)

© Национальный университет «Запорожская политехника», 2021

# ЗМІСТ

<b>РАДІОЕЛЕКТРОНІКА ТА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ.....</b>	<b>7</b>
<i>Коляденко Ю. Ю., Чурсанов М. О.</i> АНАЛІЗ ПОКАЗНИКІВ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ СУМІСНОСТІ МЕРЕЖ ЗВ'ЯЗКУ 5 G.....	7
<i>Маковесенко Д. О., Сідень С. В., Пилявський В. В.</i> ВИКОРИСТАННЯ АДАПТИВНИХ АНТЕННИХ РЕШТОК ДЛЯ ЗБІЛЬШЕННЯ ПРОПУСКНОЇ ЗДАТНОСТІ МЕРЕЖІ LTE-A.....	17
<b>МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ.....</b>	<b>26</b>
<i>Gybkina N. V., Lamtyugova S. M., Sidorov M. V.</i> TWO-SIDED APPROXIMATIONS METHOD BASED ON THE GREEN'S FUNCTIONS USE FOR CONSTRUCTION OF A POSITIVE SOLUTION OF THE DIRICHLE PROBLEM FOR A SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATION.....	26
<i>Prots'ko I., Kryvinska N., Gryshchuk O.</i> THE RUNTIME ANALYSIS OF COMPUTATION OF MODULAR EXPONENTIATION.....	42
<i>Tarasov V. N.</i> COMPARISON OF TWO FORMS OF ERLANGIAN DISTRIBUTION LAW IN QUEUING THEORY.....	48
<i>Frolov O. V., Losev M. U.</i> MODELING OF ASYMPTOTICALLY OPTIMAL PIECEWISE LINEAR INTERPOLATION OF PLANE PARAMETRIC CURVES.....	57
<i>Хаханова А. В., Хаханов В. І., Чумаченко С. В., Литвинова Є. І., Рахліс Д. Ю.</i> ВЕКТОРНІ МОДЕЛІ ЛОГІКИ І СТРУКТУРИ ДЛЯ ТЕСТУВАННЯ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ЦИФРОВИХ СХЕМ.....	69
<b>НЕЙРОІНФОРМАТИКА ТА ІНТЕЛЕКТУАЛЬНІ СИСТЕМИ.....</b>	<b>86</b>
<i>Леоценко С. Д., Олійник А. О., Субботін С. О., Гофман Є. О., Корнієнко О.В.</i> МЕТОД СТРУКТУРНОГО ДОНАЛАШТУВАННЯ НЕЙРОМЕРЕЖЕВИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ІНТЕРПРЕТАБЕЛЬНОСТІ.....	86
<i>Moskalenko V. V., Zaretsky M. O., Moskalenko A. S., Panych A. O., Lysyuk V. V.</i> A MODEL AND TRAINING METHOD FOR CONTEXT CLASSIFICATION IN CCTV SEWER INSPECTION VIDEO FRAMES.....	97
<i>Povkhan I. F., Mitsa O. V., Mulesa O. Y., Melnyk O. O.</i> PROBLEM OF A DISCRETE DATA ARRAY APPROXIMATION BY A SET OF ELEMENTARY GEOMETRIC ALGORITHMS.....	109
<i>Sukhostat L. V.</i> AN INTELLIGENT MODEL BASED ON DEEP TRANSFER LEARNING FOR DETECTING ANOMALIES IN CYBER-PHYSICAL SYSTEMS.....	124
<b>ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ.....</b>	<b>133</b>
<i>Висоцька В. А.</i> ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ ПРОСУВАННЯ ІНТЕРНЕТ-РЕСУРСІВ В ПОШУКОВИХ СИСТЕМАХ НА ОСНОВІ КОНТЕНТ-АНАЛІЗУ КЛЮЧОВИХ СЛІВ WEB-СТОРИНОК.....	133
<i>Nosov P. S., Popovych I. S., Zinchenko S. M., Kobets V. M., Safonova A. F., Appazov E. S.</i> AUTOMATIC DETERMINATION OF THE NAVIGATORS MOTIVATION MODEL WHEN OPERATING WATER TRANSPORT.....	152
<i>Stenin A. A., Pasko V. P., Soldatova M. A., Drozdovich I. G.</i> MULTI-AGENT LATENT SEMANTIC INTERNET TECHNOLOGY FOR THE FORMATION OF A SUBJECT-ORIENTED KNOWLEDGE MODEL.....	166
<b>УПРАВЛІННЯ У ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ.....</b>	<b>175</b>
<i>Косолап А. І., Дубовик Т. М.</i> ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗКЛАДУ НАВЧАННЯ В УНІВЕРСИТЕТІ.....	175

# CONTENTS

<b>RADIO ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS.....</b>	<b>7</b>
<i>Kolyadenko Yu. Yu., Chursanov N. A.</i> ANALYSIS OF INDICATORS OF ELECTROMAGNETIC COMPATIBILITY OF COMMUNICATION NETWORKS 5 G.....	7
<i>Makoveenko D. O., Siden S. V., Pyliavskiy V. V.</i> USE OF ADAPTIVE ANTENNA ARRAYS FOR INCREASE THE THROUGHPUT IN LTE-A.....	17
<b>MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING.....</b>	<b>26</b>
<i>Gybkina N. V., Lamtyugova S. M., Sidorov M. V.</i> TWO-SIDED APPROXIMATIONS METHOD BASED ON THE GREEN'S FUNCTIONS USE FOR CONSTRUCTION OF A POSITIVE SOLUTION OF THE DIRICHLE PROBLEM FOR A SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATION.....	26
<i>Prots'ko I., Kryvinska N., Gryshchuk O.</i> THE RUNTIME ANALYSIS OF COMPUTATION OF MODULAR EXPONENTIATION.....	42
<i>Tarasov V. N.</i> COMPARISON OF TWO FORMS OF ERLANGIAN DISTRIBUTION LAW IN QUEUING THEORY.....	48
<i>Frolov O. V., Losev M. U.</i> MODELING OF ASYMPTOTICALLY OPTIMAL PIECEWISE LINEAR INTERPOLATION OF PLANE PARAMETRIC CURVES.....	57
<i>Hahanova A., Hahanov V., Chumachenko S., Litvinova E., Rakhlis D.</i> VECTOR-DRIVEN LOGIC AND STRUCTURE FOR TESTING AND DEDUCTIVE FAULT SIMULATION.....	69
<b>NEUROINFORMATICS AND INTELLIGENT SYSTEMS.....</b>	<b>86</b>
<i>Leoshchenko S. D., Oliinyk A. O., Subbotin S. A., Gofman Ye. O., Korniienko O. V.</i> THE METHOD OF STRUCTURAL ADJUSTMENT OF NEURAL NETWORK MODELS TO ENSURE INTERPRETATION.....	86
<i>Moskalenko V. V., Zaretsky M. O., Moskalenko A. S., Panych A. O., Lysyuk V. V.</i> A MODEL AND TRAINING METHOD FOR CONTEXT CLASSIFICATION IN CCTV SEWER INSPECTION VIDEO FRAMES.....	97
<i>Povkhan I. F., Mitsa O. V., Mulesa O. Y., Melnyk O. O.</i> PROBLEM OF A DISCRETE DATA ARRAY APPROXIMATION BY A SET OF ELEMENTARY GEOMETRIC ALGORITHMS.....	109
<i>Sukhostat L. V.</i> AN INTELLIGENT MODEL BASED ON DEEP TRANSFER LEARNING FOR DETECTING ANOMALIES IN CYBER-PHYSICAL SYSTEMS.....	124
<b>PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES.....</b>	<b>133</b>
<i>Vysotska V.</i> INFORMATION TECHNOLOGY FOR INTERNET RESOURCES PROMOTION IN SEARCH SYSTEMS BASED ON CONTENT ANALYSIS OF WEB-PAGE KEYWORDS.....	133
<i>Nosov P. S., Popovych I. S., Zinchenko S. M., Kobets V. M., Safonova A. F., Appazov E. S.</i> AUTOMATIC DETERMINATION OF THE NAVIGATORS MOTIVATION MODEL WHEN OPERATING WATER TRANSPORT.....	152
<i>Stenin A. A., Pasko V. P., Soldatova M. A., Drozdovich I. G.</i> MULTI-AGENT LATENT SEMANTIC INTERNET TECHNOLOGY FOR THE FORMATION OF A SUBJECT-ORIENTED KNOWLEDGE MODEL.....	166
<b>CONTROL IN TECHNICAL SYSTEMS.....</b>	<b>175</b>
<i>Kosolap A. I., Dubovik T. M.</i> OPTIMIZATION OF TIMETABLE AT THE UNIVERSITY.....	175

# РАДИОЕЛЕКТРОНІКА ТА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ

## RADIO ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS

### РАДИОЭЛЕКТРОНИКА И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

УДК621.396.677.49

#### АНАЛІЗ ПОКАЗНИКІВ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ СУМІСНОСТІ МЕРЕЖ ЗВ'ЯЗКУ 5 G

**Коляденко Ю. Ю.** – д-р техн. наук, професор, професор кафедри інфокомунікаційної інженерії ім. В. В. Поповського, Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна.

**Чурсанов М. О.** – аспірант кафедри інфокомунікаційної інженерії ім. В. В. Поповського, Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна.

#### АНОТАЦІЯ

**Актуальність.** Технологія нового покоління 5G / IMT-2020, як і будь-яка нова технологія, привносить свої специфічні особливості в усі аспекти, що стосуються практики її впровадження. Одним з таких особливо важливих аспектів є електромагнітна сумісність. На етапі підготовки до впровадження радіомереж технології 5G, необхідно завчасно потурбуватися про вжиття заходів щодо ефективної оцінки умов ЕМС для цих мереж на основі ретельного аналізу особливостей технології 5G, а також правильно і точно оцінивши ці умови – успішно забезпечити електромагнітну сумісність радіозасобів нових мереж.

**Мета.** Метою даної роботи є проведення аналізу електромагнітної сумісності мереж зв'язку 5G.

**Метод.** Аналіз головних особливостей радіоінтерфейсу 5G дозволяє вказати на очікувані особливості процедур оцінки умов ЕМС для цих мереж. Ці особливості головним чином стосуються урахування сумарної завади від мережі при її особливій архітектурі і динаміці змін, вибору нових моделей втрат (моделей каналу) при просторово-розподіленому випромінюванні багатовимірних антен МІМО і різнорідному середовищі поширення сигналу, а також урахування спектральних властивостей нових форм сигналу і характеру випромінювання при нових неортогональних методах радіодоступу. Для аналізу ЕМС використана модель ослаблення сигналів в радіоканалах міліметрового діапазону, що враховує ослаблення радіохвиль у вільному просторі; втрати енергії радіохвиль при поширенні через дощі; ослаблення сигналу міліметрового діапазону при поширенні через листя дерев; ослаблення сигналів при проходженні через щільні перешкоди (будівлі, споруди, тощо).

**Результати.** Проведено аналіз ослаблення сигналу міліметрового діапазону у вільному просторі від інтенсивності опадів при різних значеннях оптичної видимості. Проведено аналіз ослаблення сигналу міліметрового діапазону при поширенні сигналу через перешкоди у вигляді стін від відстані при різних значеннях товщини стіни. Проведено аналіз ослаблення сигналу міліметрового діапазону від глибини шару листя, що перекриває поширення сигналу при різних значеннях частоти несійної. Проведено аналіз значення потужності сигналу міліметрового діапазону на вході приймача від інтенсивності опадів при різних значеннях оптичної видимості. Проведено аналіз значення потужності сигналу міліметрового діапазону на вході приймача при поширенні сигналу через перешкоди у вигляді стін від відстані при різних значеннях товщини стіни. Проведено аналіз значення потужності сигналу міліметрового діапазону на вході приймача від глибини шару листя, що перекриває поширення сигналу при різних значеннях частоти несійної.

**Висновки.** Проведені дослідження показників ЕМС дозволяють дати рекомендації щодо застосування технології 5G в конкретних практичних ситуаціях.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** мережі зв'язку 5G, електромагнітна сумісність.

#### АБРЕВІАТУРИ

FD – Full Duplex;

MIMO – Multiple Input Multiple Output;

NR – New Radio;

OFDM – Orthogonal Frequency Division Multiplex-

ing;

ЕМС – електромагнітна сумісність;

ІКТ – інформаційно-комунікаційні технології;

ММД – міліметровий діапазон;

МСЕ – Міжнародний союз електрозв'язку;

ЧТП – частотно-територіальне планування;

ШСД – ширококутовий доступ.



## НОМЕНКЛАТУРА

$L_g$  – ослаблення радіохвиль у вільному просторі;  
 $R$  – відстань між передавачем і приймачем;  
 $f$  – частота;  
 $L$  – ослаблення сигналів в радіоканалах ММД;  
 $k$  – коефіцієнт, що визначає наявність чи відсутність опадів;  
 $Y$  – інтенсивність опадів;  
 $K_d$  – параметр, що залежить від частоти, температури, поляризації дБч/м<sup>2</sup>;  
 $a$  – безрозмірний параметр, що залежить від частоти, температури, поляризації;  
 $l_T$  – питомий погонний коефіцієнт ослаблення сигналу ММД в тумані;  
 $V_T$  – коефіцієнт вмісту води в атмосфері, який визначається по оптичній видимості;  
 $r$  – глибина шару листя, що перекриває;  
 $L_M$  – ослаблення сигналу в матеріалах, дБ;  
 $f_0$  – несійна частота;  
 $U_{np}$  – швидкість руху приймача;  
 $U_{nep}$  – швидкість руху передавача;  
 $C$  – швидкість поширення радіохвиль;  
 $L_d$  – ослаблення сигналу в дощах;  
 $P_{np}$  – потужність сигналу, що приймається;  
 $P_{nep}$  – потужність передавача;  
 $G_{nep}$  – коефіцієнт підсилення передавальної антени;  
 $G_{np}$  – коефіцієнт підсилення приймальної антени;  
 $\eta_{nep}$  – коефіцієнт корисної дії передавального фідера;  
 $\eta_{np}$  – коефіцієнт корисної дії приймального фідера.

## ВСТУП

В останні десятиліття у всьому світі стрімко розвиваються ІКТ, що безпосередньо впливають на розвиток економіки, освіти, науки, охорони здоров'я, культури і способу життя людини. За даними МСЕ вже в 2012 році Інтернетом користувався кожен третій житель Землі, і число користувачів неухильно зростає. ІКТ і послуги на базі ШСД рік від року стають все більш доступними для населення, в тому числі і за вартістю.

Метою мереж зв'язку п'ятого покоління є задоволення все зростаючих потреб у мобільному зв'язку [1–9]. Мережі 5G грають ключову роль у перетворенні міст в розумні міста, що дозволить громадянам і суспільству в цілому, отримати соціально-економічні вигоди, які дає передова цифрова економіка з інтенсивним використанням даних [10].

У листопаді 2020 року в Україні почали звільняти частоти для мереж 5G. Відповідний план затвердило

Міністерство цифрової трансформації України. Оголошення тендеру на частоти для розвитку 5G планується на жовтень 2021 року. Початок розгортання мережі 5G очікується з 2022 року в найбільших населених пунктах.

Технологія нового покоління 5G / IMT-2020, як і будь-яка нова технологія, привносить свої специфічні особливості в усі аспекти, що стосуються практики її впровадження. Одним з таких особливо важливих аспектів є електромагнітна сумісність. На етапі підготовки до впровадження радіомереж технології 5G, названої NewRadio (NR), необхідно завчасно потурбуватися про вжиття заходів щодо ефективної оцінки умов ЕМС для цих мереж на основі ретельного аналізу особливостей технології 5G, а також правильно і точно оцінивши ці умови – успішно забезпечити електромагнітну сумісність радіозасобів нових мереж.

**Об'єктом дослідження** є процес поширення сигналів міліметрового діапазону, які використовуються в технології нового покоління 5G.

**Предмет дослідження** становлять моделі поширення сигналів міліметрового діапазону, які використовуються в технології нового покоління 5G.

**Метою роботи** є проведення аналізу електромагнітної сумісності мереж зв'язку 5G.

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Для впровадження 5G Кабінет міністрів затвердив план використання радіочастотного ресурсу України до 2025 року. Ці зміни дозволять користувачам отримувати більш стабільні і високі швидкості передачі інформації.

МСЕ з 1995 року став міжнародним координатором робіт з електрозв'язку, спрямованих на створення глобального інформаційного суспільства. Створивши Регламент радіозв'язку [11] і розділивши поверхню Землі на три регіони, МСЕ організував певний порядок в частотному користуванні. Однак частотний ресурс, що належить всьому людству, виключно активно використовує і до теперішнього часу частотні діапазони нижче 5 ГГц, які практично перевантажені. Присвоєння радіочастот і радіочастотних каналів для радіоелектронних засобів в цих діапазонах здійснюється за технологіями ЧТП [12–14] з обов'язковим розрахунком ЕМС радіозасобів. Тому одне з основних напрямків по створенню нового покоління мобільного зв'язку 5G це освоєння частотних діапазонів вище 5 ГГц поки ще недостатньо використовуваних. Відносно вільні ділянки спектра є поки на надвисоких частотах, наприклад, на межі діапазонів Х і С не зайнята смуга частот близько 1,5 ГГц. Але найменше освоєний ММД хвиль, тому саме в цьому діапазоні можливий розвиток стандарту 5G зі швидкостями передачі даних від 1 до 10 Гбіт / с. Діапазон міліметрових хвиль використовується поки не дуже активно і вивчений ще не повністю. Тому становить інтерес дослідження можливостей мобільного зв'язку в цьому діапазоні хвиль.

## 2 ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД

Ключовими рішеннями і технологічними компонентами [1–4] мережі радіодоступу 5G NR є:

1) використання нових форм сигналу, що одержали назву Non-Orthogonal Waveform і дають вигоду в спектральній ефективності по відношенню до OFDM;

2) застосування повного дуплексу FD – одночасної передачі і прийому в загальній смузі частот, переважно в коротких з'єднаннях «точка-точка» (D2D, V2V);

3) застосування багатовимірних антен МІМО, в яких ефективно реалізується режим динамічного формування спрямованих променів для передачі (3D/Beamforming), що дозволяє збільшити енергетичний вигоду в очікуваних високих діапазонах частот і поліпшити покриття і спектральну ефективність в ультра-щільних малих стільниках;

2) застосування малих стільників Small Cellco з надщільним розподілом (один приймально-передавач на кожного користувача), що розвантажують макростільниками мережі з поділом середовищ передачі команд управління і призначеного для користувача трафіку між макро- і Small-стільниками в різних смугах частот (концепція “PhantomCell”).

Радіочастоти для мереж 5G – це одна з головних компонент, що робить істотний вплив на ЕМС [6, 9, 12].

На Всесвітній конференції радіозв'язку WCR-15 були визначені нові діапазони радіочастот для 5G, в тому числі діапазони сантиметрових і міліметрових хвиль [12]. Загалом цей радіочастотний спектр розміщений в трьох областях: нижче 1 ГГц, від 1 ГГц до 6 ГГц і вище 6 ГГц (аж до 100 ГГц).

В якості головних особливостей цього спектра з точки зору ЕМС можна виділити наступне: можливість використання широкої безперервної смуги каналу (сумарно до 1–2 ГГц); малі зони обслуговування (дальність випромінювання) в малих (Small) і ультра-малих (UltraSmall) стільниках; можливість використання малогабаритних багатоелементних антен МІМО з вузькими променями як в базових станціях, так і в абонентських пристроях; різний характер втрат при поширенні сигналу, зокрема, значний вплив на рівень втрат додаткових раніше невідомих в стільниковому зв'язку факторів (гази – кисень, водяну пару і ін.) [15, 17].

Опис радіоінтерфейсів [1, 6, 9, 12, 15, 17] мереж 5G представлено в табл. 1.

Аналіз головних особливостей радіоінтерфейсу 5G [1, 6, 9, 12, 15, 17, 18] дозволяє вказати на очікувані особливості процедур оцінки умов ЕМС для цих мереж. Ці особливості головним чином стосуються урахування сумарної завади від мережі при її особливій архітектурі і динаміці змін, вибору нових моделей втрат (моделей каналу) при просторово-розподіленому випромінюванні багатовимірних антен МІМО і різномірному середовищі поширення сигналу, а також урахування спектральних властивостей нових форм сигналу і характеру випромінювання при нових неортогональних методах радіодоступу.

Таблиця 1 – Опис радіоінтерфейсів мереж 5G

Параметр	NR нижче 6 ГГц	NR вище 6 ГГц
Ширина каналу	5 МГц, 10 МГц, 15 МГц, 20 МГц, 25 МГц, 30 МГц, 40 МГц, 50 МГц, 60 МГц, 80 МГц, 100 МГц.	50 МГц, 100 МГц, 200 МГц и 400 МГц.
Діапазони	Окремі смуги 450–3800 МГц, а також 3800–4200 МГц і 4400–5000 МГц	26,5–29,5 ГГц, 24,25–27,5 ГГц 37–40 ГГц
Затримка (на рівні радіоінтерфейсу)	4 мс (Фаза 1) 1 мс (Фаза 2)	4 мс (Фаза 1) 1 мс (Фаза 2)
Пікові швидкості	2 Гбіт/с і більше	До 20 Гбіт/с

Головними недоліками сигналів ММД є:

1) сильне ослаблення сигналу ММД при поширенні;  
2) рівень сигналу істотно залежить від впливу гідрометеорів (краплі дощу, сніг, град, туман) і від присутності в атмосфері твердих неоднорідностей (листя дерев, зграї птахів, пил);

3) високий ступінь впливу на рівень сигналу перешкод, які закривають трасу;

4) наявність зон сильного ослаблення сигналу на деяких частотах через ослаблення сигналів ММД молекулами кисню і парами води.

Слід зазначити, що у відомих роботах хоча і є в наявності результати аналізу ослаблення сигналів ММД, але не в повному обсязі. Також у відомих роботах відсутній аналіз потужностей сигналу ММД на вході приймача.

## 3 МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИ

Основне ослаблення радіохвиль у вільному просторі визначаються виразом:

$$L_e = 92,4 + 20 \lg(f) + 20 \lg(R) \quad [\text{дБ}]. \quad (1)$$

В [15] запропонована модель ослаблення сигналів в радіоканалах ММД, що враховує:

- ослаблення радіохвиль у вільному просторі;
- втрати енергії радіохвиль при поширенні через дощі;
- ослаблення сигналу ММД при поширенні через листя дерев;
- ослаблення сигналів при проходженні через щільні перешкоди (будівлі, споруди, тощо).

Модель представлена виразом:

$$L = L_e + kR(K_d Y^a + l_T V_T) + 0,2 f^{0,3} r^{0,6} + L_M \quad [\text{дБ}] \quad (2)$$

У радіоканалах 5G можуть спостерігатися і часові завмирання [13]. Їх основною причиною є доплерівська зміна частоти при русі абонентів відносно один одного. Якщо мобільна станція переміщається, то через доплерівський зсув частоти сигнал зазнає спотворення. При наближенні абонентів зв'язку, зміна частоти визначиться виразом:

$$f = f_0 \left( \frac{C + U_{np}}{C - U_{nep}} \right).$$

При віддаленні абонентів один від одного доплерівська зміна частоти визначається виразом:

$$f = f_0 \left( \frac{C - U_{np}}{C + U_{nep}} \right).$$

Ослаблення сигналу в дощах визначається виразом:

$$L_d = K_d Y^a.$$

У табл. 2 наведені значення погонного ослаблення сигналу в дощах в залежності від інтенсивності опадів і частоти.

Таблиця 2 – Погонне ослаблення в дощах

Частота, ГГц	Процент часу року	Інтенсивність опадів	Погонне ослаблення сигналу в дощах, дБ/км
30	1	0,6	0,1
	0,3	2,4	0,43
	0,1	6	1,08
	0,03	12	2,18
	0,01	22	4,02
60	1	0,6	0,63
	0,3	2,4	1,84
	0,1	6	3,73
	0,03	12	6,35
	0,01	22	10,12
90	1	0,6	0,7
	0,3	2,4	1,99
	0,1	6	3,98
	0,03	12	6,7
	0,01	22	10,6

Питомий погонний коефіцієнт ослаблення сигналу ММД в тумані наведено в табл. 3.

Таблиця 3 – Питомий погонний коефіцієнт ослаблення сигналу ММД в тумані

$f_0$ , ГГц	30	43	60	150
$l_T$ , дБ М <sup>3</sup> /гкм	0,438	0,876	1,65	7,14

Коефіцієнт вмісту води в атмосфері наведено в табл. 4.

Таблиця 4 – Коефіцієнт вмісту води в атмосфері

Оптична видимість, м	30	50	80	200
$V_T$ , г/М <sup>3</sup>	2	1	0,5	0,2

Сигнали ММД погано проникають через тверді матеріали. У табл. 5 наведені експериментальні дані [15, 16, 19] по ослабленню сигналу ММД в будівельних матеріалах. Особливо сильне ослаблення сигналів ММД в цеглі і бетоні, що ускладнить використання ММХ для стільникового зв'язку.

Таблиця 5 – Коефіцієнт ослаблення сигналу ММД в матеріалах

Коефіцієнт ослаблення сигналу ММД в матеріалах $L_M$ , дБ				
Матеріал	Товщина, см	Частота, ГГц		
		3	30	60
Скло	0,4	6,4	2,5	3,6
Гіпсокартон	2,5	5,4	–	6
Дерево	0,7	5,4	3,5	–
ДСП	1,6	–	0,6	–
Штукатурка	1,5	–	2,9	–
Цегла	10	18,5	178	–
Бетон	10	17,7	175	–

Рівняння передачі визначається з виразу [13]:

$$P_{pr} = P_{nep} + G_{nep} + G_{np} + \eta_{nep} + \eta_{np} - L. \quad (3)$$

Для аналізу EMC мережі 5G використані характеристики базових і абонентських станцій [17,18] RAN IMT-2020 (табл. 6 – табл. 8).

Таблиця 6 – Типові та EMC-характеристики базових станцій мережі 5G RAN IMT-2020 в діапазонах 24,25–86 ГГц

Параметри	Частота, ГГц		
	24,25	37,52	66,86
Максимальна вихідна потужність, дБм	$\geq 34,5$	$\geq 32,5$	$\geq 30,5$
Коефіцієнт шуму, дБ	10	12	14
Чутливість приймача, дБм	-119	-119	-119
$\eta_{np}$ , дБ	5,57	5,57	5,57
$\eta_{nep}$ , дБ	-2	-2	-2

Таблиця 7 – Типові і EMC-характеристики абонентських станцій мережі 5G RAN IMT-2020 на діапазонах 24,25–86 ГГц

Параметри	Частота, ГГц		
	24,25	37,52	66,86
Максимальна вихідна потужність, дБм	22	22	22
Коефіцієнт шуму, дБ	10	12	14
Чутливість приймача, дБм	-119	-119	-119
$\eta_{np}$ , дБ	5,57	5,57	5,57
$\eta_{nep}$ , дБ	-2	-2	-2

Таблиця 8 – Посилення антени для основної пелюстки

Решітка	Посилення	Посилення, дБ
64x1	57,51	17,59
32x1	28,76	14,58
16x1	14,38	11,57
8x1	7,20	8,57
4x1	3,61	5,57

#### 4 ЕКСПЕРИМЕНТИ

У середовищі Matlab за допомогою математичного моделювання проведено аналіз електромагнітної сумісності мережі 5G. В якості показників ефективності мережі обрано ослаблення сигналу при поширенні радіохвиль та потужність сигналу на вході приймача. Ці показники значною мірою впливають на критерій ефективності ЕМС – відношення потужності сигналу до потужності завади та шуму.

Проведено аналіз ослаблення сигналу у вільному просторі від інтенсивності опадів при різних значеннях оптичної видимості на частоті 30 ГГц і на частоті 60 ГГц. Для проведення експерименту використано математичну модель (1).

Проведено аналіз ослаблення сигналу при поширенні сигналу через перешкоди у вигляді стін від відстані у вільному просторі при різних значеннях товщини стіни. Додаткове ослаблення сигналу при поширенні через перешкоди становило 178 дБ для 10-ти см стіни і 676,4 дБ для 30-ти см стіни. В якості матеріалу стіни було використано цеглу. При цьому, стіна в 10 см відповідає випадку міжкімнатних перегородок, а стіна в 38 см відповідає випадку несучої стіни.

Проведено аналіз ослаблення сигналу від глибини шару листя, що перебиває поширення сигналу при різних значеннях частоти несійної. При цьому відстань від передавача до приймача складала 100 м без урахування глибини шару листя.

Проведено аналіз значення потужності сигналу на вході приймача абонентської станції. Вихідні дані для проведення експерименту: потужність передавача базової станції 32,5 дБм на частоті 30 ГГц та 30,5 дБм на частоті 60 ГГц, підсилення передавальної антени 17,59 дБ, підсилення приймальної антени 8,57 дБ, коефіцієнт корисної дії передавального фідера –2 дБ, коефіцієнт корисної дії приймального фідера 5,57 дБ.

Проведено аналіз значення потужності сигналу на вході приймача від інтенсивності опадів при різних значеннях оптичної видимості на частоті 30 ГГц і на частоті 60 ГГц. Відстань від передавача до приймача складала 500 м.

Проведено аналіз значення потужності сигналу на вході приймача при поширенні сигналу через перешкоди у вигляді стін від відстані при різних значеннях товщини стіни на частоті 30 ГГц.

Проведено аналіз значення потужності сигналу на вході приймача від глибини шару листя, що перебиває поширення сигналу при різних значеннях частоти несійної. Відстань від передавача до приймача складала 100 м без урахування глибини шару листя.

#### 5 РЕЗУЛЬТАТИ

В результаті експерименту отримані залежності ослаблення сигналу у вільному просторі від інтенсивності опадів при різних значеннях оптичної видимості на частоті 30 ГГц (рис. 1) і на частоті 60 ГГц (рис. 2).

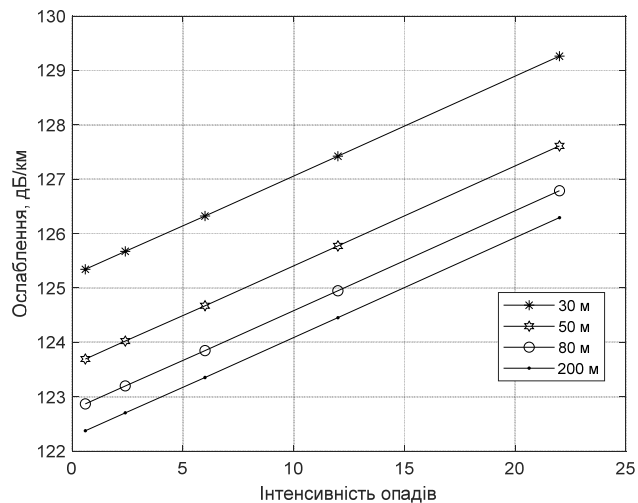


Рисунок 1 – Залежність ослаблення сигналу від інтенсивності опадів при різних значеннях оптичної видимості при частоті 30 ГГц

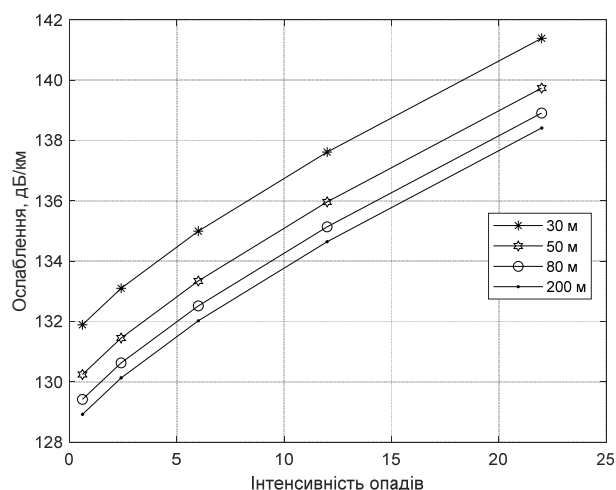


Рисунок 2 – Залежність ослаблення сигналу від інтенсивності опадів при різних значеннях оптичної видимості при частоті 60 ГГц

Отримано залежності ослаблення сигналу від відстані поширення сигналу при різних значеннях товщини стіни (рис. 3). В якості матеріалу стіни було використано цеглу. При цьому, стіна в 10 см відповідає випадку міжкімнатних перегородок, а стіна в 38 см відповідає випадку несучої стіни.

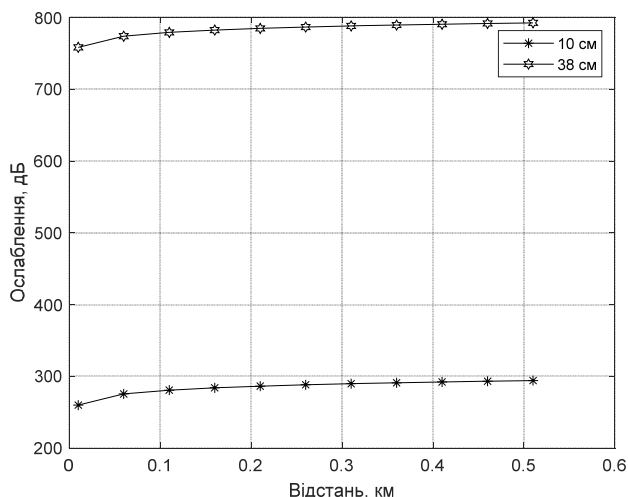


Рисунок 3 – Залежність ослаблення сигналу від відстані при різних значеннях товщини стіни на частоті 30 ГГц

Отримано залежності ослаблення сигналу від глибини шару листя, що перекриває поширення сигналу при різних значеннях частоти несійної (рис. 4). При цьому відстань від передавача до приймача складала 100 м без урахування глибини шару листя.

Отримано залежності потужності сигналу на вході приймача від інтенсивності опадів при різних значеннях оптичної видимості на частоті 30 ГГц (рис. 5) і на частоті 60 ГГц (рис. 6). Відстань від передавача до приймача складала 500 м.

Отримано залежності потужності сигналу на вході приймача від відстані при різних значеннях товщини стіни на частоті 30 ГГц (рис. 7).

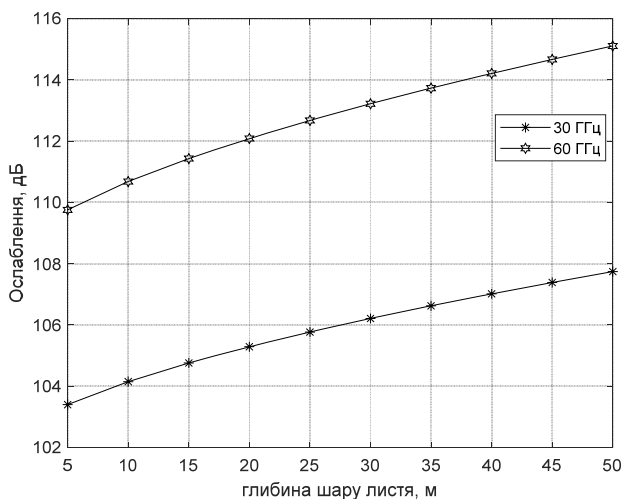


Рисунок 4 – Залежності ослаблення сигналу від глибини шару листя, що перекриває поширення сигналу при різних значеннях частоти несійної

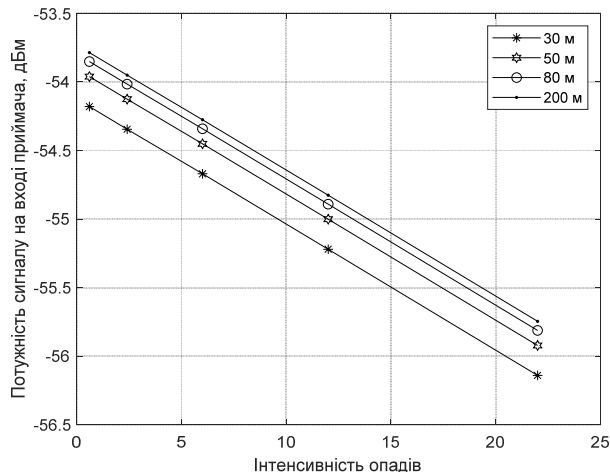


Рисунок 5 – Залежності потужності сигналу на вході приймача від інтенсивності опадів при різних значеннях оптичної видимості на частоті 30 ГГц

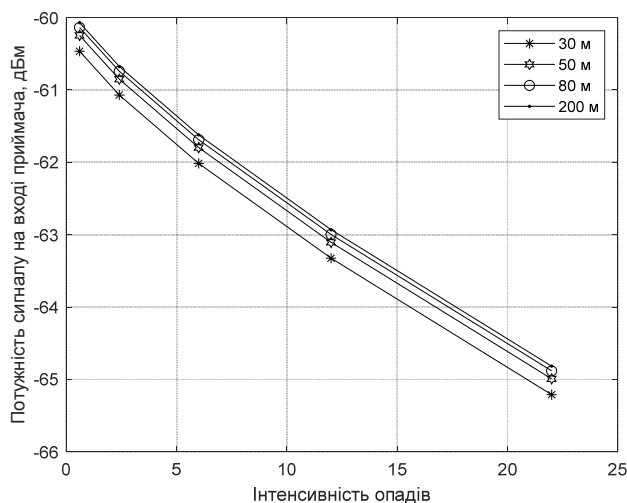


Рисунок 6 – Залежності потужності сигналу на вході приймача від інтенсивності опадів при різних значеннях оптичної видимості на частоті 60 ГГц

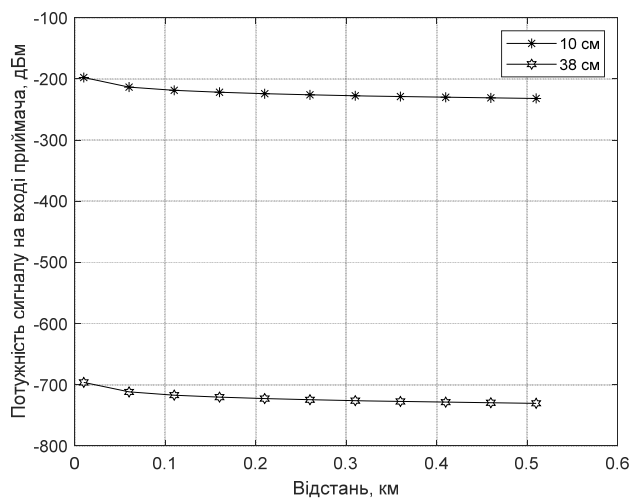


Рисунок 7 – Залежність потужності сигналу на вході приймача від відстані при різних значеннях товщини стіни на частоті 30 ГГц

Отримано залежності потужності сигналу на вході приймача від глибини шару листя, що перекриває поширення сигналу при різних значеннях частоти несійної (рис. 8). Відстань від передавача до приймача складала 100 м без урахування глибини шару листя.

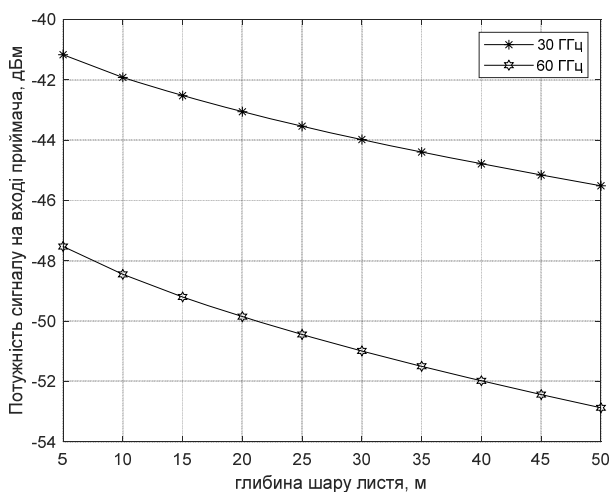


Рисунок 8 – Залежності потужності сигналу на вході приймача від глибини шару листя, що перекриває поширення сигналу при різних значеннях частоти несійної

## 6 ОБГОВОРЕННЯ

Проведений аналіз залежності ослаблення сигналу у вільному просторі від інтенсивності опадів при різних значеннях оптичної видимості на частоті 30 ГГц (рис. 1) і на частоті 60 ГГц показав, що інтенсивність опадів і оптична видимість не суттєво впливає на ослаблення сигналу, і становить не більше 4 дБ втрат при частоті 30 ГГц і не більше 12 дБ втрат при частоті 60 ГГц.

Проведений аналіз залежності ослаблення сигналу від відстані поширення сигналу при різних значеннях товщини стіни (рис. 3) показав, що, ослаблення сигналу суттєво залежить від товщини стіни.

Проведений аналіз залежності ослаблення сигналу від глибини шару листя, що перекриває поширення сигналу при різних значеннях частоти несійної (рис. 4) показав, що насадження не дуже впливають на поширення радіохвиль. Так на кожні 5 метрів приходить ослаблення сигналу не більше 1 дБ.

Проведений аналіз залежності потужності сигналу на вході приймача від інтенсивності опадів при різних значеннях оптичної видимості на частоті 30 ГГц (рис. 5) і на частоті 60 ГГц (рис. 6) показав, що потужність сигналу на вході приймача зменшується при збільшенні інтенсивності опадів, зменшується при зменшенні оптичної видимості, а також зменшується при збільшенні частоти випромінювання. Але треба зазначити, що потужність сигналу на вході приймача лежить в допустимих межах і не виходять за межі чутливості приймача.

Судячи з проведеного аналізу залежності потужності сигналу на вході приймача від відстані при різ-

них значеннях товщини стіни на частоті 30 ГГц (рис. 7), можна зробити висновок, що через міжкімнатні перегородки, а особливо через несучу стіну сигнал міліметрових хвиль проникає дуже ослабленим. І для забезпечення зв'язку в приміщеннях необхідно буде встановлювати додаткове обладнання.

Судячи з проведеного аналізу залежності потужності сигналу на вході приймача від глибини шару листя, що перекриває поширення сигналу при різних значеннях частоти несійної (рис. 8), можна зробити висновок, що потужність сигналу зменшується при збільшенні глибини шару листя. Кожні 5 метрів шару листя дають додаткове ослаблення сигналу менше 1 дБм. Потужність сигналу зменшується і при збільшенні частоти випромінювання, але знаходиться в допустимих межах не зменшуючись до чутливості приймача. Так при частоті 60 ГГц в порівнянні з 30 ГГц виникає додаткове ослаблення сигналу менше 6 дБм.

Проведений аналіз дає змогу зробити висновок про обмеження до радіусу стільника в залежності від потужності та частоти. Так на частоті 30 ГГц при потужності сигналу 32,5 мВт можливе застосування пікостільників з радіусом дії, які досягають десятки метрів. На частоті 60 ГГц при потужності сигналу 30,5 мВт можливе застосування фемтостільників з радіусом дії, які досягають декілька метрів.

## ВИСНОВКИ

Технологія нового покоління 5G / IMT-2020, як і будь-яка нова технологія, привносить свої специфічні особливості в усі аспекти, що стосуються практики її впровадження. Одним з таких особливо важливих аспектів є електромагнітна сумісність. На етапі підготовки до впровадження радіомереж технології 5G, необхідно завчасно потурбуватися про вжиття заходів щодо ефективної оцінки умов EMC для цих мереж на основі ретельного аналізу особливостей технології 5G, а також правильно і точно оцінивши ці умови – успішно забезпечити електромагнітну сумісність радіозасобів нових мереж.

**Наукова новизна** отриманих результатів полягає в тому, що вперше проведено аналіз ослаблення сигналу ММД у вільному просторі від інтенсивності опадів при різних значеннях оптичної видимості. Вперше проведено аналіз ослаблення сигналу ММД при поширенні сигналу через перешкоди у вигляді стін від відстані при різних значеннях товщини стіни. Вперше проведено аналіз ослаблення сигналу ММД від глибини шару листя, що перекриває поширення сигналу при різних значеннях частоти несійної. Вперше проведено аналіз значення потужності сигналу ММД на вході приймача від інтенсивності опадів при різних значеннях оптичної видимості. Вперше проведено аналіз значення потужності сигналу ММД на вході приймача при поширенні сигналу через перешкоди у вигляді стін від відстані при різних значеннях товщини стіни. Вперше проведено аналіз значення потужності сигналу ММД на вході приймача від глибини

шару листя, що перебиває поширення сигналу при різних значеннях частоти несійної.

**Практична значимість** отриманих результатів полягає в тому, що проведені дослідження показників ЕМС дозволяють дати рекомендації щодо застосування технології 5G в конкретних практичних ситуаціях.

Так на частоті 30 ГГц при потужності сигналу 32,5 мВт можливе застосування пікостільників з радіусом дії, які досягають десятків метрів. На частоті 60 ГГц при потужності сигналу від 10 до 100 мВт в приміщенні або зовні при потужності сигналу від 32,5 мВт можливе застосування фемтостільників з радіусом дії, які досягають декілька метрів.

**Перспективами подальших** досліджень є удосконалення методики аналізу ЕМС технології 5G, та подальші дослідження.

### ПОДЯКИ

Робота виконана за сприяння кафедри інфокомунікаційної інженерії ім. В. В. Поповського Харківського національного університету радіоелектроніки.

### ЛИТЕРАТУРА / LITERATURA

1. 3GPP TR 22.891, "Feasibility Study on New Services and Markets Technology Enablers", Ver. 14.2.0, Sep. 2016.
2. 3GPP TR 38.913, "Study on Scenarios and Requirements for Next Generation Access Technologies", Ver. 14.3.0, June. 2017.
3. 3GPP TS 28.554. Management and orchestration; 5G end to end Key Performance Indicators (KPI). Ver. 2.0.0, release 15, Sep 2018.
4. 5G PPP Architecture Working Group white paper, "View on 5G Architecture", July 2016.
5. Abuarqoub A. Behaviour Profiling in Healthcare Applications Using the Internet of Things Technology / A. Abuarqoub, M. H. Hammoudeh // Proceedings of Fourth International Conference on Advances in Information Processing and Communication Technology. – 2016. – P. 1–4. DOI: <https://doi.org/10.15224/978-1-63248-099-6-25>
6. Agiwal M. Next generation 5G wireless networks: A comprehensive survey / M. Agiwal, A. Roy, N. Saxena // IEEE Communications Surveys & Tutorials. – №18(3). – 2016. – P. 1617–1655. DOI: <https://doi.org/10.1109/COMST.2016.2532458>
7. Aijaz A. Realizing the Tactile Internet: Haptic Communications over Next Generation 5G Cellular Networks / A. Aijaz, M. Dohler, A. H. Aghvami, V. Friderikos, M. Frodigh // IEEE Wireless Comm. – 24(2). – 2017. – P. 82–89. DOI: <https://doi.org/10.1109/MWC.2016.1500157RP>
8. Shaping 5G for the Tactile Internet / [A. Aijaz, M. Simsek, M. Dohler and G. Fettweis] // 5G Mobile Communications, Springer International Publishing. – 2017. – P. 677–691. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-34208-5\\_25](https://doi.org/10.1007/978-3-319-34208-5_25)

9. Aijaz A. Towards 5G-enabled tactile internet: Radio resource allocation for haptic communications / A. Aijaz // In Proceedings of the 2016 IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC), Doha, Qatar, 3–6 April 2016. – P. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1109/WCNC.2016.7564661>
10. Raza U. Low Power Wide Area Networks: An Overview / U. Raza, P. Kulkarni, M. Sooriyabandara // IEEE Communications Surveys & Tutorials. – 2017. – Vol. 19. – P. 855–873. <https://doi.org/10.1109/COMST.2017.2652320>
11. Radio Regulations. – Ed. ITU, in 4 volumes. – 2016
12. Resolution COM 6/20 (WRC–15) Studies on frequency-related matters for International Mobile Telecommunications identification including possible additional allocations to the mobile services on a primary basis in portion(s) of the frequency range between 24.25 and 86 GHz for the future development of International Mobile Telecommunications for 2020 and beyond.
13. Modeling Transmit Power Reduction for a Typical Cell with Licensed Shared Access Capabilities / E. Mokrov, A. Ponomarenko-Timofeev, I. Gudkova et al. // IEEE Transactions on Vehicular Technology. – 2018. – <https://doi.org/10.1109/TVT.2018.2799141>
14. Flexible Spectrum Management in a Smart City within Licensed Shared Access Framework / E. Markova, I. Gudkova, A. Ometov et al. // IEEE Access. – 2017. – Vol. 5. – P. 22252–22261. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2017.2758840>
15. Enabling technologies and architectures for 5G wireless / S. Talwar, D. Choudhury, K. Dimou et al. // Proceedings of IEEE MTT-S International Microwave Symposium (IMS) / IEEE. – Tampa, FL, USA, 2014. – P. 1–4. <https://doi.org/10.1109/MWSYM.2014.6848639>
16. Kurakova T. How ITU can help develop future networks/ T. Kurakova, M. Valdburger // ITU News. – 2013, № 1. – P. 38–41. DOI: <https://doi.org/10.1525/aft.2013.41.3.38>
17. Leveraging heterogeneous device connectivity in a converged 5G-IoT ecosystem / O. Galina, S. Andreev, M. Komarov et al. // Computer Networks. – 2017. – Vol. 128. – P. 123–132. <https://doi.org/10.1016/j.comnet.2017.04.051>
18. Аналіз обмежуючих та компенсуючих факторів при розрахунку енергетичної ефективності радіосистем в міліметровому діапазоні / [Я. А. Кременецька, С. Ю. Марков, Н. В. Градобоева, С. М. Харченко] // Телекомунікаційні та інформаційні технології. – 2019. – № 1. – С. 12–21. – Режим доступу: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/vduikt\\_2019\\_1\\_4](http://nbuv.gov.ua/UJRN/vduikt_2019_1_4). DOI: 10.31673/2412-4338.2019.011221
19. Anderson C.R. In-building wideband partition loss measurements at 2.5 and 60 GHz / C. R. Anderson, T. S. Rappaport // IEEE Transactions on Wireless Communications, May 2004. – Vol. 3, No. 3. – P. 922–928. DOI: 10.1109/TWC.2004.826328.

Стаття надійшла до редакції 10.02.2021.  
Після доробки 26.08.2021.

УДК621.396.677.49

### АНАЛИЗ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ СОВМЕСТИМОСТИ СЕТЕЙ СВЯЗИ 5 G

**Коляденко Ю. Ю.** – д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры инфокоммуникационной инженерии им. В. В. Поповского, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина.

**Чурсанов Н. А.** – аспирант кафедры инфокоммуникационной инженерии им. В. В. Поповского, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина.

## АННОТАЦИЯ

**Актуальность.** Технология нового поколения 5G / IMT-2020, как и любая новая технология, привносит свои специфические особенности во все аспекты, касающиеся практики ее применения. Одним из таких особо важных аспектов является электромагнитная совместимость. На этапе подготовки к внедрению радиосетей технологии 5G, необходимо заблаговременно позаботиться о принятии мер по эффективной оценке условий ЭМС для этих сетей на основе тщательного анализа особенностей технологии 5G, а правильно и точно оценив эти условия – успешно обеспечить электромагнитную совместимость радиосредств новых сетей.

**Цель.** Целью данной работы является проведение анализа электромагнитной совместимости сети связи 5G.

**Метод.** Анализ главных особенностей радиоинтерфейса 5G позволяет указать на ожидаемые особенности процедур оценки условий ЭМС для этих сетей. Эти особенности главным образом касаются учета суммарной помехи от сети при ее особой архитектуре и динамике изменений, выбора новых моделей потерь (моделей канала) при пространственно-распределенном излучении многомерных антенн MIMO и разнородной среде распространения сигнала, а также учета спектральных свойств новых форм сигнала и характера излучения при новых неортогональных методах радиодоступа.

Для анализа ЭМС использована модель ослабления сигналов в радиоканалах миллиметрового диапазона, учитывающая: ослабление радиоволн в свободном пространстве; потери энергии радиоволн при распространении через дожди; затухание сигнала миллиметрового диапазона при распространении сквозь листья деревьев; ослабление сигналов при прохождении через плотные препятствия (здания, сооружения и т. д.).

**Результаты.** Проведен анализ затухания сигнала миллиметрового диапазона в свободном пространстве от интенсивности осадков при различных значениях оптической видимости. Проведен анализ затухания сигнала миллиметрового диапазона от расстояния при распространении сигнала через препятствия в виде стен при различных значениях толщины стены. Проведен анализ затухания сигнала миллиметрового диапазона от глубины слоя листьев, что перекрывает распространения сигнала при различных значениях частоты несущей. Проведен анализ значения мощности сигнала миллиметрового диапазона на входе приемника от интенсивности осадков при различных значениях оптической видимости. Проведен анализ значения мощности сигнала миллиметрового диапазона на входе приемника от расстояния при распространении сигнала через препятствия в виде стен при различных значениях толщины стены. Проведен анализ значения мощности сигнала миллиметрового диапазона на входе приемника от глубины слоя листьев, что перекрывает распространения сигнала при различных значениях частоты несущей.

**Выводы.** Проведенные исследования показателей ЭМС позволяют дать рекомендации по применению технологии 5G в конкретных практических ситуациях.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** сети связи 5G, электромагнитная совместимость.

UDC621.396.677.49

## ANALYSIS OF INDICATORS OF ELECTROMAGNETIC COMPATIBILITY OF COMMUNICATION NETWORKS 5 G

**Kolyadenko Yu. Yu.** – Doctor of science, Professor, Professor of the Department of Infocommunication Engineering named after V. V. Popovsky, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv, Ukraine.

**Chursanov N. A.** – Postgraduate student of the Department of Infocommunication Engineering named after V.V. Popovsky, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv, Ukraine.

## ABSTRACT

**Context.** The next generation 5G / IMT-2020 technology, like any new technology, brings its own specific features to all aspects of the practice of its application. One of these particularly important aspects is electromagnetic compatibility. At the stage of preparation for the introduction of 5G radio networks, it is necessary to take early measures to effectively assess the EMC conditions for these networks based on a thorough analysis of the features of 5G technology, and by correctly and accurately assessing these conditions, successfully ensure the electromagnetic compatibility of radio equipment of new networks.

**Objective.** The purpose of this work is to analyze the electromagnetic compatibility of the 5G communication network.

**Method.** An analysis of the main features of the 5G radio interface provides an indication of the expected features of the EMC assessment procedures for these networks. These features mainly relate to taking into account the total interference from the network with its special architecture and dynamics of changes, the choice of new loss models (channel models) for spatially distributed radiation of multidimensional MIMO antennas and a heterogeneous signal propagation medium, as well as taking into account the spectral properties of new signal shapes and character radiation with new non-orthogonal radio access methods.

For EMC analysis, a model of signal attenuation in millimeter-wave radio channels was used, taking into account attenuation of radio waves in free space; loss of energy of radio waves when propagating through rains; attenuation of a millimeter wave signal when propagating through the leaves of trees; attenuation of signals when passing through dense obstacles (buildings, structures, etc.).

**Results.** The analysis of attenuation of the millimeter-wave signal in free space from the intensity of precipitation is carried out at various values of optical visibility. The analysis of the attenuation of the millimeter-wave signal from the distance when the signal propagates through obstacles in the form of walls at various values of the wall thickness is carried out. The analysis of the attenuation of the millimeter-wave signal from the depth of the leaf layer is carried out; it covers the signal propagation at different values of the carrier frequency. The analysis of the value of the power of the millimeter-wave signal at the input of the receiver on the intensity of precipitation is carried out at various values of optical visibility. The analysis of the value of the power of the millimeter-wave signal at the input of the receiver versus the distance when the signal propagates through obstacles in the form of walls at various values of the wall thickness is carried out. The analysis of the power value of the millimeter-wave signal at the receiver input from the depth of the leaf layer is carried out, overlaps the signal propagation at various values of the carrier frequency.

**Conclusions.** The conducted studies of EMC indicators allow us to give recommendations on the application of 5G technology in specific practical situations.



**KEYWORDS:** 5G communication networks, electromagnetic compatibility.

#### REFERENCES

1. 3GPP TR 22.891, "Feasibility Study on New Services and Markets Technology Enablers", Ver. 14.2.0, Sep. 2016.
2. 3GPP TR 38.913, "Study on Scenarios and Requirements for Next Generation Access Technologies", Ver. 14.3.0, June. 2017.
3. 3GPP TS 28.554. Management and orchestration; 5G end to end Key Performance Indicators (KPI). Ver. 2.0.0, release 15, Sep 2018.
4. 5G PPP Architecture Working Group white paper, "View on 5G Architecture", July 2016.
5. Abuarqoub A., Hammoudeh M. H. Behaviour Profiling in Healthcare Applications Using the Internet of Things Technology, *Proceedings of Fourth International Conference on Advances in Information Processing and Communication Technology*, 2016, pp. 1–4. DOI:https://doi.org/10.15224/978-1-63248-099-6-25
6. Agiwal M., Roy A., Saxena N. Next generation 5G wireless networks: A comprehensive survey, *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, № 18(3), 2016, pp. 1617–1655. DOI:https://doi.org/10.1109/COMST.2016.2532458
7. Aijaz A., Dohler M., Aghvami A. H., Friderikos V., Frodigh M. Realizing the Tactile Internet: Haptic Communications over Next Generation 5G Cellular Networks, *IEEE Wireless Comm*, 2017, 24(2), pp. 82–89. DOI:https://doi.org/10.1109/MWC.2016.1500157RP
8. Aijaz A., Simsek M., Dohler M. and Fettweis G. Shaping 5G for the Tactile Internet, *5G Mobile Communications, Springer International Publishing*, 2017, pp. 677–691. DOI:https://doi.org/10.1007/978-3-319-34208-5\_25
9. Aijaz A. Towards 5G-enabled tactile internet: Radio resource allocation for haptic communications, *In Proceedings of the 2016 IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*. Doha, Qatar, 3–6 April 2016, pp. 1–6. DOI: https://doi.org/10.1109/WCNC.2016.7564661
10. Raza U., Kulkarni P., Sooriyabandara M. Low Power Wide Area Networks: An Overview, *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2017, Vol. 19, pp. 855–873. https://doi.org/10.1109/COMST.2017.2652320
11. Radio Regulations. – Ed. ITU, in 4 volumes, 2016
12. Resolution COM 6/20 (WRC-15) Studies on frequency-related matters for International Mobile Telecommunications identification including possible additional allocations to the mobile services on a primary basis in portion(s) of the frequency range between 24.25 and 86 GHz for the future development of International Mobile Telecommunications for 2020 and beyond.
13. Mokrov E., Ponomarenko-Timofeev A., Gudkova I. et al. Modeling Transmit Power Reduction for a Typical Cell with Licensed Shared Access Capabilities, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2018, https://doi.org/10.1109/TVT.2018.2799141
14. Markova E., Gudkova I., Ometov A. et al. Flexible Spectrum Management in a Smart City within Licensed Shared Access Framework, *IEEE Access*, 2017, Vol. 5, pp. 22252–22261. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2017.2758840
15. Talwar S., Choudhury D., Dimou K. et al. Enabling technologies and architectures for 5G wireless, *Proceedings of IEEE MTT-S International Microwave Symposium (IMS) IEEE*. Tampa, FL, USA, 2014, pp. 1–4. https://doi.org/10.1109/MWSYM.2014.6848639
16. Kurakova T., Valdburger M. How ITU can help develop future networks, *ITU News*, 2013, No. 1, pp. 38–41. DOI:https://doi.org/10.1525/aft.2013.41.3.38
17. Galinina O., Andreev S., Komarov M., et al. Leveraging heterogeneous device connectivity in a converged 5G-IoT ecosystem, *Computer Networks*, 2017, Vol. 128, pp. 123–132. https://doi.org/10.1016/j.comnet.2017.04.051
18. Kremenets'ka YA. A., Markov S. YU., Gradoboëva N. V., È.M. Kharchenko Analiz obmezhuuyuchikh ta kompensuyuchikh faktoriv pri rozrakhunku yenergetichnoi yefektivnosti radiosistem v milimetrovomu diapazoni, *Telekomunikatsiyni ta informatsiyni tekhnologii*, 2019, No. 1, pp. 12–21. Rezhim dostupu: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vduikt\_2019\_1\_4. DOI: 10.31673/2412-4338.2019.011221
19. Anderson C. R., Rappaport T. S. In-building wideband partition loss measurements at 2.5 and 60 GHz, *IEEE Transactions on Wireless Communications*, May 2004, Vol. 3, No. 3, pp. 922–928. DOI: 10.1109/TWC.2004.826328.

## ВИКОРИСТАННЯ АДАПТИВНИХ АНТЕННИХ РЕШІТОК ДЛЯ ЗБІЛЬШЕННЯ ПРОПУСКНОЇ ЗДАТНОСТІ МЕРЕЖІ LTE-A

**Маковесенко Д. О.** – канд. техн. наук, доц. каф. телебачення та радіомовлення, Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку, Україна.

**Сідень С. В.** – канд. техн. наук, ст. викл. каф. телебачення та радіомовлення, Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку, Україна.

**Пилявський В. В.** – канд. техн. наук, ст. викл. каф. телебачення та радіомовлення, Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку, Україна.

### АНОТАЦІЯ

**Актуальність.** Зроблено пропозиції щодо можливості використання адаптивних антенних решіток для збільшення пропускної здатності у мережах мобільного зв'язку LTE-A та проаналізовано вигравш від її використання у порівнянні зі стандартним типом антени базових станцій.

**Мета.** Метою статті є аналіз пропускної здатності мережі мобільного зв'язку LTE-A на висхідній лінії при використанні адаптивної лінійної еквідистантної антенної решітки.

**Метод.** Для досягнення результату була розроблена комп'ютерна модель аналізу заводової обстановки мережі мобільного зв'язку у вигляді плоскої регулярної гексагональної антенної решітки, яка складається з 7 трьох секторних чарунок. Для оцінки вигравшу від використання адаптивних антенних решіток було проаналізовано два варіанти: при використанні стандартної антенної решітки мережі LTE-A, та адаптивної лінійної еквідистантної антенної решітки. При проведенні моделювання було виконано 100 випадкових розміщень абонентів корисного та заводових сигналів та розраховано мінімальний, максимальний та середній вигравш від використання адаптивних антенних решіток. У середньому значення коефіцієнта підсилення для адаптивної антенної решітки в напрямку абонентської станції, що створює корисний сигнал більше на 5,69 дБ порівняно з стандартною антенною решіткою мережі LTE-A. У той же час є суттєве зменшення коефіцієнта підсилення адаптивної антени у напрямку заводових абонентських станцій, а саме, для тих, що мають найбільший рівень завади, вигравш становить 32,84 дБ та 28,33 дБ відповідно. Для наочного показу вигравшу у якісних характеристиках мережі було проведено аналіз пропускної здатності для різних типів антен. Представлено розподіл пропускної здатності (розмір транспортного блоку) для 50 ресурсних блоків при використанні адаптивної еквідистантної лінійної антенної решітки порівняно з стандартною антенною решіткою.

**Результати.** Показано, що завдяки використанню адаптивних антенних систем, середня пропускна здатність збільшується з 11 Мбіт/с до 35 Мбіт/с для усіх типів каналів поширення, що розглядалися.

**Висновки.** У статті запропоновано використання адаптивних антенних решіток для збільшення пропускної здатності мережі LTE-A. Моделювання пропускної здатності для 50 ресурсних блоків показало, що в умовах наявності внутрішньосистемних завод при використанні стандартних антен базових станцій середня пропускна здатність становить від 11,2 Мбіт/с до 12,3 Мбіт/с. У той же час завдяки використанню адаптивних антенних систем середня пропускна здатність збільшується з 11 Мбіт/с до 35 Мбіт/с для усіх типів каналів багатопроменевого поширення, що розглядалися.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** адаптивна модуляція та кодування, пропускна здатність, адаптивна антена, транспортний блок, завада.

### АБРЕВІАТУРИ

ААР – адаптивна антена решітка;  
АЦП – аналого-цифрове перетворення;  
АМС – Adaptive Modulation and Coding (адаптивна модуляція та кодування);  
BLER – Block Error Rate (коефіцієнт помилок блоку);  
CQI – Channel Quality Indicator (індикатор якості каналу);  
EPA – Extended Pedestrian A (розширена пішоходна модель);  
ETU – Extended Typical Urban (розширена типова міська модель);  
EVA – Extended Vehicular A (розширена модель для транспортних засобів);  
LTE – Long Term Evolution (довгострокова еволюція);  
MCS – modulation coding scheme (схема модуляції та кодування);

OFDMA – Orthogonal Frequency Division Multiplexing (мультиплексування з ортогональним частотним поділом);  
PUSCH – Physical Uplink Shared Channel (фізичний висхідний спільний канал);  
RB – resource block (ресурсний блок);  
TBS – Transport Block Size (розмір транспортного блоку);  
SNR – Signal-to-Noise Ratio (відношення сигнал/шум).

### НОМЕНКЛАТУРА

$f$  – робоча частота;  
 $G_k(\varphi, \theta)$  – коефіцієнт підсилення антени базової станції в напрямку заводової абонентської станції;  
 $L_k$  – втрати поширення радіохвиль для траси заводова абонентська станція – базова станції центральної чарунки;  
 $N$  – кількість елементів антенної решітки;

$n_s$  – кількість елементів у векторі  $\theta_s$  ;  
 $n_n$  – кількість елементів у векторі  $\theta_n$  ;  
 $P_n$  – рівень власних шумів приймача базової станції;  
 $P_{rx}$  – потужність сигналу абонентської станції на вході приймача базової станції;  
 $P_{trmk}$  – потужність передавача абонентської станції;  
 $\theta_{s_k}$  – вектор корисних сигналів;  
 $\theta_{n_k}$  – вектор небажаних (завадових) сигналів;  
 $w_i$  – комплексні вагові коефіцієнти в блоці формування антенної решітки.

## ВСТУП

Підвищення швидкості передавання в сучасних мережах рухомого зв'язку є актуальним завданням для будь-якого покоління мережі. Технології четвертого покоління рухомого зв'язку 4G LTE забезпечують подальший розвиток за рахунок підвищення швидкості передачі даних та кращої якості обслуговування.

LTE заснований на множинному доступі ортогонального частотного поділу OFDMA і досягає високих швидкостей передачі даних, поєднуючи високу пропускну здатність, модуляцію більш високого порядку та просторове мультиплексування.

При побудові мережі рухомого зв'язку взаємні завади в мережі є суттєвим фактором, що погіршує відношення  $SNR$  та зменшують пропускну здатність в радіоканалі.

Одним із підходів, що зменшує внутрішньосистемні завади в мережі рухомого зв'язку є використання адаптивних антенних решіток.

**Об'єктом дослідження** є – процес моделювання пропускну здатності в мережі рухомого зв'язку при застосуванні адаптивних антенних решіток.

**Предметом дослідження** є – методи підвищення ефективності використання радіочастотного ресурсу в мережі LTE-A.

**Метою даної статті** є запропонування адаптивної антенної решітки, що збільшує пропускну здатність мережі рухомого зв'язку LTE-A на висхідній лінії у порівнянні зі стандартними антенами базових станцій мереж 4-го покоління.

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Очікуваним результатом даного дослідження є збільшення пропускну здатності мережі рухомого зв'язку LTE-A на висхідній лінії за рахунок зменшення внутрішньосистемних завад, що створюються абонентськими станціями в сусідніх чарунках.

За рахунок використання запропонованої адаптивної антенної решітки очікується зменшення сумарного рівня завади  $P_{int_v}$  на вході базової станції. Для оцінки ефективності застосування антенної решітки пропонується моделювання реальної завадової обстановки в

мережі LTE-A та постійна оцінка індексу модуляційно-кодової схеми для  $I_{MCS}$  відповідно до отриманого значення  $SNR$  на вході базової станції. У результаті збільшення пропускну здатності при виборі запропонованої антенної решітки оцінюється розміром транспортного блоку пакетів в мережі LTE-A.

$$TBS_i^{(max)} = \max_{TBS_i \in I_{mcs_i}} \left\{ \begin{array}{l} \min(G_k(\varphi, \theta)), \theta \in \theta_{n_k}, \varphi = \text{const} \\ \max(G_k(\varphi, \theta)), \theta \in \theta_{n_s}, \varphi = \text{const} \end{array} \right\}. \quad (1)$$

## 2 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

LTE Реліз 12 (званий LTA-Advanced або LTE-A) ввів схему модуляції вищого порядку для поліпшення спектральної ефективності та пропускну здатності системи [1]. Це було досягнуто введенням 256-QAM і, отже, зміною інших системних вимог, таких як розмір транспортного блоку [2]. В LTE реалізовано функцію адаптивної модуляції та кодування, що враховує змінні умови стану радіоканалу, щоб забезпечити користувачеві оптимальну швидкість передачі даних. Таким чином, при хороших умовах радіоканалу забезпечується висока швидкість передачі даних; при цьому низька швидкість передачі даних забезпечується, коли в каналі умови погіршуються. Отже, покращення умов поширення радіохвиль за рахунок технології AMC буде збільшувати швидкість передачі в мережі.

Термін «адаптивна антенна решітка» вперше було використано в 1959 році, для опису самофазованої антенної решітки [3]. Але можливість їх використання стало можливим відносно недавно, що пов'язано зі стрімким розвитком мікроелементної бази та росту обчислювальних можливостей.

ААР мають багато переваг перед звичайними антенними решітками систем мобільного зв'язку. Основними з них є можливість швидкого налаштування схеми формування променя та можливість його контролю. Комбінуючи використання адаптивних антенних решіток та схеми адаптивної модуляції та кодування, можна значно підвищити пропускну здатність мережі [4].

В роботах [5–6] відзначається, що за рахунок адаптивного формування променів та просторового розподілу абонентів, що стає можливим за рахунок використання адаптивних антенних решіток, можна значно підвищити пропускну здатність мереж 4-го покоління. Але на даний час числові показники, що наочно будуть демонструвати збільшення пропускну здатності поки не приведені.

## 3 МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ

Мережа LTE дозволяє адаптуватися абонентському терміналу шляхом застосування різних режимів модуляції і кодування. Кожна з даних MCS може застосовуватися при регламентованому пороговому значенні  $SNR$ , що в свою чергу залежить від умов поширення в каналі радіозв'язку. Останні можуть бути модельовані з умов розповсюдження і типу каналу. Фактично при розрахунку втрат для кожної

MCS можна визначити радіус зони покриття однієї БС (рис. 1).

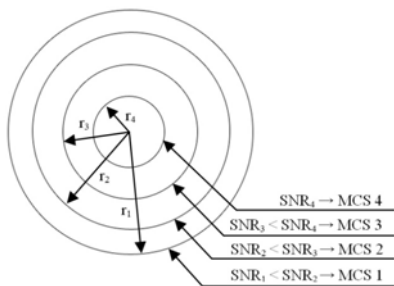


Рисунок 1 – Залежність відношення SNR від зони покриття окремої MCS

Адаптивна зміна модуляційно-кодової схеми, як основна частина процедури AMC, включає в себе можливість визначення порогового значення SNR і за допомогою зворотного зв'язку, через індикатори якості каналу CQI [2], змінювати параметри передачі і тип MCS. Залежно від типу і якості каналу зв'язку E-UTRA може змінювати сценарій процедури AMC при відомих значеннях коефіцієнта помилкових блоків BLER, що знаходяться в індикаторах якості каналу CQI. При цьому зміна MCS можлива лише за умови що значення BLER не може бути менше  $10^{-1}$ .

Для більш зручної оцінки якості каналу BLER прив'язаний до SNR для кожної з існуючих CQI / MCS [7]. Технічні характеристики 3GPP [8] описують канали низхідної лінії зв'язку та висхідної лінії зв'язку, які можуть бути використані для моделювання будь-яких MCS для виділених блоків ресурсів та відповідного розміру транспортного блоку. Параметри для будь-якого індексу MCS для фізичного загального каналу висхідної лінії зв'язку PUSCH можна отримати за допомогою списку індексу MCS для індексу TBS для PUSCH. Для LTE-A PUSCH визначено 29 варіантів MCS. Для  $0 \leq I_{MCS} \leq 28$  UE спочатку визначає індекс TBS ( $I_{TBS}$ ) за допомогою  $I_{MCS}$ .

Для LTE-A PUSCH визначено 29 варіантів MCS. Для  $0 \leq I_{MCS} \leq 28$  UE спочатку визначає індекс TBS ( $I_{TBS}$ ) за допомогою  $I_{MCS}$ . У табл. 1 показано залежність спектральної ефективності від MCS в мережі LTE-A для 50 RB каналу PUSCH.

Багатопроменевий канал поширення визначається комбінацією профілю затримки з багатозатримкою і максимальної частоти доплерівського режиму, яка може бути 5, 70 або 300 Гц. Специфікація 3GPP [8] описує компоненти багатопроменевих каналів для розширеної пішохідної моделі А ЕРА, розширеної моделі автомобіля А EVA та розширеної моделі міста ETU. В [9] визначає відношення SNR для кожного MCS для висхідного каналу.

На рисунках 2–3 показано MCS як функція співвідношення SNR для швидкості помилок блоку BLER  $10^{-1}$ , які отримані відповідно до [9].

#### 4 ЕКСПЕРИМЕНТИ

Для оцінки заводової обстановки в мережі LTE-A розглядається періодична структура у вигляді плоскої регулярної гексагональної решітки, що містить сім чарунок та три секторні антени у кожній чарунці (рис. 4). В центральній чарунці працює абонентська станція, з потужністю передавача  $P_{trm}$ . В чарунках першого кругу завади працюють абонентські станції, що створюють заваду  $P_{intk}$  на вході приймача базової станції.

Сумарний рівень завади на вході приймача базової станції від усіх абонентських станцій дорівнює:

$$P_{int\Sigma} = \sum_{k=1}^N P_{trmk} - L_k - G_k(\varphi, \theta). \quad (2)$$

Таблиця 1 – Параметри MCS 50 RB для каналу PUSCH

$I_{MCS}$	Модуляція	Швидкість коду	Спектральна ефективність (Біт/Символ)	$I_{MCS}$	Модуляція	Швидкість коду	Спектральна ефективність (Біт/Символ)
0	QPSK	0,08	0,1575	15	QAM-16	0,40	1,6056
1	QPSK	0,10	0,2048	16	QAM-16	0,43	1,7367
2	QPSK	0,13	0,2521	17	QAM-16	0,47	1,8678
3	QPSK	0,16	0,3249	18	QAM-16	0,52	2,0862
4	QPSK	0,21	0,4123	19	QAM-16	0,56	2,2583
5	QPSK	0,25	0,4997	20	QAM-16	0,61	2,4330
6	QPSK	0,29	0,5871	21	QAM-64	0,41	2,4330
7	QPSK	0,35	0,7054	22	QAM-64	0,43	2,6078
8	QPSK	0,40	0,7928	23	QAM-64	0,48	2,8963
9	QPSK	0,45	0,9093	24	QAM-64	0,52	3,1148
10	QPSK	0,50	0,9967	25	QAM-64	0,54	3,2240
11	QAM-16	0,25	0,9967	26	QAM-64	0,58	3,4789
12	QAM-16	0,28	1,1278	27	QAM-64	0,60	3,6072
13	QAM-16	0,33	1,3025	28	QAM-64	0,70	4,1752
14	QAM-16	0,37	1,4746				

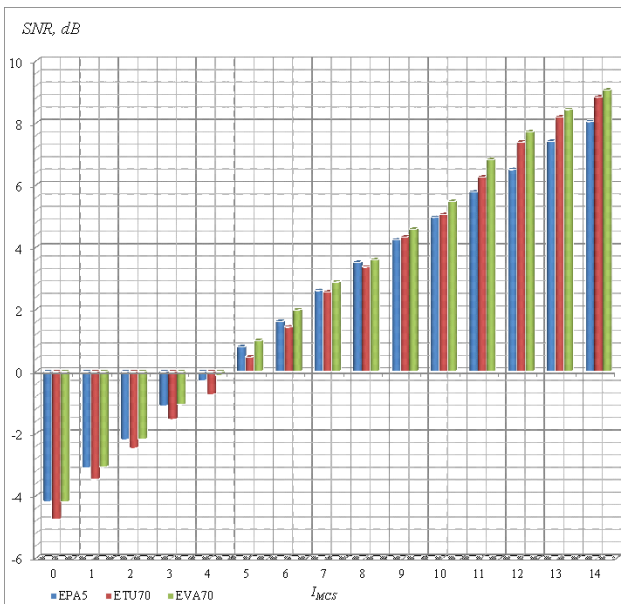


Рисунок 2 – MCS як функція відношення SNR для випадку BLER=10<sup>-1</sup> (0 ≤ I<sub>MCS</sub> ≤ 14)

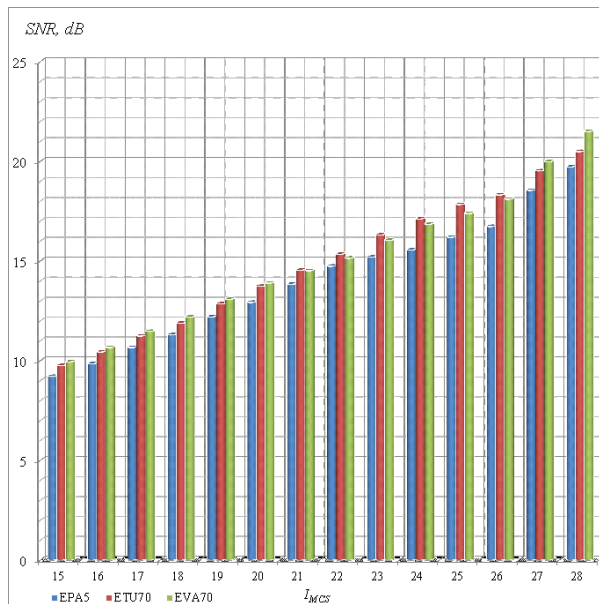


Рисунок 3 – MCS як функція відношення SNR для випадку BLER=10<sup>-1</sup> (15 ≤ I<sub>MCS</sub> ≤ 28)

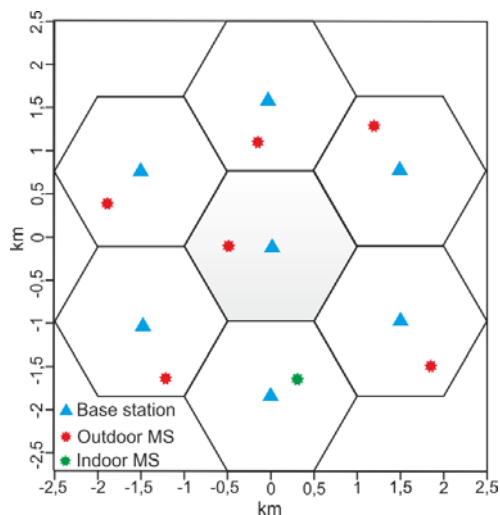


Рисунок 4 – Мережа E-UTRA з розподіленими користувачами

Застосування адаптивної антенної системи може зменшити рівень завади за рахунок адаптивної зміни діаграми спрямованості антени і зменшення рівня завади від відповідної абонентської станції.

Оцінка запропонованої адаптивної антенної системи здійснюється шляхом моделювання завадової обстановки мережі рухомого зв'язку, шляхом вибору розміру чарунки, щільності розташування абонентських станцій, висот встановлення антен базової та абонентських станцій. Для заданих вихідних даних визначається сумарний рівень завади на вході приймача базової станції, відповідно до (3), та результуюче значення відношення сигнал/(завада + шум) за допомогою виразу:

$$SINR = \frac{P_{rx}}{P_n + \sum_{k=1}^N P_{int_k}} \quad (3)$$

Для першого моделювання використовується стандартна діаграма спрямованості антени, параметри якої наведено в Рекомендації ITU-R F.1336-4 [10]. На другому етапі використовується запропонована адаптивна антенна решітка, опис якої наведено нижче.

При оцінці запропонованої антени визначається індекс модуляційно-кодової схеми (I<sub>MCS</sub>) відповідно до отриманого значення сигнал/(шум+завада) та розмір транспортного блоку..

Однією з можливих технологій, що активно впроваджується у системи мобільного зв'язку, є використання адаптивних антенних решіток. ААР мають ряд переваг над антенними решітками, які використовуються у сучасних системах мобільного зв'язку. Використання ААР дозволяє швидко змінювати та формувати необхідні характеристики спрямованості антени (такі як діаграма спрямованості, коефіцієнт підсилення).

У рекомендації ITU відзначено, що використання адаптивних антенних технологій є одним з методів зменшення рівнів завад та підвищення ефективності використання радіочастотного ресурсу [11].

В адаптивних антенних системах зв'язок між користувачем і базовою станцією забезпечується за рахунок додавання просторового виміру. З метою оптимізації робочої характеристики бездротової системи адаптивна антена може динамічно змінювати форму діаграми спрямованості в залежності від зовнішніх факторів.

Функціональна блок-схема цифрового сигнального процесора адаптивної антенної решітки показана на рис. 5 [12].

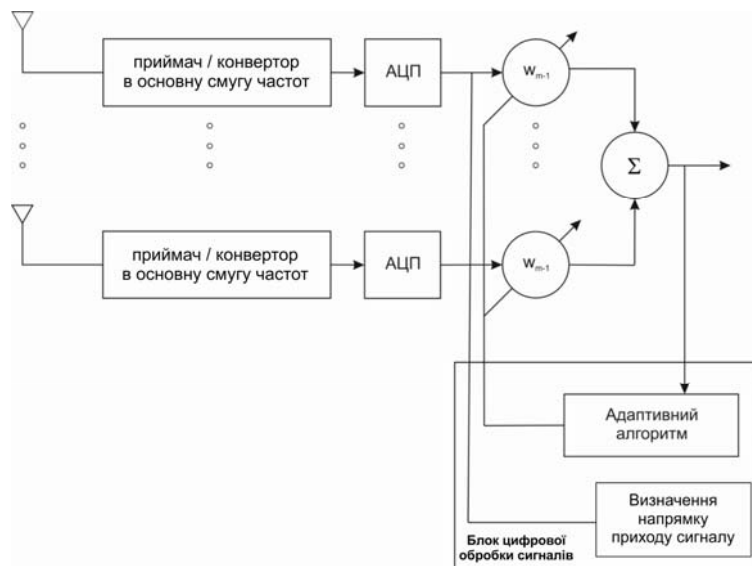


Рисунок 5 – Функціональна блок-схема адаптивної антенної решітки

Основними перевагами ААР є:

– збільшення пропускної здатності. У роботі [13] показано, що при використанні ААР, що складається з  $M$  елементів, можливе збільшення пропускної здатності до  $M$  разів;

– збільшення максимальної дальності зв'язку. ААР дозволяє збільшити максимальну дальність зв'язку до  $M-1$  разів, у порівнянні зі звичайною антенною решіткою, при однаковій кількості користувачів та підведеної потужності до антени [14];

– значне зменшення рівня завад. Лінійна антенна решітка з  $M$  елементів дозволяє створити  $M-1$  нулів діаграми спрямованості, та відповідно зменшити вплив  $M-1$  не корельованих завад.

В роботі використаний наступний алгоритм [15]:

$$R = [0, 1, 2, \dots, N - 1], \quad (4)$$

$$s_1 = \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} \left( \exp \left( \frac{i2\pi d}{\lambda} \sin(\theta_s) R \right) \right)^T; \quad (5)$$

$$s_2 = \frac{1}{n_n} \sum_{k=1}^{n_n} \left( \exp \left( \frac{i2\pi d}{\lambda} \sin(\theta_n) R \right) \right)^T;$$

$$w = s_1 - \frac{1}{N} s_2 s_2^T s_1; \quad (6)$$

$$\|w\| = \frac{w}{\sqrt{\text{sum}(\text{abs}(w)^2)}}. \quad (7)$$

Розрахунок вектора

$$s = \exp \left( \frac{i2\pi d}{\lambda} \sin(\theta) R^T \right). \quad (8)$$

Розрахунок та нормування коефіцієнта підсилення антени

$$G = \left( \text{abs} \left( \|w\|^T \cdot s \right) \right)^2; \quad (9)$$

$$G_{norm} = \frac{G}{G_{max}}; \quad (10)$$

$$G_{norm}, \text{dB} = 10 \log G_{norm}. \quad (11)$$

У даному випадку, у якості елемента антенної решітки використовується ізотропний (всепрямований) випромінювач та не враховується взаємний вплив елементів один на одного.

Для аналізу пропускної здатності мережі LTE-Advanced в середовищі Matlab була розроблена комп'ютерна модель мережі рухомого зв'язку (рис. 4), у якій випадковим чином розміщуються корисний та завадові сигнали. У якості антени базової станції використовувалися як стандартна антенна мереж 4G та адаптивна лінійна еквідистантна антенна решітка.

Вихідні дані мережі, на базі яких проводилося моделювання представлені у табл. 2.

Таблиця 2 – Вихідні дані моделі

Параметр	Значення
Частотний діапазон	1710–1785 МГц, 1805–1880 МГц (FDD, Band 3)
Радіус комірки	1 км
Висота підвісу антени БС	40 м
Висота підвісу антени АС	2 м
Смуга частот	10 МГц (50 ресурсних блоків)
Потужність передавача АС	–40 дБм...23 дБм
Максимальний коефіцієнт підсилення антени	16 дБі
Модель каналу	Extended Hata (Хата розширена)
Середовище	Міська забудова

## 5 РЕЗУЛЬТАТИ

За результатами моделювання отримано значення діаграми спрямованості антени, що забезпечує мінімальний рівень коефіцієнта підсилення у напрямку заводових абонентських станцій, що мають найбільшу потужність, шляхом динамічної адаптації параметрів антени до розташування абонентських станцій та умов поширення сигналу.

При проведенні моделювання було виконано 100 випадкових розміщень (ітерацій) абонентів корисного та заводових сигналів [15].

В табл. 3 приведені усереднені значення мінімального, максимального та середнього виграшу при використанні адаптивної еквідистантної лінійної антенної решітки у порівнянні з стандартною антенною решіткою мережі рухомого зв'язку, параметри якої наведені в Рекомендації ITU-R F.1336-4 [10].

Таблиця 3 – Середній вигреш

$\theta$	$\Delta G_{\min}$ , дБ	$\Delta G_{\max}$ , дБ	$\Delta \bar{G}$ , дБ
$\theta_s$	2,95	8,56	5,69
$\theta_{n1}$	12,23	-49,99	-13,48
$\theta_{n2}$	22,52	-29,72	-2,06
$\theta_{n3}$	25,40	-25,21	1,69
$\theta_{n4}$	0,57	-62,01	-22,42
$\theta_{n5}$	0,30	-64,76	-32,84
$\theta_{n6}$	3,52	-54,33	-28,33

Аналіз таблиці 3 показує, що у середньому значення коефіцієнта підсилення адаптивної антенної решітки в напрямку абонентської станції, що створює корисний сигнал, більше на 5,69 дБ порівняно з стандартною антенною решіткою мережі LTE-A. У той же час є суттєве зменшення коефіцієнта підсилення антени у напрямку заводових абонентських станцій.

Значення  $\Delta \bar{G}$  значно залежить від кутової різниці між напрямками корисного та заводового сигналу. У напрямках заводових сигналів значення виграшу  $\Delta \bar{G}$  значно змінюється. Даний факт обумовлено відносно близьким розташуванням корисного сигналу та завади і неможливістю їх просторового розділення запропонованої адаптивної антенної решітки.

Для кількісної оцінки виграшу у якісних характеристиках мережі було проведено аналіз пропускної здатності LTE-A для різних типів антен для трьох типів каналів багатопроменевого поширення (EPA, ETU, EVA).

На рис. 6 зображено розподіл пропускної здатності (TBS, кбіт/с) для 50 RB при використанні стандартної антенної решітки при порівнянні з адаптивною еквідистантною лінійною антенною решіткою (рис. 7).

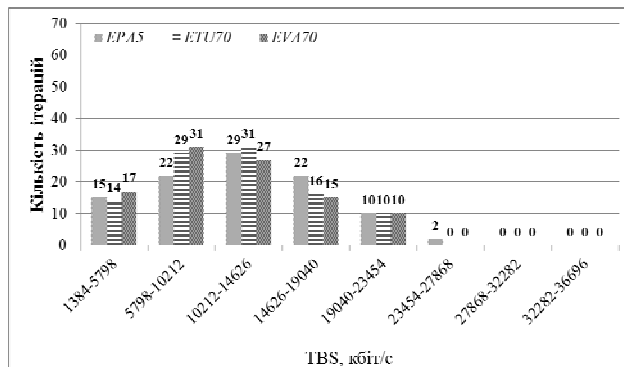


Рисунок 6 – Розмір транспортного блоку при використанні антенною решіткою, параметри якої наведено в Рекомендації ITU-R F.1336-4

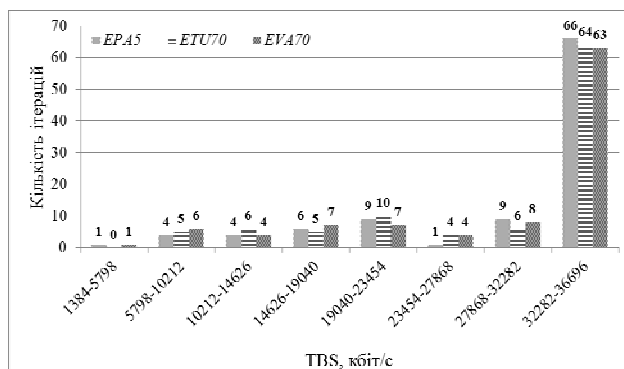


Рисунок 7 – Розмір транспортного блоку при використанні адаптивної лінійної еквідистантної антени

Як видно з рис. 6–7, пропускна здатність в мережі LTE-A суттєво збільшується при використанні запропонованої адаптивної антенної системи.

## 6 ОБГОВОРЕННЯ

В умовах наявності внутрішньосистемних завод при використанні стандартних антен базових станцій середня пропускна здатність становить від 11,2 Мбіт/с до 12,3 Мбіт/с. При використанні адаптивних антенних систем забезпечується вигреш підсилення антени в напрямку корисного сигналу та одночасне зменшення підсилення в напрямку заводових сигналів. Це забезпечується за рахунок адаптивної зміни параметрів антени шляхом пошуку абонентських станцій, що створюють найбільший рівень завади. Так для сигналів завади, що мають найбільший рівень (напрямки  $\theta_{n5}$ ,  $\theta_{n6}$ ) середній вигреш коефіцієнта підсилення антени становить 32,84 та 28,33 дБ відповідно. Однак в деяких випадках спостерігалось підвищення рівня заводових сигналів через появу дифракційних максимумів картини випромінювання запропонованої лінійної антенної решітки.

Коефіцієнт підсилення лінійної еквідистантної антенної решітки залежить від кількості її елементів та відстані між ними. Зі збільшенням кількості елементів збільшується роздільна здатність решітки, тобто здатність відокремлювати сигнал і перешкоди, що надходять від мінімально різних напрямків. Подальша оп-

тимізації характеристики спрямованості антени потребує збільшення кількості елементів решітки, що призводить до значного збільшення масо-габаритних розмірів всієї системи. Тому одне із подальших завдань – визначити оптимальне значення кількості елементів із потрібним значенням підсилення.

Проведене моделювання пропускної здатності на лінії вгору для 50 ресурсних блоків в мережі LTE-A. Вихідні дані для моделювання наведені в табл. 2. Такі параметри мережі можна вважати типовими для побудови мережі LTE-A в умовах міського середовища. Показано, що завдяки використанню адаптивних антенних систем, середня пропускна здатність збільшується з 11 Мбіт/с до 35 Мбіт/с для усіх типів каналів поширення, що розглядалися: EPA5, ETU70 та EVA70.

### ВИСНОВКИ

Наукова новизна отриманих результатів складається у тому, що для мережі рухомого зв'язку LTE-A на висхідній лінії можливо зменшити внутрішньосистемні завади, що створюються абонентськими станціями в сусідніх чарунках, за рахунок запропонованих адаптивних антенних решіток. Адаптивні антенні решітки дозволяють враховувати змінні умови в радіоканалі та поточну заводову обстановку. Діаграма спрямованості антени забезпечує просторову вибірковість, а саме мінімальний рівень у напрямку заводових абонентських станцій, що мають найбільшу потужність, шляхом динамічної адаптації параметрів антени до розташування абонентських станцій та умов поширення сигналу.

Практична значимість роботи складається у тому, що для оцінки збільшення пропускної здатності при застосуванні запропонованої антени в середовищі Matlab була розроблена комп'ютерна модель мережі рухомого зв'язку LTE-A. При проведенні моделювання було виконано 100 випадкових розміщень (ітерацій) абонентів корисного та заводових сигналів. У середньому значення коефіцієнта підсилення адаптивної антенної решітки в напрямку абонентської станції, що створює корисний сигнал більше на 5,69 дБ порівняно з стандартною антенною решіткою мережі LTE-A. У той же час є суттєве зменшення коефіцієнта підсилення антени у напрямку заводових абонентських станцій, а саме, для тих, що мають найбільший рівень завади виграш становить 32,84 дБ та 28,33 дБ відповідно.

При моделюванні пропускної здатності враховано, що залежно від якості в каналу зв'язку LTE-A відбувається адаптивна зміна модуляційно-кодової схеми при відомих значеннях коефіцієнта BLER знаходяться в індикаторах якості каналу CQI.

Моделювання пропускної здатності для 50 ресурсних блоків показало, що в умовах наявності внутрішньосистемних завод при використанні стандартних антен базових станцій середня пропускна здатність становить від 11,2 Мбіт/с до 12,3 Мбіт/с. У той же час завдяки використанню адаптивних антенних систем середня пропускна здатність збільшується з 11 Мбіт/с

до 35 Мбіт/с для усіх типів каналів багатопроблемового поширення, що розглядалися.

Перспективи подальших досліджень використання адаптивних антенних масивів включають: врахування фактичних характеристик спрямованості елементів антенного масиву з урахуванням їх взаємного впливу, а також розробку нових антенних елементів з широкосмуговими властивостями. Також планується проаналізувати використання адаптивних антенних масивів більш складних конфігурацій з можливістю зменшення бічних максимумів схеми випромінювання, що суттєво збільшить результуюче співвідношення сигнал / (завада + шум).

### ПОДЯКИ

Дослідження виконано в рамках науково-дослідної роботи «Новітня концепція управління та передавання інформації із застосуванням адаптивних технологій в каналах відеозв'язку військово-цивільного призначення» на замовлення Міністерства освіти і науки України, реєстраційний номер 0117U006808

### ЛІТЕРАТУРА / LITERATURE

1. Ravindra S. Throughput Enhancement for Device to Device Communication in LTE-A Networks / S. Ravindra, G. K. Siddesh // International Journal of Engineering Technology Science and Research IJETSRS. – 2018. – Vol. 5, № 3. – P. 813 – 818. DOI: 10.1007/978-981-32-9690-9\_59
2. Kim I. Implementation and performance evaluation of 256-QAM in vienna system level simulator / I. Kim, J. Um and S. Park // 20th International Conference on Advanced Communication Technology (ICACT), Chuncheon-si Gangwon-do, Korea (South), 2018. – IEEE, 2018. – P. 556–559. DOI: 10.23919/ICACT.2018.8323830
3. Patent 2908002, USA. Electromagnetic reflector / L. C. Van; applicant. – № US514040A; appdate 08.06.1955; pubdate 06.10.1959
4. Wang Y. Intelligent resource optimisation using semi-smart antennas in LTE OFDMA systems / Y. Wang, X. Yang, A. Ma // IEEE International Conference on Communications Technology and Applications, Beijing, 2009. – IEEE, 2009. – P. 173–179. DOI: 10.1109/ICCOMTA.2009.5349214
5. Interference coordination and cancellation for 4G network / [G. Boudreau, J. Panicker, N. Guo et al.] // IEEE Communications Magazine. – 2009. – Vol. 47, № 4. – P. 74–81. DOI: 10.1109/MCOM.2009.4907410
6. Interference management for 4G cellular standards [WIMAX/LTE UPDATE] / [N. Himayat, S. Talwar, A. Rao et al.] // IEEE Communications Magazine. – 2010. – Vol. 48, № 8. – P. 86–92. DOI: 10.1109/MCOM.2010.5534591
7. Technical Specification Group Radio Access Network; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); User Equipment (UE) radio transmission and reception (Release 12): 3GPP TS 36.101 V12.24.0. – [Effective from 2020-07-16]. – Valbonne: 3GPP, 2020. – 784 p.
8. Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Radio Frequency (RF) system scenarios: 3GPP TR 36.942 15.0.0. – [Effective from 2018-07-02]. – Sophia Antipolis: ETSI, 2018. – 110 p.
9. Yang W.-B. LTE physical layer performance analysis [Electronic resource]. – Access mode: <https://bit.ly/3g0A2ta>



10. Reference radiation patterns of omnidirectional, sectoral and other antennas for the fixed and mobile service for use in sharing studies in the frequency range from 400 MHz to about 70 GHz: ITU-R F. 1336-5 – [Effective from 2019-01-01]. – Geneva: ITU-R, 2019. – 110 p.
11. New spectrally efficient techniques and systems: ITU-R SM.856-1 – [Effective from 1997-03-01]. – Geneva : ITU-R, 1997. – 4 p.
12. Balanis C. Introduction to smart antennas Synthesis Lectures on Antennas / C. Balanis, P. Ioannides // Morgan & Claypool. – 2007. – 170 p. DOI: 10.2200/S00079ED1V01Y200612ANT005
13. Kim K. Handbook of CDMA system design, engineering and optimization / K. Kim. – New York : Prentice Hall, 2000. – 252 p.
14. Bressler Y. On the number of signals resolvable by a uniform linear array / Y. Bressler and A. Macovsky // Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. – 1986. – Vol. 34, No. 6. – P. 1361–1375. DOI: 10.1109/TASSP.1986.1164973
15. Makoveenko D. Use of Adaptive Antenna Arrays to Reduce Interference in the E-UTRA Network / D. Makoveenko, S. Siden, V. Pyliavskiy // 27th National Conference with International Participation (TELECOM), 2019. – IEEE, 2019. – P. 12–15. DOI: 10.1109/TELECOM48729.2019.8994885

Стаття надійшла до редакції 12.05.2021.  
Після доробки 19.08.2021.

УДК 621.396

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АДАПТИВНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК ДЛЯ УВЕЛИЧЕНИЯ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ СЕТИ LTE-A

**Маковецько Д. А.** – канд. техн. наук, доц. каф. телевидення і радіовещання, Государственный университет интеллектуальных технологий и связи, Украина.

**Сідень С. В.** – канд. техн. наук, ст. викл. каф. телевидення і радіовещання, научно-исследовательского центра телекоммуникационных систем и сетей связи, Государственный университет интеллектуальных технологий и связи, Украина.

**Пілявський В. В.** – канд. техн. наук, ст. викл. каф. телевидення і радіовещання, Государственный университет интеллектуальных технологий и связи, Украина.

#### АННОТАЦИЯ

**Актуальность.** Сделаны предложения о возможности использования адаптивных антенных решеток для увеличения пропускной способности в сетях мобильной связи LTE-A и проанализированы выигрыш от ее использования по сравнению со стандартным типом антенны базовых станций.

**Цель.** Целью статьи является анализ пропускной способности сети мобильной связи LTE-A на восходящей линии при использовании адаптивной линейной эквидистантной антенной решетки.

**Метод.** Для достижения результата была разработана компьютерная модель анализа помеховой обстановки сети мобильной связи в виде плоской регулярной гексагональной антенной решетки, которая состоит из 7 трех секторных ячеек. Для оценки выигрыша от использования адаптивных антенных решеток были проанализированы два варианта: при использовании стандартной антенной решетки сети LTE-A, и адаптивной линейной эквидистантной антенной решетки. При проведении моделирования было выполнено 100 случайных размещений абонентов полезного и помеховых сигналов и рассчитан минимальный, максимальный и средний выигрыш от использования адаптивных антенных решеток. В среднем значение коэффициента усиления для адаптивной антенной решетки в направлении абонентской станции создает полезный сигнал больше на 5,69 дБ по сравнению со стандартной антенной решеткой сети LTE-A. В то же время есть существенное уменьшение коэффициента усиления адаптивной антенны в направлении помеховых абонентских станций, а именно, для имеющих наибольший уровень помехи выигрыш составляет 32,84 дБ и 28,33 дБ соответственно. Для наглядного показа выигрыша в качественных характеристиках сети был проведен анализ пропускной способности для различных типов антенн. Представлено распределение пропускной способности (размер транспортного блока) для 50 ресурсных блоков при использовании адаптивной эквидистантной линейной антенной решетки по сравнению со стандартной антенной решеткой.

**Результаты.** Показано, что благодаря использованию адаптивных антенных систем средняя пропускная способность увеличивается с 11 Мбит / с до 35 Мбит / с для всех типов каналов распространения, которые рассматривались.

**Выводы.** В статье предложено использование адаптивных антенных решеток для увеличения пропускной способности сети LTE-A. Моделирование пропускной способности для 50 ресурсных блоков показало, что в условиях наличия внутрисистемных помех при использовании стандартных антенн базовых станций средняя пропускная способность составляет от 11,2 Мбит / с до 12,3 Мбит / с. В то же время благодаря использованию адаптивных антенных систем средняя пропускная способность увеличивается с 11 Мбит / с до 35 Мбит / с для всех типов каналов многолучевого распространения, которые рассматривались.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** адаптивная модуляция и кодирование, пропускная способность, адаптивная антенна, транспортный блок, помеха.

UDC 621.396

### USE OF ADAPTIVE ANTENNA ARRAYS FOR INCREASE THE THROUGHPUT IN LTE-A

**Makoveenko D. O.** – PhD, Associate Professor, Department of Television and Radio Broadcasting, State University of Intelligent Technologies and Telecommunications, Ukraine.

**Siden S. V.** – PhD, Senior Lecturer, Department of Television and Radio Broadcasting, State University of Intelligent Technologies and Telecommunications, Ukraine.

**Pyliavskiy V. V.** – PhD, Senior Lecturer, Department of Television and Radio Broadcasting, State University of Intelligent Technologies and Telecommunications, Ukraine.

#### ABSTRACT

**Context.** The aim of the article is to analyze the throughput of the LTE-A mobile network on the uplink using an adaptive linear equidistant antenna array.

**Objective.** Suggestions have been made for the possibility of using adaptive antenna arrays to increase bandwidth in LTE-A mobile networks and analyze the benefits of its use compared to the standard type of base station antenna

**Method.** To achieve this result, a computer model of noise analysis of the mobile network in the form of a flat regular hexagonal antenna array consisting of 7 three-sector cells was developed. To estimate the benefit from the use of adaptive antenna arrays, two options were analyzed: when using a standard antenna array of the LTE-A network, and an adaptive linear equidistant antenna array. During the simulation, 100 random placements of subscribers of useful and interference signals were performed and the minimum, maximum and average gain from the use of adaptive antenna arrays was calculated. The average value of the gain for the adaptive antenna array in the direction of the subscriber station, which generates a useful signal of 5.69 dB more than the standard antenna array of the LTE-A network. At the same time, there is a significant reduction in the gain of the adaptive antenna in the direction of the interference subscriber stations, namely, for those with the highest interference level, the gain is 32.84 dB and 28.33 dB, respectively. To clearly show the gain in the qualitative characteristics of the network, a bandwidth analysis was performed for different types of antennas. The bandwidth distribution (transport block size) for 50 resource blocks using an adaptive equidistant linear antenna array compared to a standard antenna array is presented.

**Results.** It is shown that due to the use of adaptive antenna systems, the average bandwidth increases from 11 Mbit/s to 35 Mbit/s for all types of distribution considered channels.

**Conclusions.** The article proposes the use of adaptive antenna arrays to increase the bandwidth of the LTE-A network. The simulation of bandwidth for 50 resource blocks showed that in the presence of internal system interference when using standard antennas of base stations, the average bandwidth is from 11.2 Mbps to 12.3 Mbps. At the same time, due to the use of adaptive antenna systems, the average bandwidth increases from 11 Mbit/s to 35 Mbit/s for all types of multipath channels considered.

**KEYWORDS:** adaptive modulation and coding, capacity, adaptive antenna, transport block, interference.

#### REFERENCES

1. Ravindra S., Siddesh G. K. Throughput Enhancement for Device to Device Communication in LTE-A Networks, *International Journal of Engineering Technology Science and Research IJETS*, 2018, Vol. 5, No. 3, pp. 813–818. DOI: 10.1007/978-981-32-9690-9\_59
2. Kim I., Um J. and Park S. Implementation and performance evaluation of 256-QAM in vienna system level simulator, *20th International Conference on Advanced Communication Technology (ICACT). Chuncheon-si Gangwon-do, Korea (South), 2018*, IEEE, 2018, pp. 556–559. DOI: 10.23919/ICACT.2018.8323830
3. Van L. C. Patent 2908002, USA. Electromagnetic reflector ; applicant, № US514040A; appdate 08.06.1955; pubdate 06.10.1959
4. Wang Y., Yang X., Ma A. Intelligent resource optimisation using semi-smart antennas in LTE OFDMA systems, *IEEE International Conference on Communications Technology and Applications*. Beijing, 2009, IEEE, 2009, pp. 173–179. DOI: 10.1109/ICCOMTA.2009.5349214
5. Boudreau G., Panicker J., Guo N. et al. Interference coordination and cancellation for 4G network, *IEEE Communications Magazine*, 2009, Vol. 47, No. 4, pp. 74–81. DOI: 10.1109/MCOM.2009.4907410
6. Himayat N., Talwar S., Rao A. et al. Interference management for 4G cellular standards [WIMAX/LTE UPDATE], *IEEE Communications Magazine*, 2010, Vol. 48, No. 8, pp. 86–92. DOI: 10.1109/MCOM.2010.5534591
7. Technical Specification Group Radio Access Network; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); User Equipment (UE) radio transmission and reception (Release 12): 3GPP TS 36.101 V12.24.0. [Effective from 2020-07-16]. Valbonne, 3GPP, 2020, 784 p.
8. Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Radio Frequency (RF) system scenarios: 3GPP TR 36.942 15.0.0. [Effective from 2018-07-02]. Sophia Antipolis, ETSI, 2018, 110 p.
9. Yang W.-B. LTE physical layer performance analysis [Electronic resource]. Access mode: <https://bit.ly/3g0A2ta>
10. Reference radiation patterns of omnidirectional, sectoral and other antennas for the fixed and mobile service for use in sharing studies in the frequency range from 400 MHz to about 70 GHz: ITU-R F. 1336-5. [Effective from 2019-01-01]. Geneva, ITU-R, 2019, 110 p.
11. New spectrally efficient techniques and systems: ITU-R SM.856-1. [Effective from 1997-03-01]. Geneva, ITU-R, 1997, 4 p.
12. Balanis C., Ioannides P. Introduction to smart antennas Synthesis Lectures on Antennas, *Morgan & Claypool*, 2007, 170 p. DOI: 10.2200/S00079ED1 V01Y200612ANT005
13. Kim K. Handbook of CDMA system design, engineering and optimization. New York, Prentice Hall, 2000, 252 p.
14. Bressler Y. and Macovsky A. On the number of signals resolvable by a uniform linear array, *Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1986, Vol. 34, No. 6, pp. 1361–1375. DOI: 10.1109/TASSP.1986.1164973
15. Makoveenko D., Siden S., Pyliavskiy V. Use of Adaptive Antenna Arrays to Reduce Interference in the E-UTRA Network, *27th National Conference with International Participation (TELECOM), 2019, IEEE*, 2019, pp. 12–15. DOI: 10.1109/TELECOM 48729.2019.8994885

# МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

## MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

UDC 517.988 : 519.632

#### TWO-SIDED APPROXIMATIONS METHOD BASED ON THE GREEN'S FUNCTIONS USE FOR CONSTRUCTION OF A POSITIVE SOLUTION OF THE DIRICHLE PROBLEM FOR A SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATION

**Gybkina N. V.** – PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics of Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv, Ukraine.

**Lamtyugova S. M.** – PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics of O. M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv, Kharkiv, Ukraine.

**Sidorov M. V.** – Dr. Sc., Associate Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics of Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv, Ukraine.

#### ABSTRACT

**Context.** The question of constructing a method of two-sided approximations for finding a positive solution of the Dirichlet problem for a semilinear elliptic equation based on the use of the Green's functions method is considered. The object of research is the first boundary value problem (the Dirichlet problem) for a second-order semilinear elliptic equation.

**Objective.** The purpose of the research is to develop a method of two-sided approximations for solving the Dirichlet problem for second-order semilinear elliptic equations based on the use of the Green's functions method and to study its work in solving test problems.

**Method.** Using the Green's functions method, the initial first boundary value problem for a semilinear elliptic equation is replaced by the equivalent Hammerstein integral equation. The integral equation is represented in the form of a nonlinear operator equation with a heterotone operator and is considered in the space of continuous functions, which is semi-ordered using the cone of nonnegative functions. As a solution (generalized) of the boundary value problem, it was taken the solution of the equivalent integral equation. For a heterotone operator, a strongly invariant cone segment is found, the ends of which are the initial approximations for two iteration sequences. The first of these iterative sequences is monotonically increasing and approximates the desired solution to the boundary value problem from below, and the second is monotonically decreasing and approximates it from above. Conditions for the existence of a unique positive solution of the considered Dirichlet problem and two-sided convergence of successive approximations to it are given. General guidelines for constructing a strongly invariant cone segment are also given. The method developed has a simple computational implementation and a posteriori error estimate that is convenient for use in practice.

**Results.** The method developed was programmed and studied when solving test problems. The results of the computational experiment are illustrated with graphical and tabular informations.

**Conclusions.** The experiments carried out have confirmed the efficiency and effectiveness of the developed method and make it possible to recommend it for practical use in solving problems of mathematical modeling of nonlinear processes. Prospects for further research may consist the development of two-sided methods for solving problems for systems of partial differential equations, partial differential equations of higher orders and nonstationary multidimensional problems, using semi-discrete methods (for example, the Rothe's method of lines).

**KEYWORDS:** dirichlet problem for a semilinear elliptic equation, positive solution, strongly invariant conic segment, heterotone operator, method of two-sided approximations, Green's function.

#### NOMENCLATURE

$C(\bar{\Omega})$  is the Banach space of functions continuous in the domain  $\bar{\Omega}$ ;

$G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  is the Green's function of the boundary value problem;

$\mathcal{K}_+$  is a cone of non-negative functions in  $C(\bar{\Omega})$ ;

$K(u_0)$  is a set of functions from  $\mathcal{K}_+$  such that  $\alpha u_0 \leq u \leq \beta u_0$ , where  $\alpha, \beta > 0$ ;

$T$  is a heterotone operator;

$\hat{T}$  is a companion operator for the heterotone operator  $T$ ;  
 $u^*$  is the exact solution of the boundary value problem;  
 $\|u\|$  is the norm in the space  $C(\bar{\Omega})$ ;  
 $\langle v^0, w^0 \rangle$  is a cone segment, strongly invariant for the heterotone operator  $T$ ;  
 $\{v^{(k)}\}$  is a sequence of lower approximations;  
 $v^*$  is a boundary of the sequence of lower approximations;  
 $\{w^{(k)}\}$  is a sequence of upper approximations;  
 $w^*$  is a boundary of the sequence of upper approximations;  
 $\Delta$  is the Laplace operator;  
 $\kappa > 0$  is a parameter in the Helmholtz operator  $\Delta - \kappa^2 u$ ;  
 $\theta$  is zero element of the Banach space;  
 $\leq$  is a sign of semi-ordering in  $C(\bar{\Omega})$ , which is introduced by the cone  $\mathcal{K}_+$ .

## INTRODUCTION

The problem of mathematical modeling of many stationary processes considered in chemical kinetics, biology, combustion theory, etc. [1–4], leads to the necessity for finding a positive solution of the Dirichlet problem for a semilinear elliptic equation. Due to this, the problem of developing new and improving existing methods of numerical analysis of this class of problems is relevant.

**The object of the study** is the Dirichlet problem for a second-order semilinear elliptic equation.

**The subject of the research** is the method of two-sided approximations for solving the boundary value problems for the second-order semilinear elliptic equations.

Currently there are many methods for the numerical analysis of the boundary value problems for semilinear elliptic equations. Among them, one can single out, in particular, the methods of finite differences, finite elements, boundary integral equations, artificial neural network technique [1, 5–11] or successive approximations with two-sided convergence [12–14]. The methods of the last group allow to construct two sequences of functions that approximate the desired solution of the problem from below and from above, respectively. Due to this, when implementing these methods, one has a convenient a posteriori estimate of the approximation error, and, consequently, a convenient criterion for the termination of iterations. This makes the methods of two-sided approximations more attractive in comparison with other methods that are used to solve boundary value problems for semilinear elliptic equations.

**The purpose of the research** is to develop a method of two-sided approximations for solving the Dirichlet

problem for second-order semilinear elliptic equations based on the use of the Green's functions method and to study its work in solving test problems.

## 1 PROBLEM STATEMENT

The problem of finding a positive solution of a semilinear elliptic equation with the homogeneous Dirichlet condition is considered in the paper:

$$Lu = f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3)$$

where  $Lu \equiv -\Delta u$  or  $Lu \equiv -\Delta u + \kappa^2 u$ ,  $\Omega$  is the Jordan measurable domain from  $\mathbb{R}^2$  or  $\mathbb{R}^3$  with piecewise smooth boundary  $\partial\Omega$  ( $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ),  $\Delta$  is the Laplace

operator,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ , if  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , and

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ , if  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

Let us assume that the function  $f(\mathbf{x}, u)$  is continuous and positive for  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ ,  $u > 0$ .

The operator  $\Delta$  is the Laplace operator and the operator  $\Delta - \kappa^2$  is the Helmholtz operator. The problem (1)–(3) often appears as a mathematical model of the nonlinear stationary processes considered in thermal physics, electromagnetism, biology, chemical kinetics, etc. [1, 2, 4]. In this case, the positivity condition (2) naturally arises from the meaning of the function  $u$  in a particular field.

## 2 REVIEW OF THE LITERATURE

The construction of two-sided approximation methods for solving the boundary value problems for partial differential equations is based on the use of the theory of nonlinear operators in semi-ordered spaces.

The theory of linear semi-ordered spaces was constructed by L. V. Kantorovich in the second half of the 30s of the XX century [15, 16]. Further development of the methods of this theory is associated with the works of M. A. Krasnoselsky [17], H. Amann [18], V. I. Opoitsev [19], N. S. Kurpel, B. A. Shuvar [20, 21], A. I. Kolosov [22].

In [17, 18, 23, 24], the existence of the positive solutions of the equations with monotone operators was investigated, and in [19, 25], the solvability of the equations with operators that have the generalized property of monotonicity (the so-called heterotone or mixed monotone operators) was explored. When proving the corresponding theorems of existence, the sequences of functions, which on both sides converged to the solution of the investigated problem, were constructed. As examples of applications of this theory, the questions of the existence of positive solutions of the boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations, boundary value

problems for nonlinear partial differential equations and integral equations were considered. In these works, the theoretical foundations for the development of two-sided iterative schemes were laid, but the iterations themselves were considered by the authors as an auxiliary means of proving the existence theorems for fixed points of operators, and there were no computational results.

In [20, 21], the equations and inequalities in which the operators do not have the monotonicity property are considered, and for them two-sided monotonic iterative processes are constructed. In [22], it was obtained a generalization of the theory of the heterotone operators, which were applied, in particular, to finding the approximate solutions of the boundary value problems with a free boundary for nonlinear ordinary differential equations.

The works [12–14] are devoted to the development of two-sided iterative schemes for solving the boundary value problems for partial differential equations as means of applied mathematics with bringing them to computational implementation. But only problem (1)–(3) with  $Lu \equiv -\Delta u$  and  $f(x, u)$  which has a power-law or exponential monotonic nonlinearity was investigated.

The boundary value problems for the equation (1) in case  $Lu \equiv -\Delta u + \kappa^2 u$  were not considered.

This work continues the studies begun in [12–14, 26] and is aimed at their generalization and extension to the equation with the Helmholtz operator.

### 3 MATERIALS AND METHODS

To study the solvability of the problem (1)–(3) and numerically finding its solution, let us construct a method of two-sided approximations using the methods of the theory of nonlinear operators in semi-ordered spaces [17, 19, 27].

If  $G(x, s)$  is the Green's function of the problem (1)–(3), then the problem (1)–(3) is equivalent to the Hammerstein's integral equation

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, s) f(s, u(s)) ds. \quad (4)$$

Let us consider equation (4) in the Banach space  $C(\bar{\Omega})$  of functions continuous in  $\bar{\Omega}$ . The norm in  $C(\bar{\Omega})$  is introduced by the rule  $\|u\| = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$ . In  $C(\bar{\Omega})$  one selects the cone  $\mathcal{K}_+ = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u(x) \geq 0, x \in \bar{\Omega}\}$  of non-negative functions. The cone  $\mathcal{K}_+$  in  $C(\bar{\Omega})$  is normal (and even sharp). Using the cone  $\mathcal{K}_+$  in the space  $C(\bar{\Omega})$ , let us introduce the semi-ordering by the rule:

$$\text{for } u, v \in C(\bar{\Omega}) \quad u \leq v, \text{ if } v - u \in \mathcal{K}_+,$$

that is,

$$u \leq v, \text{ if } u(x) \leq v(x) \text{ for all } x \in \bar{\Omega}.$$

If there exists a classical solution of the problem (1)–(3), that is a function  $u^* \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  that satisfies the equation (1) and conditions (2), (3), then this function also satisfies the equation (4). If there is no classical solution, then the integral equation (4) can be taken as the basis for the definition of a generalized solution of the problem (1)–(3).

**Definition.** A solution (generalized) of the boundary value problem (1)–(3) is a function  $u^* \in \mathcal{K}_+$ , which is a solution of the integral equation (4).

With equation (4) one associates a nonlinear integral operator  $T$  acting in  $C(\bar{\Omega})$  according to the rule

$$T(u)(x) = \int_{\Omega} G(x, s) f(s, u(s)) ds. \quad (5)$$

Let us find out what properties the operator  $T$  of the form (5) has.

The Green's function  $G(x, s)$  is continuous for  $x, s \in \bar{\Omega}$ ,  $x \neq s$ , and there are the estimates

$$0 \leq G(x, s) \leq k_0 \left| \ln \frac{1}{r_{xs}} \right| y \mathbb{R}^2, \\ 0 \leq G(x, s) \leq \frac{k_0}{r_{xs}} y \mathbb{R}^3,$$

where  $r_{xs} = |x - s|$  is the distance between points  $x$  and  $s$ .

From these estimates and from the conditions imposed on the function  $f(x, u)$ , it follows that the operator  $T$  of the form (5) acts in the space  $C(\bar{\Omega})$  and leaves the cone  $\mathcal{K}_+$  invariant, that is,  $T$  is a positive operator.

Also, the operator  $T$  of the form (5) is  $u_0$ -positive operator, where the function  $u_0(x)$  belongs to  $\mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$ , is defined by the equality

$$u_0(x) = \int_{\Omega} G(x, s) ds \quad (6)$$

and is the solution of the problem

$$Lu = 1, \quad x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0.$$

The property of  $u_0$ -positivity follows from the fact [17]: if  $\Omega_0$  is some subdomain of the domain  $\Omega$ , moreover,  $\mu(\Omega_0) > 0$ , then there is such  $\gamma = \gamma(\Omega_0) > 0$ , that the following inequality holds

$$\gamma \int_{\Omega} G(x, s) ds \leq \int_{\Omega_0} G(x, s) ds.$$

If  $u \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$ , then for some  $\alpha_0 > 0$  there is a set  $\Omega_0 \subset \Omega$  such that  $\mu(\Omega_0) > 0$  and  $f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \geq \alpha_0$  for all  $\mathbf{x} \in \Omega_0$ . Then for all  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} T(u)(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) ds \geq \\ &\geq \int_{\Omega_0} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) ds \geq \\ &\geq \alpha_0 \int_{\Omega_0} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \geq \alpha_0 \gamma \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds = \alpha_0 \gamma u_0(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

On the other hand, for all  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} T(u)(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) ds \leq \\ &\leq \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \cdot \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds = \\ &= \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \cdot u_0(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Thus, there will be double inequality for all  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\alpha u_0(\mathbf{x}) \leq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) ds \leq \beta u_0(\mathbf{x}), \quad (7)$$

where  $\alpha = \alpha_0 \gamma > 0$ ,  $\beta = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) > 0$ , which is the definition of the  $u_0$ -positivity of the operator  $T$ .

A constructive study of the equation (4) (and, consequently, of the problem (1)–(3)) with the opportunity of constructing two-sided approximations to its positive solution is possible if the function  $f(\mathbf{x}, u)$  has the monotonicity property.

Let the function  $f(\mathbf{x}, u)$  allows a diagonal representation  $f(\mathbf{x}, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, u, u)$ , where the nonnegative function  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$ , continuous in the set of variables  $\mathbf{x}$ ,  $v$ ,  $w$ , monotonically increases with respect to  $v$  and monotonically decreases with respect to  $w$  for all  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Then the operator  $T$  of the form (5) will be heterotone one with the companion operator

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) ds. \quad (8)$$

Obviously, the operators  $T$  and  $\hat{T}$  are completely continuous.

If the function  $f(\mathbf{x}, u)$  monotonically increases with respect to  $u$  for all  $\mathbf{x} \in \Omega$ , then one can choose  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = f(\mathbf{x}, v)$  and the companion operator is defined by the equality

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, v(\mathbf{s})) ds. \quad (9)$$

For a function  $f(\mathbf{x}, u)$  monotonically decreasing with respect to  $u$ , one can put  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = f(\mathbf{x}, w)$ , and then the companion operator will have the form

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, w(\mathbf{s})) ds. \quad (10)$$

If for any positive numbers  $v, w$ , for any  $\tau \in (0, 1)$

$$\hat{f}\left(\mathbf{x}, \tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{f}(\mathbf{x}, v, w), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (11)$$

then the heterotone operator  $T$  of the form (5) for which the operator  $\hat{T}$  of the form (8) is companion one will be pseudo-concave and, moreover,  $u_0$ -pseudo-concave with the function  $u_0(\mathbf{x})$  of the form (6).

Actually, for any  $v, w \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$ , the inequality (7) implies that

$$\alpha u_0(\mathbf{x}) \leq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) ds \leq \beta u_0(\mathbf{x}), \quad (12)$$

where  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , that is  $\hat{T}(v, w) \in K(u_0)$  for any  $v, w \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$ . Here,  $K(u_0)$  is a set of functions from  $\mathcal{K}_+$  such that  $\alpha u_0 \leq u \leq \beta u_0$ , where  $\alpha, \beta > 0$ .

Suppose now that  $v, w \in K(u_0)$ , thus there are  $\alpha_1 = \alpha_1(v) > 0$ ,  $\beta_1 = \beta_1(v) > 0$ ,  $\alpha_2 = \alpha_2(w) > 0$ ,  $\beta_2 = \beta_2(w) > 0$  such that  $\alpha_1 u_0 \leq v \leq \beta_1 u_0$ ,  $\alpha_2 u_0 \leq w \leq \beta_2 u_0$ . For  $\tau \in (0, 1)$  consider the difference

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) - \tau \hat{T}(v, w):$$

$$\begin{aligned} &\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right)(\mathbf{x}) - \tau \hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \\ &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ \hat{f}\left(\mathbf{s}, \tau v(\mathbf{s}), \frac{1}{\tau} w(\mathbf{s})\right) - \tau \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) \right] ds. \end{aligned}$$

Then it follows from the inequality (11) and the condition of continuity of the function  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$  that

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) - \tau \hat{T}(v, w) \geq \theta, \quad \text{while}$$

$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) - \tau \hat{T}(v, w) \neq \theta$ , which means the pseudo-concavity of the operator  $T$ .

Further, from the inequalities (11), (12) it follows that for all  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} &\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right)(\mathbf{x}) - \tau \hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \\ &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ \hat{f}\left(\mathbf{s}, \tau v(\mathbf{s}), \frac{1}{\tau} w(\mathbf{s})\right) - \tau \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) \right] ds \geq \\ &\geq \alpha_1 u_0(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

where  $\alpha_1 > 0$ .

Then, applying inequality (12) again, one gets that for all  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}\left(\mathbf{s}, \tau v(\mathbf{s}), \frac{1}{\tau} w(\mathbf{s})\right) d\mathbf{s} \geq \\ & \geq \tau \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) d\mathbf{s} + \alpha_1 u_0(\mathbf{x}) \geq \\ & \geq \tau \left(1 + \frac{\alpha_1}{\beta \tau}\right) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) d\mathbf{s}. \end{aligned}$$

So for all  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$  there is the inequality

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}\left(\mathbf{s}, \tau v(\mathbf{s}), \frac{1}{\tau} w(\mathbf{s})\right) d\mathbf{s} \geq \\ & \geq \tau(1 + \eta) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \end{aligned}$$

where  $\eta = \eta(v, w, \tau) = \frac{\alpha_1}{\beta \tau} > 0$ , which means  $u_0$ -pseudo-concavity of the operator  $T$ .

Thus, the following statement holds.

**Lemma.** The operator  $T$  of the form (5), where  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  is the Green's function of the problem (1)–(3), considered in the space  $C(\bar{\Omega})$ , semi-ordered by the cone  $\mathcal{K}_+$  of nonnegative functions, has the following properties:

- a) it is a positive operator;
- b) it is  $u_0$ -positive operator, where the function  $u_0(\mathbf{x})$  is defined by the equation (6);
- c) it is a heterotone operator for which the operator  $\hat{T}$  of the form (8) is a companion one if the function  $f(\mathbf{x}, u)$  allows a diagonal representation  $f(\mathbf{x}, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, u, u)$ , where the function  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$ , continuous in the set of variables  $\mathbf{x}, v, w$ , monotonically increases with respect to  $v$  and monotonically decreases with respect to  $w$  for all  $\mathbf{x} \in \Omega$ ;
- d) if inequality (11) holds, then it is a pseudo-concave and even  $u_0$ -pseudo-concave operator, where the function  $u_0(\mathbf{x})$  has the form (6).

Further one will assume that the operator  $T$  of the form (5) is heterotone one with the companion operator of the form (8). Let us construct a method of two-sided approximations for finding a positive solution of the integral equation (4) (and, therefore, of the boundary value problem (1)–(3)).

In the cone  $\mathcal{K}_+$  one distinguishes a strongly invariant cone segment  $\langle v^0, w^0 \rangle$  by the conditions  $\hat{T}(v^0, w^0) \geq v^0$ ,  $\hat{T}(w^0, v^0) \leq w^0$ , which for the operator  $\hat{T}$ , that is determined by the equality (8), take the form: for all  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

© Gybkina N. V., Lamtyugova S. M., Sidorov M. V., 2021  
 DOI 10.15588/1607-3274-2021-3-3

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v^0(\mathbf{s}), w^0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \geq v^0(\mathbf{x}), \quad (13)$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w^0(\mathbf{s}), v^0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \leq w^0(\mathbf{x}). \quad (14)$$

According to the scheme

$$\begin{aligned} v^{(k+1)} &= \hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)}), \\ w^{(k+1)} &= \hat{T}(w^{(k)}, v^{(k)}) \end{aligned}$$

one will form an iterative process

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad (15)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad (16)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v^0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w^0(\mathbf{x}). \quad (17)$$

Due to the strong invariance of the cone segment  $\langle v^0, w^0 \rangle$  and the heterotonicity of the operator  $T$ , for which the operator  $\hat{T}$  is a companion one, let us conclude that the sequence  $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$  does not decrease along the cone  $\mathcal{K}_+$ , and the sequence  $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$  does not increase along the cone  $\mathcal{K}_+$ . In addition, from the normality of the cone  $\mathcal{K}_+$  and the complete continuity of the operator  $\hat{T}$  it follows that there are boundaries  $v^*(\mathbf{x})$  and  $w^*(\mathbf{x})$  of these sequences. So, the chain of inequalities is confirmed

$$\begin{aligned} v^0 &= v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq v^* \leq \\ &\leq w^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0. \end{aligned}$$

There are two possible cases:  $v^* < w^*$  and  $v^* = w^*$ . In the second case  $u^* := v^* = w^*$  is the only fixed point of the operator  $T$  on the cone segment  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , and therefore  $u^*$  is the unique solution of the considered boundary value problem on  $\langle v^0, w^0 \rangle$ .

Functions  $v^*(\mathbf{x})$  and  $w^*(\mathbf{x})$  is the solution of the system of equations  $v = \hat{T}(v, w)$ ,  $w = \hat{T}(w, v)$ , which in this case has the form:

$$v(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad (18)$$

$$w(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w(\mathbf{s}), v(\mathbf{s})) d\mathbf{s}. \quad (19)$$

The equality  $v^* = w^*$  will be satisfied if the system (18), (19) does not have on  $\langle v^0, w^0 \rangle$  such solutions that  $v \neq w$ .

Thus, the following theorem holds.

**Theorem 1.** Let  $\langle v^0, w^0 \rangle$  be a strongly invariant cone segment for a heterotone operator  $T$  of the form (5) with the companion operator  $\hat{T}$  of the form (8) and the system of equations (18), (19) has no solutions on  $\langle v^0, w^0 \rangle$  such that  $v \neq w$ . Then the iterative process (15)–(17) converges in the norm of the space  $C(\bar{\Omega})$  to the unique on  $\langle v^0, w^0 \rangle$  continuous positive solution  $u^*$  of the boundary value problem (1)–(3), and a chain of inequalities holds

$$\begin{aligned} v^0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq u^* \leq \\ \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0. \end{aligned} \quad (20)$$

As one sees, it follows from the chain of inequalities (20) that each of the cone segments  $\langle v^{(k)}, w^{(k)} \rangle$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , is a strongly invariant cone segment for the heterotone operator  $T$  of the form (5) with the companion operator  $\hat{T}$  of the form (8).

The chain of inequalities (20) characterizes the iterative process (15)–(17) as two-sided one.

The conditions for the existence of a unique positive solution of the boundary value problem (1)–(3) and the two-sided convergence of successive approximations (15)–(17) to it can be refined by clarifying the conditions under which the system of equations (18), (19) does not have solutions such that  $v \neq w$  on some of the strongly invariant cone segments  $\langle v^{(k)}, w^{(k)} \rangle$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

One of the conditions that will ensure the implementation of the equality  $v^* = w^*$  is the condition of the existence of such  $\gamma \in (0; 1)$  that

$$\|\hat{T}(v, w) - \hat{T}(w, v)\| \leq \gamma \|v - w\|$$

for all  $v, w \in \langle v^0, w^0 \rangle$ .

Suppose there exists such number  $L > 0$  that the function  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$  for all numbers  $v, w$  such that  $0 < v, w < M_0$ , where  $M_0 = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} w^0(\mathbf{x})$ , and for all  $\mathbf{x} \in \Omega$  satisfies the inequality

$$|\hat{f}(\mathbf{x}, w, v) - \hat{f}(\mathbf{x}, v, w)| \leq L |w - v|. \quad (21)$$

Then

$$\begin{aligned} \|\hat{T}(w, v) - \hat{T}(v, w)\| &= \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} [\hat{T}(w, v)(\mathbf{x}) - \hat{T}(v, w)(\mathbf{x})] = \\ &= \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [\hat{f}(\mathbf{s}, w(\mathbf{s}), v(\mathbf{s})) - \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s}))] d\mathbf{s} \leq \\ &\leq LM \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} [w(\mathbf{x}) - v(\mathbf{x})] = LM \|w - v\|, \end{aligned}$$

where  $M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_0(\mathbf{x})$ .

Therefore,

$$\|\hat{T}(w, v) - \hat{T}(v, w)\| \leq LM \|w - v\|. \quad (22)$$

It is clear that inequality (22) implies an estimate

$$\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| \leq (LM)^{k+1} \|w^{(0)} - v^{(0)}\|. \quad (23)$$

Thus, the equality  $v^* = w^*$  will hold if  $\gamma = LM < 1$ , and then the following theorem is valid.

**Theorem 2.** Let  $\langle v^0, w^0 \rangle$  be a strongly invariant cone segment for the heterotone operator  $T$  of the form (5) with the companion operator  $\hat{T}$  of the form (8) and the condition (21) holds, moreover,  $\gamma = LM < 1$ , where  $M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_0(\mathbf{x})$ . Then the iterative process (15)–(17)

converges bilaterally in the norm of the space  $C(\bar{\Omega})$  to a unique on  $\langle v^0, w^0 \rangle$  continuous positive solution  $u^*$  of the boundary value problem (1)–(3), and the estimate (23) takes place.

Another condition that the system of equations (18), (19) does not have solutions such that  $v \neq w$  on a strongly invariant cone segment  $\langle v^0, w^0 \rangle$  is the condition that the heterotone operator  $T$  of the form (5) with the companion operator  $\hat{T}$  of the form (8) is  $u_0$ -pseudo-concave. Then, taking into account assertion d) of the lemma, one arrives at the following result.

**Theorem 3.** Let  $\langle v^0, w^0 \rangle \subset K(u_0)$  be a strongly invariant conic segment for the heterotone operator  $T$  of the form (5) with the companion operator  $\hat{T}$  of the form (8) and the condition (11) holds. Then the iterative process (15)–(17) converges bilaterally in the norm of the space  $C(\bar{\Omega})$  to a unique on  $\langle v^0, w^0 \rangle$  continuous positive solution  $u^*$  of the boundary value problem (1)–(3).

Let us now consider the partial cases when the function  $f(\mathbf{x}, u)$  only monotonically increases or only monotonically decreases with respect to  $u$ .

If the function  $f(\mathbf{x}, u)$  monotonically increases with respect to  $u$  and  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = f(\mathbf{x}, v)$  is chosen, then the companion operator  $\hat{T}$  is given by the equality (9), and the conditions (13), (14), which distinguish a strongly



invariant cone segment  $\langle v^0, w^0 \rangle$  (in this case, the strong invariance coincides with the common invariance of the operator  $T$ ), look like: for all  $\mathbf{x} \in \Omega$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, v^0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \geq v^0(\mathbf{x}), \quad (24)$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, w^0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \leq w^0(\mathbf{x}). \quad (25)$$

As one can see, each of the inequalities (24), (25) independently of the other ones distinguishes its end of the cone segment  $\langle v^0, w^0 \rangle$ .

For the function  $f(\mathbf{x}, u)$  monotonic in  $u$ , the system of equations (18), (19) has the form

$$v(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, v(\mathbf{s})) d\mathbf{s},$$

$$w(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, w(\mathbf{s})) d\mathbf{s}$$

and the condition that this system does not have on  $\langle v^0, w^0 \rangle$  solutions such that  $v \neq w$  turns into the condition for the existence of a unique solution of the equation (4).

The condition (21) turns into the usual Lipschitz condition for the function  $f(\mathbf{x}, u)$ : there exists a number  $L > 0$  such that the function  $f(\mathbf{x}, u)$  for all numbers  $v, w$  such that  $0 < v, w < M_0$ , where  $M_0 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} w^0(\mathbf{x})$ , and for all  $\mathbf{x} \in \Omega$  satisfies the inequality

$$|f(\mathbf{x}, v) - f(\mathbf{x}, w)| \leq L|v - w|, \quad (26)$$

and condition (11) of  $u_0$ -pseudo-concavity takes the following form: for any positive number  $u$  and for any  $\tau \in (0, 1)$

$$f(\mathbf{x}, \tau u) > \tau f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (27)$$

Thus, if there exists a strongly invariant cone segment  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , distinguished by the conditions (24), (25), and at least one of the conditions (26) or (27) is satisfied, then successive approximations that are formed according to the scheme

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (28)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (29)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v^0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w^0(\mathbf{x}), \quad (30)$$

converge bilaterally to a unique on  $\langle v^0, w^0 \rangle$  continuous positive solution  $u^*$  of the boundary value problem (1)–(3).

As can be seen from (28)–(30), for a function  $f(\mathbf{x}, u)$  monotonic with respect to  $u$ , the lower  $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$  and upper  $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$  approximations form two independent sequences, and in the computational organization of the iterative process, their formation can be carried out using the technologies of computations parallelization.

For a function  $f(\mathbf{x}, u)$ , which decreases monotonically with respect to  $u$ , if  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = f(\mathbf{x}, w)$  is chosen, the companion operator  $\hat{T}$  is given by the equality (10), and the conditions (13), (14), which distinguish a strongly invariant cone segment  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , take the form: for all  $\mathbf{x} \in \Omega$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, w^0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \geq v^0(\mathbf{x}), \quad (31)$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, v^0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \leq w^0(\mathbf{x}). \quad (32)$$

The system of the equations (18), (19) for the antitone with respect to  $u$  function  $f(\mathbf{x}, u)$  has the form

$$v(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, w(\mathbf{s})) d\mathbf{s},$$

$$w(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, v(\mathbf{s})) d\mathbf{s}.$$

The condition (21), as in the monotone case, turns into the usual Lipschitz condition for the function  $f(\mathbf{x}, u)$ : there exists a number  $L > 0$  such that the function  $f(\mathbf{x}, u)$  for all numbers  $v, w$  such that  $0 < v, w < M_0$ , where  $M_0 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} w^0(\mathbf{x})$ , and for all  $\mathbf{x} \in \Omega$  satisfies the inequality

$$|f(\mathbf{x}, w) - f(\mathbf{x}, v)| \leq L|v - w|, \quad (33)$$

and the condition (11) of  $u_0$ -pseudo-concavity takes the following form: for any positive number  $u$  and for any  $\tau \in (0, 1)$

$$f\left(\mathbf{x}, \frac{1}{\tau} u\right) > \tau f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (34)$$

Thus, if there exists a strongly invariant cone segment  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , distinguished by the conditions (31), (32), and at least one of the conditions (33) or (34) is satisfied,

then successive approximations that are formed according to the scheme

$$\begin{aligned} v^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ w^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ v^{(0)}(\mathbf{x}) &= v^0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w^0(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

converge bilaterally to a unique on  $\langle v^0, w^0 \rangle$  continuous positive solution  $u^*$  of the boundary value problem (1)–(3).

At the  $k$ -th iteration, as an approximate solution of the boundary value problem (1)–(3), the following function is taken

$$u^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x})}{2}. \quad (35)$$

Then one will have a convenient a posteriori error estimate for the approximate solution (35):

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})),$$

which is an undoubted advantage of the constructed two-way iterative process.

So, if the accuracy  $\varepsilon > 0$  is given, then the iterative process should be carried out until the inequality

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon \quad (36)$$

is satisfied and with an accuracy of  $\varepsilon$  it can be assumed that

$$u^*(\mathbf{x}) \approx u^{(k)}(\mathbf{x}).$$

In addition, from the conditions of Theorem 3 an a priori estimate of the error can be written:

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{\gamma^k}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})).$$

Then from the inequality

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{\gamma^k}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})) < \varepsilon$$

one finds that to achieve the accuracy of  $\varepsilon$  it is necessary to make

$$k_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x}))}{\ln \frac{1}{LM}} \frac{2\varepsilon}{\ln \frac{1}{LM}} \right\rceil + 1$$

iterations, where square brackets denote an integer part of the number.

The strongly invariant cone segment  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , which is distinguished by the conditions (13), (14), is an a priori estimate for the unknown exact solution  $u^*$ . We further it will be given the general recommendations for finding a segment  $\langle v^0, w^0 \rangle$ . Since  $\hat{T}(v, w) \in K(u_0)$  for any  $v, w \in \mathcal{K}_+ \setminus \{0\}$ , the ends of a strongly invariant cone segment  $\langle v^0, w^0 \rangle$  can be sought in the form  $v^0(\mathbf{x}) = \alpha u_0(\mathbf{x})$ ,  $w^0(\mathbf{x}) = \beta u_0(\mathbf{x})$ , where  $0 < \alpha < \beta$ . Then the inequalities (14), (15) take the form: for all  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, \alpha u_0(\mathbf{s}), \beta u_0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} &\geq \alpha u_0(\mathbf{x}), \\ \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, \beta u_0(\mathbf{s}), \alpha u_0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} &\leq \beta u_0(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

These inequalities can be reduced to a form

$$\alpha \leq \min_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} h_1(\mathbf{x}; \alpha, \beta), \quad \beta \geq \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} h_2(\mathbf{x}; \alpha, \beta), \quad (37)$$

where

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{x}; \alpha, \beta) &= \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} \hat{f}(\mathbf{s}, \alpha u_0(\mathbf{s}), \beta u_0(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \\ h_2(\mathbf{x}; \alpha, \beta) &= \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} \hat{f}(\mathbf{s}, \beta u_0(\mathbf{s}), \alpha u_0(\mathbf{s})) d\mathbf{s}. \end{aligned}$$

The value of  $\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})) = (\beta - \alpha)M$  should be as small as possible for faster convergence of iterations, and therefore, in the practical implementation of the iterative process (15)–(17) one should take the largest  $\alpha$  and the smallest  $\beta$ , satisfying inequalities (37).

#### 4 EXPERIMENTS

The computational experiment was performed for the problems (1)–(3) with the right part of the form

$$f(\mathbf{x}, u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}, \quad (38)$$

where  $p, q > 0$ ,  $\lambda, \mu > 0$ .

For a function  $f(\mathbf{x}, u)$  of the form (38) it was chosen  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = \lambda v^p + \mu w^{-q}$  and the corresponding operators (5), (8) have the form

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [\lambda u(\mathbf{s})^p + \mu u(\mathbf{s})^{-q}] d\mathbf{s},$$

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [\lambda v(\mathbf{s})^p + \mu w(\mathbf{s})^{-q}] d\mathbf{s},$$

where  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  is the Green's function for the operator  $Lu \equiv -\Delta u$  or  $Lu \equiv -\Delta u + \kappa^2 u$  in the area  $\Omega$ .

The pseudo-concavity condition (11), written for the function  $f(\mathbf{x}, u)$  of the form (38), leads to the inequality

$$\lambda \tau (\tau^{p-1} - 1) v^p + \mu \tau (\tau^{q-1} - 1) w^{-q} > 0,$$

which will be performed for all  $\tau \in (0, 1)$ ,  $v, w > 0$ , if  $0 < p < 1$ ,  $0 < q < 1$ .

The ends of a strongly invariant cone segment  $\langle v^0, w^0 \rangle$  will be sought in the form  $v^0(\mathbf{x}) = \alpha u_0(\mathbf{x})$ ,  $w^0(\mathbf{x}) = \beta u_0(\mathbf{x})$ , where  $0 < \alpha < \beta$ , and the function  $u_0(\mathbf{x})$  has the form (6). Further, let us find

$$h_1(\mathbf{x}; \alpha, \beta) = \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} \{ \lambda [\alpha u_0(\mathbf{s})]^p + \mu [\beta u_0(\mathbf{s})]^{-q} \} d\mathbf{s} =$$

$$= \lambda \alpha^p \Psi(\mathbf{x}) + \frac{\mu}{\beta^q} \Theta(\mathbf{x}),$$

$$h_2(\mathbf{x}; \alpha, \beta) = \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} \{ \lambda [\beta u_0(\mathbf{s})]^p + \mu [\alpha u_0(\mathbf{s})]^{-q} \} d\mathbf{s} =$$

$$= \lambda \beta^p \Psi(\mathbf{x}) + \frac{\mu}{\alpha^q} \Theta(\mathbf{x}),$$

where

$$\Psi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} [u_0(\mathbf{s})]^p d\mathbf{s},$$

$$\Theta(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} [u_0(\mathbf{s})]^{-q} d\mathbf{s}.$$

Let us denote

$$m_1 = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \Psi(\mathbf{x}), \quad M_1 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \Psi(\mathbf{x}),$$

$$m_2 = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \Theta(\mathbf{x}), \quad M_2 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \Theta(\mathbf{x}).$$

Then inequalities (36) for finding  $\alpha, \beta$ , take the form

$$\alpha \leq \lambda m_1 \alpha^p + \mu m_2 \beta^{-q}, \quad \beta \geq \lambda M_1 \beta^p + \mu M_2 \alpha^{-q}. \quad (39)$$

The iterative process (15)–(17) in this case will take the form

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left\{ \lambda [v^{(k)}(\mathbf{s})]^p + \frac{\mu}{[w^{(k)}(\mathbf{s})]^q} \right\} d\mathbf{s}, \quad (40)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left\{ \lambda [w^{(k)}(\mathbf{s})]^p + \frac{\mu}{[v^{(k)}(\mathbf{s})]^q} \right\} d\mathbf{s}, \quad (41)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha u_0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta u_0(\mathbf{x}). \quad (42)$$

Thus, if  $0 < p < 1$ ,  $0 < q < 1$ , then the problem (1)–(3)

with  $Lu \equiv -\Delta u$  or  $Lu \equiv -\Delta u + \kappa^2 u$  and a function  $f(\mathbf{x}, u)$ , which has the form (38), for any  $\lambda, \mu > 0$  has a unique positive solution  $u^*(\mathbf{x})$ , to which the iterative process (40)–(42) converges bilaterally.

In order to construct an approximate solution of the problem (1)–(3) it is necessary to find  $\alpha, \beta$  ( $0 < \alpha < \beta$ ) as a solution of the system of inequalities (39) (the highest value  $\alpha$  and the lowest value  $\beta$  will be the solution of the corresponding system) and taking some  $\varepsilon > 0$  (calculation accuracy), implement the iterative process (40)–(42) to perform the inequality (36). The approximate solution of the problem will be further determined by the formula (35).

The numerical implementation of the process (40)–(42) was performed using the PYTHON language. For computational experiments it was chosen  $\varepsilon = 10^{-4}$ , the integrals in (40), (41) were calculated with the accuracy  $10^{-6}$  by an adaptive procedure based on Gaussian quadrature with previous piecewise linear interpolation with the same accuracy of functions  $v^{(k)}(\mathbf{x}), w^{(k)}(\mathbf{x})$ .

## 5 RESULTS

The results of solving the problem (1)–(3) in a unit circle  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$  and a unit sphere  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$  with  $Lu \equiv -\Delta u$  and  $Lu \equiv -\Delta u + \kappa^2 u$  for the function  $f(\mathbf{x}, u)$  of the form (38) for  $p = q = \frac{1}{2}$  and  $\lambda = \mu = 1$  are given in Tables 1–4 and in Fig. 1–10.

Let us consider the results of a computational experiment for the problem (1)–(3) with the Laplace operator:  $Lu \equiv -\Delta u$ . In the case of a unit circle, the Green's function of the Laplace operator has the form

$$G(r, \varphi, \rho, \psi) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r^2 \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \psi) + 1}{r^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \psi) + \rho^2},$$

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad s_1 = \rho \cos \psi, \quad s_2 = \rho \sin \psi,$$

$$0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

and in the case of a unit sphere it has the form

$$G(r, \theta, \varphi, \rho, \vartheta, \psi) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho \cos \gamma + \rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 \rho^2 - 2r\rho \cos \gamma + 1}} \right],$$

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \vartheta + \sin \theta \sin \vartheta \cos(\varphi - \psi),$$

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta,$$

$$s_1 = \rho \sin \vartheta \cos \psi, \quad s_2 = \rho \sin \vartheta \sin \psi, \quad s_3 = \rho \cos \vartheta,$$

$$0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

For the problem (1)–(3) with the right-hand side of the form (38) and the Laplace operator considered in a unit circle, it is found that  $\alpha = 0.83292$ ,  $\beta = 1.97354$ , and the accuracy  $\varepsilon = 10^{-4}$  was achieved on the 12-th iteration, and  $\|u^{(12)}\| = 0.5636$ .

Figure 1 shows graphs of the upper  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  (solid line) and lower  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  approximations (dashed line),  $k = 0, 1, \dots, 12$ , in cross section  $x_2 = 0$ .

Table 1 shows the values of the approximate solution  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  of the problem (1)–(3) with the Laplace operator considered in a unit circle at the points  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ .

Each iteration was performed for an average of 185 sec., the total operating time of the program was 37 minutes.

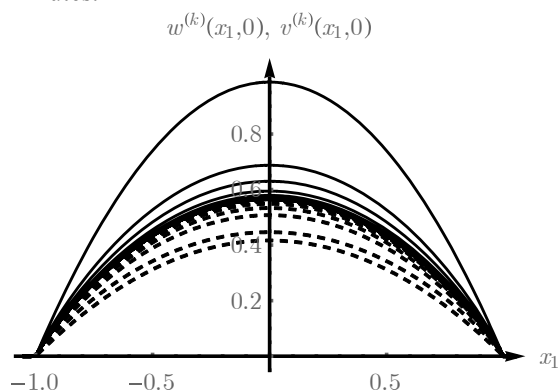


Figure 1 – Graphs of the upper  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  and lower  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  approximations (in cross section  $x_2 = 0$ ) to the solution of problem (1)–(3) with the Laplace operator considered in a unit circle

Table 1 – Values of the approximate solution  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  of the problem (1)–(3) with the Laplace operator considered in a unit circle at the points  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0)$	(0, 0)	(0.1; 0)	(0.2; 0)	(0.3; 0)	(0.4; 0)
$u^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0.5636	0.5584	0.5427	0.5166	0.4798
$(x_1^{(i)}, 0)$	(0.5; 0)	(0.6; 0)	(0.7; 0)	(0.8; 0)	(0.9; 0)
$u^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0.4322	0.3734	0.3028	0.2195	0.1211
$(x_1^{(i)}, 0)$	(1; 0)				
$u^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0				

Figures 2 and 3 show the surface and the level lines of the approximate solution  $u^{(12)}(\mathbf{x})$ , respectively.

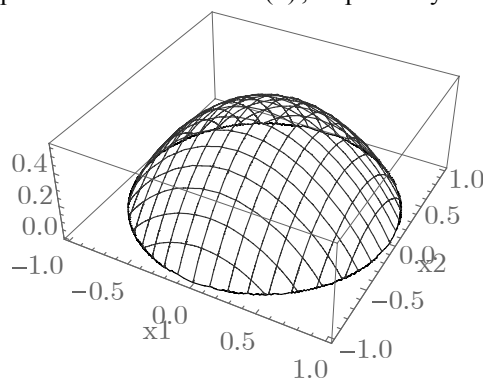


Figure 2 – Graph of the surface of the approximate solution  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  of the problem (1)–(3) with the Laplace operator considered in a unit circle

For the problem (1)–(3) with the right-hand side of the form (38) and the Laplace operator considered in a unit sphere it is found that  $\alpha = 0.56568$ ,  $\beta = 1.73173$ , and the accuracy  $\varepsilon = 10^{-4}$  was achieved on the 12-th iteration, and  $\|u^{(12)}\| = 0.4134$ .

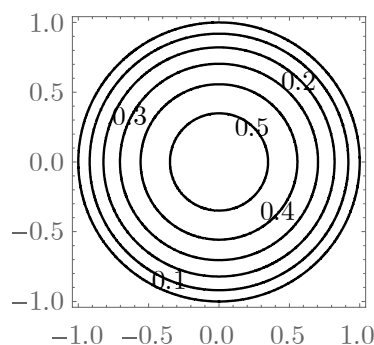


Figure 3 – Level lines of the approximate solution  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  of the problem (1)–(3) with the Laplace operator considered in a unit circle

Figure 4 shows graphs of the upper  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  (solid line) and lower  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  approximations (dashed line),  $k = 0, 1, \dots, 12$ , in cross section  $x_2 = 0, x_3 = 0$ .

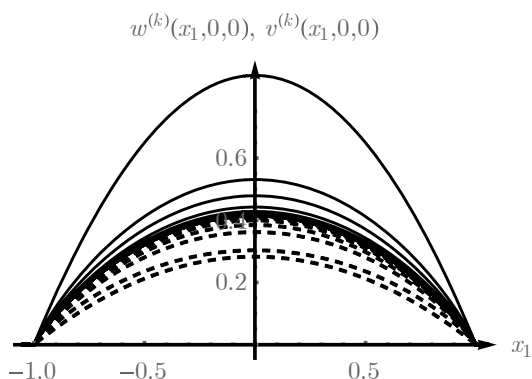


Figure 4 – Graphs of the upper  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  and lower  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  approximations (in cross section  $x_2 = 0, x_3 = 0$ ) to the solution of problem (1)–(3) with the Laplace operator considered in a unit sphere

Table 2 shows the values of the approximate solution  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  of the problem (1)–(3) with the Laplace operator considered in a unit sphere at the points  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i; 0), i = 0, 1, \dots, 10$ .

Each iteration was performed for an average of 207 sec., the total operating time of the program was 41,4 minutes.

Figure 5 shows, respectively, the level surfaces of the approximate solution  $u^{(12)}(\mathbf{x})$ .

Let us now consider the results of a computational experiment for the problem (1)–(3) with the Helmholtz operator:  $Lu \equiv -\Delta u + \kappa^2 u$ . In the case of a unit circle, the Green's function of the Helmholtz operator at  $\kappa=1$  has the form

$$G(r, \varphi, \rho, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w_{nm}^{(1)}(r, \varphi) w_{nm}^{(1)}(\rho, \psi) + w_{nm}^{(2)}(r, \varphi) w_{nm}^{(2)}(\rho, \psi)}{\|w_{nm}\|^2 (\lambda_{nm} + 1)},$$

Table 2 – Values of the approximate solution  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  of the problem (1)–(3) with the Laplace operator considered in a unit sphere at the points  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i; 0), i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0, 0)$	$(0, 0, 0)$	$(0, 1; 0, 0)$	$(0, 2; 0, 0)$	$(0, 3; 0, 0)$
$u^{(12)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0.4134	0.4098	0.3987	0.3803
$(x_1^{(i)}, 0)$	$(0, 4; 0, 0)$	$(0, 5; 0, 0)$	$(0, 6; 0, 0)$	$(0, 7; 0, 0)$
$u^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0.3542	0.3204	0.2783	0.2275
$(x_1^{(i)}, 0)$	$(0, 8; 0, 0)$	$(0, 9; 0, 0)$	$(1; 0, 0)$	
$u^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0.1666	0.0936	0	

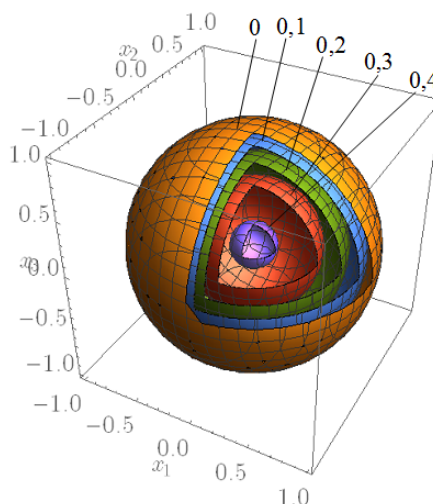


Figure 5 – Level surfaces of the approximate solution  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  of the problem (1)–(3) with the Laplace operator considered in a unit sphere

$\lambda_{nm} = \mu_{nm}^2, \mu_{nm}$  is  $m$ -th positive root of the equation  $J_n(\mu) = 0$ ,

$$w_{nm}^{(1)}(r, \varphi) = J_n(r\sqrt{\lambda_{nm}}) \cos n\varphi,$$

$$w_{nm}^{(2)}(r, \varphi) = J_n(r\sqrt{\lambda_{nm}}) \sin n\varphi,$$

$$w_{nm}^{(1)}(\rho, \psi) = J_n(\rho\sqrt{\lambda_{nm}}) \cos n\psi,$$

$$w_{nm}^{(2)}(\rho, \psi) = J_n(\rho\sqrt{\lambda_{nm}}) \sin n\psi,$$

$$\|w_{nm}\|^2 = \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{n0}) [J'_n(\mu_{nm})]^2,$$

$$\delta_{n0} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi, s_1 = \rho \cos \psi, s_2 = \rho \sin \psi, \\ 0 \leq r < 1, 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

and in the case of a unit sphere it has the form

$$G(r, \theta, \varphi, \rho, \vartheta, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_{nmk}^{(1)}(r, \theta, \varphi) w_{nmk}^{(1)}(\rho, \vartheta, \psi)}{\|w_{nmk}\|^2 (\lambda_{nk} + 1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_{nmk}^{(2)}(r, \theta, \varphi) w_{nmk}^{(2)}(\rho, \vartheta, \psi)}{\|w_{nmk}\|^2 (\lambda_{nk} + 1)},$$

$\lambda_{nk} = \mu_{nk}^2, \mu_{nk}$  is  $k$ -th positive root of the equation  $J_{n+\frac{1}{2}}(\mu) = 0$ ,

$$w_{nmk}^{(1)}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{nk} r) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi,$$

$$w_{nmk}^{(2)}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{nk} r) P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi,$$

$$w_{nmk}^{(1)}(\rho, \vartheta, \psi) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} J_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{nk}\rho) P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\psi,$$

$$w_{nmk}^{(2)}(\rho, \vartheta, \psi) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} J_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{nk}\rho) P_n^m(\cos \vartheta) \sin m\psi,$$

$P_n^m(z)$  are associated Legendre functions,

$$\begin{aligned} \|w_{nmk}^{(1)}\|^2 &= \|w_{nmk}^{(2)}\|^2 = \\ &= \frac{\pi R^2 (1 + \delta_{m0})(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \left[ J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{nk}) \right]^2, \end{aligned}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta, \\ s_1 &= \rho \sin \vartheta \cos \psi, \quad s_2 = \rho \sin \vartheta \sin \psi, \quad s_3 = \rho \cos \vartheta, \\ 0 &\leq r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

For the problem (1)–(3) with the right-hand side of the form (38) and the Helmholtz operator at  $\kappa = 1$  considered in a unit circle it is found that  $\alpha = 0.69148$ ,  $\beta = 1.93356$ , and the accuracy  $\varepsilon = 10^{-4}$  was achieved on the 12-th iteration, and  $\|u^{(12)}\| = 0.4853$ .

Figure 6 shows graphs of the upper  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  (solid line) and lower  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  approximations (dashed line),  $k = 0, 1, \dots, 12$ , in cross section  $x_2 = 0$ .

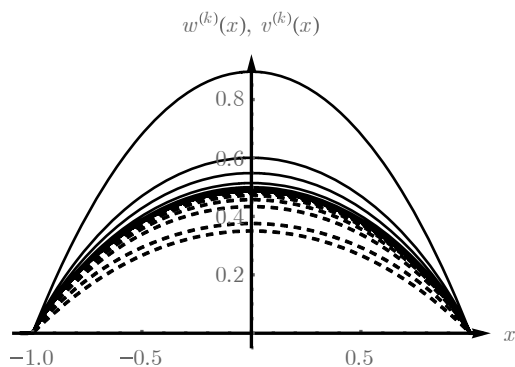


Figure 6 – Graphs of the upper  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  and lower  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  approximations (in cross section  $x_2 = 0$ ) to the solution of problem (1)–(3) with the Helmholtz operator considered in a unit circle

Table 3 shows the values of the approximate solution  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  of the problem (1)–(3) with the Helmholtz operator considered in a unit circle at the points  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, li; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ .

Table 3 – Values of the approximate solution  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  of the problem (1)–(3) with the Helmholtz operator considered in a unit circle at the points  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, li; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0)$	(0, 0)	(0.1; 0)	(0.2; 0)	(0.3; 0)	(0.4; 0)
$u^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0.4853	0.4811	0.4687	0.4478	0.4182
$(x_1^{(i)}, 0)$	(0.5; 0)	(0.6; 0)	(0.7; 0)	(0.8; 0)	(0.9; 0)
$u^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0.3793	0.3305	0.2709	0.1988	0.1114
$(x_1^{(i)}, 0)$	(1; 0)				
$u^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0				

Each iteration was performed for an average of 195 sec., the total operating time of the program was 39 minutes.

Figures 7 and 8 show the surface and the level lines of the approximate solution  $u^{(12)}(\mathbf{x})$ , respectively.

For the problem (1)–(3) with the right-hand side of the form (38) and the Helmholtz operator at  $\kappa = 1$  considered in a unit sphere it is found that  $\alpha = 0.49891$ ,  $\beta = 1.74257$ , and the accuracy  $\varepsilon = 10^{-4}$  was achieved on the 12-th iteration, and  $\|u^{(12)}\| = 0.3761$ .

Figure 9 shows graphs of the upper  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  (solid line) and lower  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  approximations (dashed line),  $k = 0, 1, \dots, 12$ , in cross section  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ .

Table 4 shows the values of the approximate solution  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  of the problem (1)–(3) with the Helmholtz operator considered in a unit sphere at the points  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, li; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ .

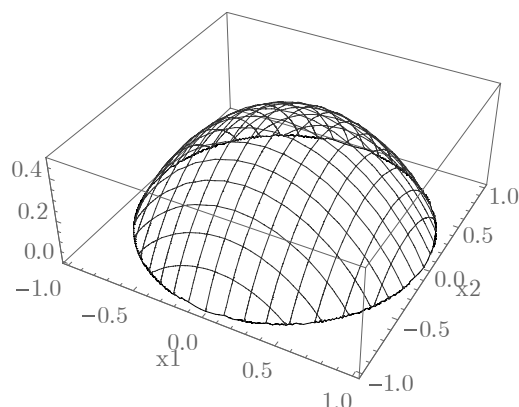


Figure 7 – Graph of the surface of the approximate solution  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  of the problem (1)–(3) with the Helmholtz operator considered in a unit circle

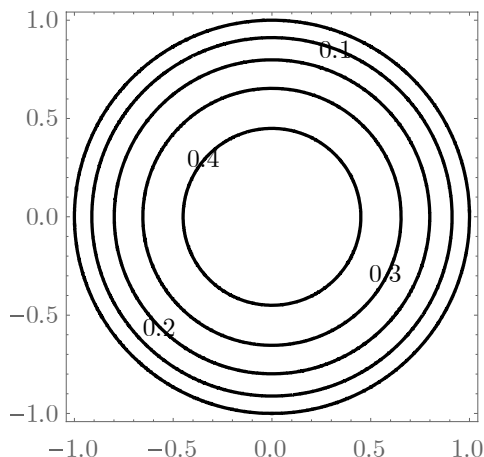


Figure 8 – Level lines of the approximate solution  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  of the problem (1)–(3) with the Helmholtz operator considered in a unit circle

$$w^{(k)}(x_1, 0, 0), v^{(k)}(x_1, 0, 0)$$

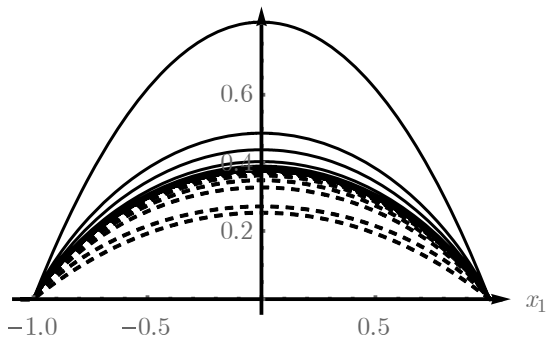


Figure 9 – Graphs of the upper  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  and lower  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  approximations (in cross section  $x_2 = 0, x_3 = 0$ ) to the solution of problem (1)–(3) with the Helmholtz operator considered in a unit sphere

Table 4 – Values of the approximate solution  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  of the problem (1)–(3) with the Helmholtz operator considered in a unit sphere at the points

$$(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i, 0), i = 0, 1, \dots, 10$$

$(x_1^{(i)}, 0, 0)$	$(0, 0, 0)$	$(0.1; 0, 0)$	$(0.2; 0, 0)$	$(0.3; 0, 0)$
$u^{(12)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0.3761	0.3729	0.3635	0.3477
$(x_1^{(i)}, 0)$	$(0.4; 0; 0)$	$(0.5; 0; 0)$	$(0.6; 0; 0)$	$(0.7; 0; 0)$
$u^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0.3253	0.2957	0.2586	0.2130
$(x_1^{(i)}, 0)$	$(0.8; 0; 0)$	$(0.9; 0; 0)$	$(1; 0; 0)$	
$u^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0.1575	0.0895	0	

Each iteration was performed for an average of 223 sec., the total operating time of the program was 44,6 minutes.

Figure 10 shows, respectively, the level surfaces of the approximate solution  $u^{(12)}(\mathbf{x})$ .

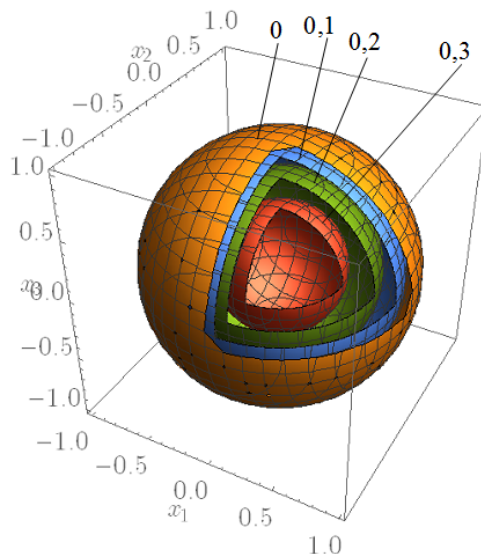


Figure 10 – Level surfaces of the approximate solution  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  of the problem (1)–(3) with the Helmholtz operator considered in a unit sphere

## 6 DISCUSSION

The analysis of the results shows that the method of two-sided approximations is an effective numerical method for solving the boundary value problems of the form (1)–(3) with the Laplace and Helmholtz operators. Its advantages include convenient a posteriori error estimation, iteration completion criterion and easy to implement algorithm. Analyzing the results of the computational experiment, one can see that for the test problem in the approximate solution, the correct sign after the comma is set in about two or three iterations. Considering the relation

$$\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}, \quad k = 0, 1, \dots, 10, \quad \text{where}$$

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})), \quad k \text{ is the number of iteration, it can be seen that the iterative sequence has a geometric rate of convergence. At the same time, when switching to a three-dimensional problem, the program runtime increased, but the convergence rate remained almost unchanged. It can also be noted that in the transition to the case of three-dimensional space, the length of the initial strongly invariant cone segment decreased, which indicates a better (compared to the two-dimensional case) choice of initial approximations. The solution norm in the three-dimensional problem also turned out to be less than for the two-dimensional one.$$

Figures 1, 4, 6, and 9 clearly demonstrate the two-sided nature of the convergence of the constructed iterative sequences  $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$  and  $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$  according to the chain of inequalities (20): at each  $k$ -th iteration the unknown exact solution  $u^*(\mathbf{x})$  of the problem is above the approximation  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  and below the approximation  $w^{(k)}(\mathbf{x})$ .

## CONCLUSIONS

The problem of constructing two-sided approximations to the positive solution of the first boundary value problem for a semilinear elliptic equation of the second order with the Laplace operator and the Helmholtz operator is solved.

The **scientific novelty** of the obtained results is that the method of two-sided approximations for solving nonlinear operator equations with a heterotone operator in terms of its application to the boundary value problems for a semilinear elliptic equation of the second order has been further developed, and for equations with the Helmholtz operator this method is used for the first time. The developed method has a number of advantages, such as a convenient a posteriori estimation of the error of the approximate solution and a simple computational algorithm. This distinguishes it from other numerical methods for solving nonlinear boundary value problems for second-order semilinear elliptic equations and makes it attractive for application in engineering practice.

The **practical significance** of the results obtained lies in the fact that the method proposed has shown itself well in solving test problems, allows fast software implementation, which will permit carrying out highly invariant computational experiments when solving practical problems of mathematical modeling of nonlinear processes.

The limitations in using the method can be associated with the conditions imposed on the behavior of the function  $f(x, u)$ , which are stated in Theorems 1, 2, and 3, and also with the fact that for the area  $\Omega$  the Green's function of the corresponding differential operator must be known.

The **prospects** for further research are the extension of the method of two-sided approximations developed in this work to the boundary value problems for equations of elliptic type with other boundary conditions and to initial boundary value problems for parabolic and hyperbolic equations, using semi-discrete methods (for example, the Rothe's method of lines).

## ACKNOWLEDGMENTS

The work was performed at the Department of Applied Mathematics of the Kharkiv National University of Radio Electronics and the Department of Higher Mathematics of the O. M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv within the framework of scientific research conducted by the departments.

## REFERENCES

1. Pao C. V. Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York, Plenum Press, 1992, 794 p. DOI: 10.1007/978-1-4615-3034-3
2. Samarskii A. A., Samarskii A. P. Principles of Mathematical Modelling: Ideas, Methods, Examples. London, CRC Press, 2001, 360 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781482288131>
3. Kolmanovskii V., Myshkis A. Models, In: *Applied Theory of Functional Differential Equations. Mathematics and Its Applications (Soviet Series)*. Dordrecht, Springer, 1992, Vol. 85, pp. 1–34. DOI: 10.1007/978-94-015-8084-7\_1
4. Frank-Kamenetskii D. A. Diffusion and Heat Exchange in Chemical Kinetics. Princeton, Princeton University Press, 1955, 384 p. DOI: 10.1515/9781400877195
5. Samarskii A. A. The Theory of Difference Schemes. New York, CRC Press, 2001, 786 p. DOI: 10.1201/9780203908518
6. Chen G., Zhou J., Ni W.-M. Algorithms and visualization for solutions of nonlinear elliptic equations, *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 2000, Vol. 10, No. 7, pp. 1565–1612. DOI: 10.1142/S0218127400001006
7. Kumar M., Kumar P. A finite element approach for finding positive solutions of semilinear elliptic Dirichlet problems, *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, 2009, Vol. 25, No. 5, pp. 1119–1128. DOI: 10.1002/num.20390
8. Kumar M., Mishra G. A review on nonlinear elliptic partial differential equations and approaches for solution, *International Journal of Nonlinear Science*, 2012, Vol. 13, No. 4, pp. 401–418. DOI: IJNS.2012.06.30/621
9. Kumar M., Mishra G. An introduction to numerical methods for the solutions of partial differential equations, *Applied Mathematics*, 2011, Vol. 2, No. 11, pp. 1327–1338. DOI: 10.4236/am.2011.211186
10. Matinfar M., Nemati K. A numerical extension on a convex nonlinear elliptic problem, *International Mathematical Forum*, 2008, Vol. 3, No. 17, pp. 811–816.
11. Yadav N., Yadav A., Deep K. Artificial neural network technique for solution of nonlinear elliptic boundary value problems, *Proceedings of Fourth International Conference on Soft Computing for Problem Solving*. New Delhi, Springer, 2015, pp. 113–121. DOI: 10.1007/978-81-322-2217-0\_10
12. Kolosova S. V., Lukhanin V. S., Sidorov M. V. On positive solutions of Liouville-Gelfand problem, *Vestnik Kazhskogo nacional'nogo universiteta. Seriya matematika, mehanika, informatika*, 2018, No. 3 (99), pp. 78–91.
13. Konchakovska O., Sidorov M. Numerical analysis of the one-dimensional nonlinear boundary value problem that modeling an electrostatic NEMS by two-sided approximations method, *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM)*, 2020, Vol. 14, No. 3–4. – pp. 17–26.
14. Sidorov M. V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems, *Carpathian Mathematical Publications*, 2018, Vol. 10, No. 2, pp. 360–375. DOI: 10.15330/cmp.10.2.360-375
15. Kantorovich L. V., Akilov G. P. Functional Analysis. New York, Pergamon, 1982, 600 p. DOI: 10.1016/C2013-0-03044-7
16. Kantorovitch L. Linear operations in semi-ordered spaces. I, *Matematicheskij sbornik*, 1940. Vol. 7 (49), No. 2, pp. 209–284.
17. Krasnosel'skii M. A. Positive Solutions of Operator Equations. Groningen, Noordhoff, 1964, 381 p.
18. Amann H. Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces, *SIAM Review*, 1976, Vol. 18, No. 4, pp. 620–709. DOI: 10.1137/1018114
19. Opojtssev V. I. A Generalization of the Theory of Monotone and Concave Operators, *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 1979, Vol. 36, pp. 243–279.
20. Kurpel' N. S., Grechko V. I. On Some Modifications of Chaplygin's Method for Equations in Partially Ordered Spaces, *Ukrainian Mathematical Journal*, 1973, Vol. 25, pp. 30–36. DOI: 10.1007/BF01085389
21. Shubar B. A., Kopach M. I. Two-sided Operator Inequalities with Nonmonotone Operators, *Differential Equations*, 2006. Vol. 42, pp. 586–590. DOI: 10.1134/S001226610604015X
22. Kolosov A. I. A Boundary Value Problem on a Nonfixed Interval, *Siberian Mathematical Journal*, 1976, Vol. 17, No. 6, pp. 944–948. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00968020>
23. Felipe-Sosa R., Felipe R. Boundary value problems for nonlinear elliptic equations with two parameters, *Differential Equations and Dynamical Systems*, 2014, Vol. 22, No. 1, pp. 1–13. DOI: 10.1007/s12591-013-0187-1



24. Franca M. Positive solutions of semilinear elliptic equations: a dynamical approach, *Differential and Integral Equations*, 2013, Vol. 26, No. 5/6, pp. 505–554.
25. Rus M.-D. The method of monotone iterations for mixed monotone operators : Ph.D. Thesis Summary. Cluj-Napoca, 2010, 45 p.
26. Sidorov M. V. Method of Two-Sided Approximations of the Solution of the First Boundary Value Problem for Nonlinear Ordinary Differential Equations Based on the Green's Function Use, *Radio Electronics, Computer Science, Control.* – 2019, No. 1 (48), pp. 57–66. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-1-6
27. Vulikh B. Z. Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces. Groningen, Wolters-Noordhoff, 1967, 403 p.

Received 28.04.2021.  
Accepted 30.07.2021.

УДК 517.988 : 519.632

### МЕТОД ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ НА ОСНОВІ ВИКОРИСТАННЯ ФУНКЦІЙ ГРІНА ПОБУДОВИ ДОДАТНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ

**Гибкіна Н. В.** – канд. техн. наук, доцент, доцент каф. прикладної математики, Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна.

**Ламтюгова С. М.** – канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент каф. вищої математики, Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова, Харків, Україна.

**Сидоров М. В.** – д-р фіз.-мат. наук, доцент, професор каф. прикладної математики, Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна.

#### АНОТАЦІЯ

**Актуальність.** Розглянуто питання побудови методу двобічних наближень знаходження додатного розв'язку задачі Діріхле для напівлінійного еліптичного рівняння на основі використання метода функцій Гріна. Об'єктом дослідження є перша крайова задача (задача Діріхле) для напівлінійного еліптичного рівняння другого порядку.

**Мета.** Метою роботи є розробка на основі використання методу функцій Гріна методу двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для напівлінійних еліптичних рівнянь другого порядку і дослідження його роботи при розв'язанні тестових задач.

**Метод.** За допомогою методу функцій Гріна вихідна перша крайова задача для напівлінійного еліптичного рівняння замінюється еквівалентним інтегральним рівнянням Гаммерштейна. Інтегральне рівняння подається у вигляді нелінійного операторного рівняння з гетеротонним оператором і розглядається у просторі неперервних функцій, який напівупорядковано за допомогою конуса невід'ємних функцій. За розв'язок (узгаальнений) крайової задачі приймаємо розв'язок еквівалентного інтегрального рівняння. Для гетеротонного оператора знаходиться сильно інваріантний конусний відрізок, кінці якого є початковими наближеннями для двох ітераційних послідовностей. Перша з цих ітераційних послідовностей є монотонно зростаючою і наближає шуканий розв'язок крайової задачі знизу, а друга є монотонно спадною і наближає його зверху. Наведено умови існування єдиного додатного розв'язку розглядуваної задачі Діріхле та двобічної збіжності до нього послідовних наближень. Також наведено загальні рекомендації з побудови сильно інваріантного конусного відрізка. Розроблений метод має просту обчислювальну реалізацію і зручну для використання на практиці апостеріорну оцінку похибки.

**Результати.** Розроблений метод програмно реалізовано та досліджено при розв'язанні тестових задач. Результати обчислювального експерименту проілюстровано графічною та табличною інформацією.

**Висновки.** Проведені експерименти підтвердили працездатність та ефективність розробленого методу і дозволяють рекомендувати його для використання на практиці при розв'язанні задач математичного моделювання нелінійних процесів. Перспективи подальших досліджень можуть полягати у розробленні двобічних методів розв'язання задач для систем рівнянь з частинними похідними, рівнянь з частинними похідними вищих порядків та нестационарних багатовимірних задач, використовуючи напівдискретні методи (наприклад, метод прямих Рунге).

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** задача Діріхле для напівлінійного еліптичного рівняння, додатний розв'язок, сильно інваріантний конусний відрізок, гетеротонний оператор, метод двобічних наближень, функція Гріна.

УДК 517.988 : 519.632

### МЕТОД ДВУСТОРОННИХ ПРИБЛИЖЕНІЙ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ФУНКЦИИ ГРИНА ПОСТРОЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

**Гибкина Н. В.** – канд. техн. наук, доцент, доцент каф. прикладной математики, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина.

**Ламтюгова С. Н.** – канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент каф. высшей математики, Харьковский национальный университет городского хозяйства имени А.Н. Бекетова, Харьков, Украина.

**Сидоров М. В.** – д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор каф. прикладной математики, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина.

#### АННОТАЦИЯ

**Актуальность.** Рассмотрен вопрос построения метода двусторонних приближений нахождения положительного решения задачи Дирихле для полулинейного эллиптического уравнения на основе использования метода функций Грина. Объектом исследования является первая краевая задача (задача Дирихле) для полулинейного эллиптического уравнения второго порядка.

**Цель.** Цель работы состоит в разработке на основе использования метода функций Грина метода двусторонних приближений решения задачи Дирихле для полулинейных эллиптических уравнений второго порядка и исследования его работы при решении тестовых задач.

**Метод.** С помощью метода функций Грина исходная первая краевая задача для полулинейного эллиптического уравнения заменяется эквивалентным интегральным уравнением Гаммерштейна. Интегральное уравнение представляется в виде нелинейного операторного уравнения с гетеротонным оператором и рассматривается в пространстве непрерывных функций, полуупорядоченном конусом неотрицательных функций. В качестве решения (обобщенного) краевой задачи принимается решение эквивалентного интегрального уравнения. Для гетеротонного оператора находится сильно инвариантный конусный отрезок, концы которого являются начальными приближениями для двух итерационных последовательностей. Первая из этих итерационных последовательностей является монотонно возрастающей и приближает искомое решение краевой задачи снизу, а вторая является монотонно убывающей и приближает его сверху.

вающей и приближает его сверху. Приведены условия существования единственного положительного решения рассматриваемой задачи Дирихле и двусторонней сходимости к нему последовательных приближений. Также приведены общие рекомендации по построению сильно инвариантного конусного отрезка. Разработанный метод имеет простую вычислительную реализацию и удобную для использования на практике апостериорную оценку погрешности.

**Результаты.** Разработанный метод программно реализован и исследован при решении тестовых задач. Результаты вычислительного эксперимента проиллюстрированы графической и табличной информацией.

**Выводы.** Проведенные эксперименты подтвердили работоспособность и эффективность разработанного метода и позволяют рекомендовать его для использования на практике при решении задач математического моделирования нелинейных процессов. Перспективы дальнейших исследований могут заключаться в разработке двусторонних методов решения задач для систем уравнений в частных производных, уравнений в частных производных высших порядков и нестационарных многомерных задач, используя полудискретные методы (например, метод прямых Рунге).

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** задача Дирихле для полулинейного эллиптического уравнения, положительное решение, сильно инвариантный конусный отрезок, гетеротонный оператор, метод двусторонних приближений, функция Грина.

#### ЛИТЕРАТУРА / LITERATURA

1. Pao C. V. Nonlinear parabolic and elliptic equations / C. V. Pao. – New York : Plenum Press, 1992. – 794 p. DOI: 10.1007/978-1-4615-3034-3
2. Samarskii A. A. Principles of Mathematical Modelling: Ideas, Methods, Examples / A. A. Samarskii, A. P. Samarskii. London : CRC Press, 2001. – 360 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781482288131>
3. Kolmanovskii V. Models / V. Kolmanovskii, A. Myshkis // In: Applied Theory of Functional Differential Equations. Mathematics and Its Applications (Soviet Series). – 1992. – Vol. 85. – Dordrecht : Springer. – P. 1–34. DOI: 10.1007/978-94-015-8084-7\_1
4. Frank-Kamenetskii D. A. Diffusion and Heat Exchange in Chemical Kinetics / D. A. Frank-Kamenetskii. – Princeton : Princeton University Press, 1955. – 384 p. DOI: 10.1515/9781400877195
5. Samarskii A. A. The Theory of Difference Schemes / A. A. Samarskii. – New York : CRC Press, 2001. – 786 p. DOI: 10.1201/9780203908518
6. Chen G. Algorithms and visualization for solutions of nonlinear elliptic equations / G. Chen, J. Zhou, W.-M. Ni // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. – 2000. – Vol. 10, No. 7. – P. 1565–1612. DOI: 10.1142/S0218127400001006
7. Kumar M. A finite element approach for finding positive solutions of semilinear elliptic Dirichlet problems / M. Kumar, P. Kumar // Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal. – 2009. – Vol. 25, № 5. – P. 1119–1128. DOI: 10.1002/num.20390
8. Kumar M. A review on nonlinear elliptic partial differential equations and approaches for solution / M. Kumar, G. Mishra // International Journal of Nonlinear Science. – 2012. – Vol. 13, № 4. – P. 401–418. DOI: IJNS.2012.06.30/621
9. Kumar M. An introduction to numerical methods for the solutions of partial differential equations / M. Kumar, G. Mishra // Applied Mathematics. – 2011. – Vol. 2, № 11. – P. 1327–1338. DOI: 10.4236/am.2011.211186
10. Matinfar M. A numerical extension on a convex nonlinear elliptic problem / M. Matinfar, K. Nemati // International Mathematical Forum. – 2008. – Vol. 3, № 17. – P. 811–816.
11. Yadav N. Artificial neural network technique for solution of nonlinear elliptic boundary value problems / N. Yadav, A. Yadav, K. Deep // Proceedings of Fourth International Conference on Soft Computing for Problem Solving. – New Delhi : Springer, 2015. – P. 113–121. DOI: 10.1007/978-81-322-2217-0\_10
12. Kolosova S. V. On positive solutions of Liouville-Gelfand problem / S. V. Kolosova, V. S. Lukhanin, M. V. Sidorov // Вестник Казахского национального университета. Серия математика, механика, информатика. – 2018. – № 3 (99). – С. 78–91.
13. Konchakovska O. Numerical analysis of the one-dimensional nonlinear boundary value problem that modeling an electrostatic NEMS by two-sided approximations method / O. Konchakovska, M. Sidorov // Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM). – 2020. – Vol. 14, № 3–4. – P. 17–26.
14. Sidorov M. V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems // Carpathian Mathematical Publications. – 2018. – Vol. 10, № 2. – P. 360–375. DOI: 10.15330/cmp.10.2.360-375
15. Kantorovich L. V. Functional Analysis / L. V. Kantorovich, Akilov G. P. – New York : Pergamon, 1982. – 600 p. DOI: 10.1016/C2013-0-03044-7
16. Kantorovitch L. Linear operations in semi-ordered spaces. I / L. Kantorovitch // Matematicheskij sbornik. – 1940. – Т. 7 (49), № 2. – P. 209–284.
17. Krasnosel'skii M. A. Positive Solutions of Operator Equations / M. A. Krasnosel'skii. – Groningen : Noordhoff, 1964. – 381 p.
18. Amann H. Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces / H. Amann // SIAM Review. – 1976. – Vol. 18, № 4. – P. 620–709. DOI: 10.1137/1018114
19. Opojtsev V. I. A Generalization of the Theory of Monotone and Concave Operators / V. I. Opojtsev // Transactions of the Moscow Mathematical Society. – 1979. – Vol. 36. – P. 243–279.
20. Kurpel' N. S. On Some Modifications of Chaplygin's Method for Equations in Partially Ordered Spaces / N. S. Kurpel', V. I. Grechko // Ukrainian Mathematical Journal. – 1973. – Vol. 25. – P. 30–36. DOI: 10.1007/BF01085389
21. Shuvar B. A. Two-sided Operator Inequalities with Nonmonotone Operators / B. A. Shuvar, M. I. Kopach // Differential Equations. – 2006. – Vol. 42. – P. 586–590. DOI: 10.1134/S001226610604015X
22. Kolosov A. I. A Boundary Value Problem on a Nonfixed Interval / A. I. Kolosov // Siberian Mathematical Journal. – 1976. – Vol. 17, № 6. – P. 944–948. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00968020>
23. Felipe-Sosa R. Boundary value problems for nonlinear elliptic equations with two parameters / R. Felipe-Sosa, R. Felipe // Differential Equations and Dynamical Systems. – 2014. – Vol. 22, № 1. – P. 1–13. DOI: 10.1007/s12591-013-0187-1
24. Franca M. Positive solutions of semilinear elliptic equations: a dynamical approach / M. Franca // Differential and Integral Equations. – 2013. – Vol. 26, № 5/6. – P. 505–554.
25. Rus M.-D. The method of monotone iterations for mixed monotone operators : Ph.D. Thesis Summary / M.-D. Rus. – Cluj-Napoca, 2010. – 45 p.
26. Sidorov M. V. Method of Two-Sided Approximations of the Solution of the First Boundary Value Problem for Nonlinear Ordinary Differential Equations Based on the Green's Function Use / M. V. Sidorov // Radio Electronics, Computer Science, Control. – 2019. – № 1 (48). – P. 57–66. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-1-6
27. Vulikh B. Z. Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces / B. Z. Vulikh. – Groningen : Wolters-Noordhoff, 1967. – 403 p.

## THE RUNTIME ANALYSIS OF COMPUTATION OF MODULAR EXPONENTIATION

**Prots'ko I.** – Dr. Sc., Associate Professor, Department of Automated Control Systems, Lviv National Polytechnic University, Lviv, Ukraine.

**Kryvinska N.** – Dr. Sc., Professor, Department of Information System, Comenius University in Bratislava, Bratislava, Slovak Republic.

**Gryshchuk O.** – Software Developer, LtdC “SoftServe”, Lviv, Ukraine.

### ABSTRACT

**Context.** Providing the problem of fast calculation of the modular exponentiation requires the development of effective algorithmic methods using the latest information technologies. Fast computations of the modular exponentiation are extremely necessary for efficient computations in theoretical-numerical transforms, for provide high crypto capability of information data and in many other applications.

**Objective** – the runtime analysis of software functions for computation of modular exponentiation of the developed programs based on parallel organization of computation with using multithreading.

**Method.** Modular exponentiation is implemented using a  $2^k$ -ary sliding window algorithm, where  $k$  is chosen according to the size of the exponent. Parallelization of computation consists in using the calculation of the remainders of numbers raised to the power of  $2^i$  modulo, and their further parallel multiplications modulo.

**Results.** Comparison of the runtimes of three variants of functions for computing the modular exponentiation is performed. In the algorithm of parallel organization of computation with using multithreading provide faster computation of modular exponentiation for exponent values larger than 1K binary digits compared to the function of modular exponentiation of the MPIR library. The MPIR library with an integer data type with the number of binary digits from 256 to 2048 bits is used to develop an algorithm for computing the modular exponentiation with using multithreading.

**Conclusions.** In the work has been considered and analysed the developed software implementation of the computation of modular exponentiation on universal computer systems. One of the ways to implement the speedup of computing modular exponentiation is developing algorithms that can use multithreading technology on multi-cores microprocessors. The multithreading software implementation of modular exponentiation with increasing from 1024 the number of binary digit of exponent shows an improvement of computation time with comparison with the function of modular exponentiation of the MPIR library.

**KEYWORDS:** modular exponentiation, parallel computation, multithreading, big numbers.

### ABBREVIATIONS

GMP is a GNU Multiple Precision Arithmetic library;  
ME is a modular exponentiation;  
MT is a multithreading;  
MPIR is a Multiple Precision Integers and Rationals library.

### NOMENCLATURE

$a$  is a base integer value;  
 $b$  is an integer value of the exponent;  
 $b_k$  is a binary bit of  $b$ ;  
 $b.i$  is a binary digit;  
 $c$  is an integer value;  
 $exp$  is exponent;  
 $k$  is a number of bits of  $b$ ;  
 $n$  is an integer value of the module;  
 $mpz_t$  is a type of big numbers MPIR library;  
 $quit\_thread$  is a number of threads;  
 $R_i$  is a result of the multiplication of exponent  $2^i$  of the number  $a$  under modulo  $n$ ;  
 $s\_cv$  is a variable of synchronizations;  
 $s\_mutex$  is an object for interacting;  
 $x$  is a discrete logarithm;  
 $y$  is an integer value of modular exponentiation.

### INTRODUCTION

The task of developing an effective computational algorithm for ME for big numbers is relevant enough to solve the problems of modern asymmetric cryptography, for efficient computation of number-theoretic transforms, digital signatures and other applications [1].

**The object of study** is the process of analysis the developed software implementation of the computation of ME. The iteration impedes of the organization of parallel computations and does not provide high-speed computation of a ME in available computational resources of multicores computer systems. Therefore, one directions for speedup the computing of ME is to improve the software implementation using MT technology.

**The subject of study** is the parallel organization of computation of ME based on the use the bits of the binary exponent with MT execution of the computation.

**The purpose of the work** is to increase the speed of computation of ME based on MT technology of computer systems in comparison with the function of modular exponentiation of the MPIR library.

### 1 PROBLEM STATEMENT

The computation of directional function of ME is in the form

$$y = a^b \bmod n . \quad (1)$$

Many efficient algorithms for computing a discrete logarithm  $x$  use the determination of ME

$$a^x \equiv y \pmod{n} \quad (2)$$

After all a discrete logarithm is considered to be unidirectional function to ME, since it is difficult to compute it for a conditionally acceptable time.

There is an algorithm [2] for computing of ME, which uses the product of two integers modulo and the calculation of the square of an integer modulo. However, this algorithm to perform the computation of the integer power of a number modulo uses sequentially recursive operations of the product of two integers modulo and the square of an integer modulo.

One of the ways to implement the speedup of computation of ME is the parallelization of computation using MT technology in universal computer systems.

## 2 REVIEW OF THE LITERATURE

Many efficient algorithms use the determination of ME [3], which is characterized by considerable computational complexity and is compared with performing factorization of a number [4]. An analysis of the algorithms and their implementation for computing of ME shows the widespread use of iterative procedures among cryptographic software libraries designed for big numbers [5], which results in low efficiency in the use of available computational resources in multicores computer systems. In the book [2] an algorithm for computing a ME is described, that to use the binary form of representation of an integer number of exponent. Starting with the most significant bit of integer exponent, sequentially for each subsequent bit based on the computed values from the previous iteration is determined the result of the computation of the ME. However, iteration process impedes the organization of MT computations and does not provide high-speed determination of a ME.

The closest is the work [6], which was discussed the parallel algorithms to perform of ME and theoretical methods to obtain the optimal partition points that allows for a load balancing technique to optimize parallelization algorithms for the ME operation. The algorithms proposed in this work use the OpenMPI parallelization library as a basic tool.

Mathematical software libraries are used to implement the computation of ME. For example, the Pari/GP software library [10] contains a large set of programs for efficient computations of mathematical functions. The Pari/GP library also includes computation of the  $\text{Mod}(a, n)^b$  function for long numbers and other special numbers while using a small amount of memory during the computation process. The library uses a separate type of  $t\_INTMOD$  to handle modulo numbers. Its peculiarity is the representation of numbers in a special form of Montgomery reduction, which simplifies the computation of division. You can use the Pari/GP library on Linux or MinGW environments. Compared to the Pari/GP library,

the well-known MPIR library [7] is easier in use and can be compiled in Windows easily. A highly optimized modification of the well-known GMP or GNU Multiple Precision Arithmetic Library the MPIR library contains the function `mpz_powm()` to realize computation of ME. The MPIR library uses an optimized version of the ME algorithm, called the “Sliding-window method” [8], which reduce the average number of multiplication operations. However, the next iteration of the algorithm in the `mpz_powm()` function depends on the exponent bits that were previously analyzed in the sequential analysis of the window, which makes it impossible to divide the computations into independent flows.

## 3 MATERIALS AND METHODS

The parallelization of computation of ME in the form (1), based on the use of the exponent  $b$  as a binary number  $b_{(k-1)}b_{(k-2)} \dots b_2b_1b_0$ , uses the application of the fundamental property of modularity [9]:

$$(a * c) \pmod{n} = ((a \pmod{n})(c \pmod{n})) \pmod{n} \quad (2)$$

Accordingly, the computation of the ME (1) takes the form

$$y = a^{b_{(k-1)}b_{(k-2)} \dots b_2b_1b_0} \pmod{n} = (b_{k-1}a^{2^{k-1}} \pmod{n} * \dots * b_1a^{2^1} \pmod{n} * b_0a^{2^0} \pmod{n}) \pmod{n} \quad (3)$$

In accordance with formula (3), a scheme for computing of the ME is shown on Figure 1.

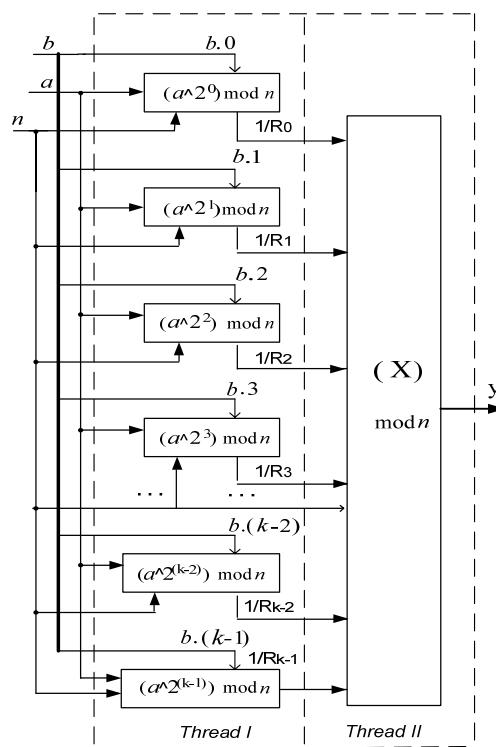


Figure 1 – The scheme for computing the ME

The scheme for computing the ME consists of the denotations:

$a$  is the input of the base number;  $n$  is the input of the module;

$(a^{2^i}) \bmod n$  are blocks of computation of the integer exponent of exponent  $2^i$  of the number  $a$  by the module,  $i = 0, 1, 2, \dots, (k-1)$ ;

$b$  is the input of an exponent with binary digits  $b.(k-1), b.(k-2), \dots, b.2, b.1, b.0$ ;

$(X) \bmod n$  is the block of multiplier under modulo  $n$ ;  
 $y$  is the output of the ME.

Consistently determined residuals of the number  $a$  raised to the power of  $2^i$  under modulo  $n$  in blocks  $(a^{2^i}) \bmod n$ , for  $i=0, 1, \dots, k-1$  are multiplied. In the case of presence of the exponent of the number of binary the value of zero in  $i$ -th binary digit ( $b.i$ ) block  $(a^{2^i}) \bmod n$  is not execute the operation, otherwise is computed the multiplication of exponent  $2^i$  of the number  $a$  under modulo  $n$ , which corresponds to the denotation at the output of the blocks  $(1/R_i)$ . The determined product, in the final stage, forms in block  $(X) \bmod n$  the value  $y$  of the result of the computation of the ME.

For the organization of MT execution of the computation of the ME, in accordance with Figure 1, it is possible to consider the possibility of creating two threads. The *thread I* computes the numbers  $a$  raised to the power of  $2^i$  under modulo  $n$ . The *thread II* computes the product of the results  $(a^{2^i}) \bmod n$  under modulo  $n$ , starting with the readiness of the first two values  $(a^{2^i}) \bmod n$ . Theoretical it is possible to reduce the computation time to 50% of the ME in comparison with single thread computation.

Therefore, due to the parallel execution of the computation of the ME, in accordance with Figure 1, consider the possibility of creating a thread of execution of multiplication under modulo operations and a thread by computation of the product of the residual values defined in the parallel previous thread. The only difficulty of organizing the computation with such threads is the need to synchronize the performance of threads to ensure the correct computation of the final value  $y$  of the ME.

#### 4 EXPERIMENTS

The MPIR library, which is written in C and the assembler, is used to implement the algorithm for computing the ME, and provides an ability to compile its functions in Visual Studio C++. Accordingly, in the MPIR

library, the *mpz\_t* data type represents long numbers that are selected for the exponent *exp*, number *base*, modulo *mod* with number of binary digit from 256 to 2048 bits for testing. For implementation of the developed algorithm the MPIR library functions *mpz\_init\_set(mul, base)*, *mpz\_sizeinbase(exp, 2)*, *mpz\_tstbit(exp, i)*, *mpz\_mul(r, r, mul)* with long binary digit data are used.

Three versions of the algorithms are implemented as ME functions with aim to compare the performance execution of ME.

The function *mod\_exp(mpz\_t r, mpz\_t base, mpz\_t exp, mpz\_t mod)* performs the basic iterative algorithm “Right-to-left binary exponentiation” [11]. The computation of the ME is carried out in one main thread. The result of the function is written to the variable *r*, and the computation time is fixed and averaged to output the average «single thread exponentiation» time in microseconds, which are showed in the Table 1.

The function of the MPIR library *mpz\_powm(expected\_result, base, exp, mod)* performs a ME, implementing a floating-window algorithm with Montgomery multiplication/reduction [12]. The result of the function is written to the *expected\_result* variable and the computation time is recorded and averaged with the output of “*mpz\_powm average time*” in microseconds, which are showed in the Table 1.

To organize MT computing according to the scheme in Figure 1, the thread functions *thread\_function(bool\* quit\_thread, mpz\_t\*mod)* and *parallel\_mod\_exp(mpz\_t base, mpz\_t exp, mpz\_t mod)* are used. Accordingly, these threads are created to perform the computation of the ME. The result of the function is written to the variable *s\_thread\_result*, and the computation time is fixed and averaged to output the average “parallel exponentiation” time in microseconds, which are showed in the Table 1.

The thread implemented in the function *thread\_function(bool\*quit\_thread, mpz\_t\*mod)* computes the product under modulo over the values in the queue *s\_thread\_queue* to determine the ME. That is, from the queue will read the values  $(a^{2^i}) \bmod n$  which are computed by the function *parallel\_mod\_exp(mpz\_t base, mpz\_t exp, mpz\_t mod)*. Another thread function *parallel\_mod\_exp(mpz\_t base, mpz\_t exp, mpz\_t mod)* computes the value of squaring by the module  $(a^i a^i) \bmod n$ , and writing the computed value under modulo to data

Table 1 – The average execution time of the functions of computing the ME based on the use of lib\_mpir\_gc

Bits of pseudorandom numbers / trials	256/2000	512/1000	1024/500	2048/100
Release /x64 – Core i7-3700X (AVX)				
single thread exponentiation (μs)	1276	7918	53543	383309
mpz_powm average time (μs)	824	5577	39312	279225
parallel exponentiation (μs)	1293	5970	<b>35182</b>	<b>244199</b>
Release /x64 – Core i9-7900X (AVX2/AVX512)				
single thread exponentiation (μs)	1190	7577	52091	375792
mpz_powm average time (μs)	767	5331	37907	271139
parallel exponentiation (μs)	1235	6114	<b>34961</b>	<b>240772</b>

queue *s\_thread\_queue*. In the loop of the function `parallel_mod_exp(mpz_t base, mpz_t exp, mpz_t mod)`, binary digits of exponent *exp* are analyzed `mpz_tstbit(exp, i)` to determine whether to execute or not operation. That is, the result will or will not be written to the data queue *s\_thread\_queue*. After analyzing the *b.(k-1)* binary digit in a final stage is computed the end value of the ME, which is written to the variable *s\_thread\_result*.

To protect the queue from simultaneous access of the threads is presented in Figure 2, where the *s\_mutex* mutex with the basic `lock()` and `unlock()` methods is used. The *s\_mutex* object is passed to our functions, which should use it for interacting. Before accessing the shared data queue *s\_thread\_queue*, the mutex is locked by the method `lock(s_mutex)` and is unlocked after the work with the shared data is completed.

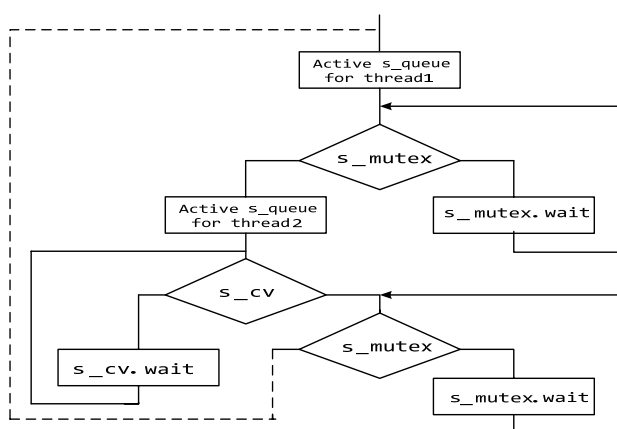


Figure 2 – The scheme of activation of threads when performing synchronization with a pair of mutex-conditional variables

The condition variable *s\_cv* helps to synchronize the work of the threads. The variable *s\_cv* is used for waiting of the thread of an event to occur in another thread (Figure 2). Running the `s_cv.notify_one()` method in the thread generates a readiness signal of the factor for another thread in the waiting state of `s_cv.wait(lock)`. Accordingly, even if a thread is unblocked by the *s\_cv* conditional variable, it will not be able to continue immediately if another thread is already inside our critical section. In this case, the unblocked (on a conditional variable) thread changes its status from “blocked on a conditional variable” (in which it was previously) to the status of “blocked on a mutex” and remains in it until the active flow is in a critical sections will not make the mutex free. The use of a combination a conditional variable and a mutex lock indicates the complexity of the synchronization the performance of threads for computing the ME.

## 5 RESULTS

To determine the average computation time of the ME in testing, the multiple functions called `mod_exp()`, `mpz_powm()`, `parallel_mod_exp()` were used. To compute the ME with a given number of trials the values of exponent *exp*, number *base* and *mod* were given by pseudo-

random numbers with number of binary digit of 256, 512, 1024, 2048 bits. To reduce the total computation time on increasing the number of binary digits of long numbers the number of trials of latch-up of the computation time is decrease correspondent.

Numerical experiments were carried out on a computer system with a multi-core microprocessor with shared memory in a 64-bit Windows. Testing was performed on computer systems with an Intel Core i7-3770K that has 4 physical cores with 3.5GHz clock and an Intel Core i9-7900X processor that has 10 physical cores with 3.3GHz clock. According to hyper-threading technology, each physical core consists of two virtual ones.

The results are presented in Table 1, which contains the values of average execution time ( $\mu$ s microseconds) of computing the ME for pseudorandom data with a number of binary digits (256, 512, 1024, 2048bits) for correspondent the specified number of trials (2000, 1000, 500, 100).

## 6 DISCUSSION

The parallel algorithm in function `parallel_mod_exp()` for computing the ME improves (in Table 1, the best results are highlighted in bold) the computation time relative to the `mpz_powm()` function from the MPIR library with increasing the number of binary digits of data, starting from 1024 bits. The speedup of the computation time of the parallel algorithm with respect to the base time depends on the number of binary digits and their values in exponents. The value one in binary digits in exponent determine the operations of the multiplication by modulo in *thread I*. To computation the ME with a given number of trials, the values of the exponent *exp*, base number and mod were given pseudo-random numbers. Therefore, the obtained results of the average execution time do not depend on the number of ones in the binary value of the exponent.

The implementation of `mpz_powm()` uses a more optimal multiplication by modulo algorithm, the so-called Montgomery multiplication/reduction [12]. The modified Montgomery algorithms [13] can be used instead of operations in the *thread I* and *thread II* to speedup for computing the ME in the parallel algorithm.

The computation time of function `parallel_mod_exp()` with two threads improves the results (in Table 1) relative to the `mod_exp()` with single thread with increasing the number of binary digit of data starting from 512 bits. Thus, we can conclude that the using two threads significant improvement the execution time (Table 1) of ME of long numbers compared to single thread implementation.

Since parallelization is performed in two threads, the number of cores in computer systems does not accelerate the computation of ME. The execution time of ME on computer systems with Intel Core i7-3700X and Intel Core i9-7900X processors does not change significantly according to table 1. The use of the function `parallel_mod_exp()` is possible for the organization of parallel calculations of ME even larger big numbers.

## CONCLUSIONS

The work compares and analyses the developed software implementation of the computation of ME and the software implementation of the function `mpz_powm()` of MPIR library. The computational scheme of the ME, the software implementation of the algorithm using single- and two threads for computing of ME, the run time results of the computation on multi-core microprocessors of universal computer systems have been described. As a result, the parallel organization of the computation speeds up the execution of the computations of ME. MT software implementation with increasing the number of binary digits of exponent shows an improvement of computation time with regard to the MPIR function of computing ME. The execution time of the algorithms depends on the specific values of the exponent also.

The scientific novelty of obtained results lies in the implementation of parallelism using multithreading in the algorithm of computing the ME based on the use of the representation of exponent in the form of a binary number and the fundamental property of modularity.

The practical significance of the work lies in the fact that the obtained results can be successfully apply in the modern asymmetric cryptography, for efficient computation of number-theoretic transforms and other computational problems.

Prospects for further research are that the developed function using two streams can be used for the organization of multithreading computations of ME even larger big numbers.

## ACKNOWLEDGEMENTS

The authors are grateful to Roman Rykmas of the team leader of Uniservice LtdC for participation in testing and discussing the results obtained by the functions of computing the ME.

The work is supported by the state budget scientific research project of Lviv National Polytechnic University “Experimental system of neural network cryptographic protection in real-time data transmission using codes imitating barker codes” (state registration number 0121U109503).

## REFERENCES

1. Marouf I. Comparative Study of Efficient Modular Exponentiation Algorithms. / I. Marouf, M. M. Asad, Q. A. Al-Haija // COMPUSOFT, An international journal of advanced computer technology. – August-2017. – Vol. 6, Issue 8. – P. 2381–2392.
2. Cormen T. H. Introduction to Algorithms / [T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein]. – Cambridge, USA : MIT Press, 3rd edition, 2009. –1312 p.
3. Efficient modular exponentiation algorithms [Electronic resource]. – <https://eli.thegreenplace.net/2009/03/28/efficient-modular-exponentiation-algorithms>
4. Prots'ko I. O. Computation factorization of number at chip multithreading mode / I. O. Prots'ko, O. V. Gryshchuk // Radio Electronics, Computer Science, Control. – 2019. –№ 3. – P. 117–122. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-3-13
5. Jakubski A. Review of General Exponentiation Algorithms / A. Jakubski, R. Perliński // Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science. –2011. – Vol. 2, № 10. – P. 87–98
6. Parallel modular exponentiation using load balancing without precomputation / [P. Lara, F. Borges, R. Portugal, N. Nedjah] // Journal of Computer and System Sciences. – 2012. – Vol. 78, № 2. – P. 575–582. <https://doi.org/10.1016/j.jcss.2011.07.002>
7. MPIR: Multiple Precision Integers and Rationals. [Electronic resource]. – Access mode: <http://mpir.org/>
8. Koç C.-K. Analysis of sliding window techniques for exponentiation / C.-K. Koç // Computers & Mathematics with Applications. – 1995. – № 30. – P. 17–24.
9. Childs L. N. A Concrete Introduction to Higher Algebra. Undergraduate texts in Mathematics. / L. N. Childs. – New York : Springer, Science+Business Media LLC, 3rd edition, 2009. DOI: 10.1007/978-0-387-74725-5
10. PARI/GP home. [Electronic resource]. – Access mode: <http://pari.math.u-bordeaux.fr/>
11. Sun D.-Z. How to compute modular exponentiation with large operators based on the right-to-left binary algorithm / Da-Zhi Sun, Zhen-Fu Cao, Yu Sun // Applied Mathematics and Computation. – 1 May 2006. – Vol. 176, Iss. 1, – P. 280–292 DOI: 10.1016/j.amc.2005.09.062
12. Montgomery P. Modular Multiplication without Trial Division / P. Montgomery // Mathematics of Computation. –1985. – Vol. 44, №170. – P. 519–521.
13. Algorithm design and theoretical analysis of a novel CMM modular exponentiation algorithm for large integers / A. Rezaei, P. Keshavarzi // RAIRO – Theoretical Informatics and Applications. – July-September 2015. – Vol. 49, Num. 3. – P. 255 – 268. DOI: 10.1051/ita/2015007

Received 25.06.2021.

Accepted 15.08.2021.

УДК 004.421

## ЧАСОВИЙ АНАЛІЗ ОБЧИСЛЕННЯ МОДУЛЬНОЇ ЕКСПОНЕНТИ

**Процько І.** – д-р техн. наук, доцент, кафедра автоматизованих систем управління, Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна.

**Кривінська Н.** – д-р техн. наук, професор, кафедра інформаційних систем, Університет Коменіуса в Братиславі, Братислава, Словаччина.

**Гришук О.** – розробник програмного забезпечення, ТОВ «СофтСерв», Львів, Україна.

## АНОТАЦІЯ

**Актуальність.** Постановка проблеми швидкого обчислення модульної експоненти вимагає розробки ефективних алгоритмічних методів з використанням новітніх інформаційних технологій. Швидкі обчислення модульної експоненти є надзвичайно необхідними для ефективних обчислень у теоретико-числових перетвореннях, для забезпечення високої стійкості криптоінформаційних даних та у багатьох інших додатках.

**Мета** – аналіз швидкості виконання функцій в програмному забезпеченні для обчислення модульної експоненти розроблених програм на основі паралельної організації обчислень з використанням багатопоточності.

**Метод.** Обчислення модульної експоненти реалізується за допомогою алгоритму  $2^k$ -го ковзаючого вікна, де  $k$  вибирається відповідно до розміру показника степеня. Паралелізація обчислень полягає у використанні обчислення залишків чисел, піднесених до степеня  $2^i$  за модулем, та їх подальшого паралельного множення за модулем.

**Результати.** Здійснено порівняння часу виконання трьох варіантів функцій для обчислення модульної експоненти. В алгоритмі паралельної організації обчислень з використанням багатопоточності забезпечується більш швидке обчислення модульної експоненти для значень показника степеня, що перевищує 1К двійкових цифр, порівняно з функцією обчислення модульної експоненти в бібліотеці MPIR. Бібліотека MPIR з цілочисельним типом даних з числом двійкових цифр від 256 до 2048 біт використовується для розробки алгоритму обчислення модульної експоненти з використанням багатопоточності.

**Висновки.** У роботі розглянуто та проаналізовано розроблену програмну реалізацію обчислення модульної експоненти на універсальних комп'ютерних системах. Одним із способів реалізації прискорення обчислень модульної експоненти є розробка алгоритмів, які можуть використовувати багатопотокову технологію на багатоядерних мікропроцесорах. Багатопотокова програмна реалізація обчислення модульної експоненти зі збільшенням від 1024 числа двійкових розрядів показника степеня показує поліпшення часу обчислення у порівнянні з функцією обчислення модульної експоненти бібліотеки MPIR.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** модульна експонента, паралельні обчислення, багатопотоковість, великі числа.

УДК 004.421

## ВРЕМЕННОЙ АНАЛИЗ ВЫЧИСЛЕНИЯ МОДУЛЬНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ

**Процько И.** – д-р техн. наук, доцент кафедры автоматизированных систем управления, Национальный университет «Львовська політехніка», Львов, Украина.

**Кривинська Н.** – д-р техн. наук, профессор, кафедра информационных систем, Университет Коменюса в Братиславе, Братислава, Словакия.

**Гришук О.** – разработчик программного обеспечения, ООО «СофтСерв», Львов, Украина.

## АННОТАЦИЯ

**Актуальность.** Решение задачи быстрого вычисления модульной экспоненты возведения требует разработки эффективных алгоритмических методов с использованием новейших информационных технологий. Быстрые вычисления модульной экспоненты возведения чрезвычайно необходимы для эффективных вычислений в теоретико-численных преобразованиях, для обеспечения высокой криптостойкости информационных данных и во многих других приложениях.

**Цель** – анализ исполнения функций в программном обеспечении для вычисления модульного возведения в степень разработанных программ на основе параллельной организации вычислений с использованием многопоточности.

**Метод.** Модульное возведение в степень реализуется с использованием алгоритма  $2^k$ -арного скользящего окна, где  $k$  выбирается в соответствии с размером показателя степени. Распараллеливание вычислений заключается в использовании вычисления остатков чисел, возведенных в степень  $2^i$  по модулю, и их дальнейших параллельных умножений по модулю.

**Результаты.** Проведено сравнение времени выполнения трех вариантов функций для вычисления модульной экспоненты. В алгоритме параллельной организации вычислений с использованием многопоточности обеспечивается более быстрое вычисление модульной экспоненты для значений показателя больше 1К двоичных разрядов по сравнению с функцией модульного возведения в степень библиотеки MPIR. Библиотека MPIR с целочисленным типом данных с количеством двоичных разрядов от 256 до 2048 бит используется для разработки алгоритма вычисления модульного возведения в степень с использованием многопоточности.

**Выводы.** В работе рассмотрена и проанализирована разработанная программная реализация вычисления модульной экспоненты на универсальных компьютерных системах. Одним из способов реализации ускорения вычислений модульной экспоненты является разработка алгоритмов, которые могут использовать технологию многопоточности на многоядерных микропроцессорах. Многопоточная программная реализация модульной экспоненты с увеличением с 1024 числа двоичных разрядов экспоненты показывает улучшение времени вычислений по сравнению с функцией модульного возведения в степень библиотеки MPIR.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** модульная экспонента, параллельные вычисления, многопоточность, большие числа.

## ЛИТЕРАТУРА / LITERATURA

1. Marouf I. Comparative Study of Efficient Modular Exponentiation Algorithms. / I. Marouf, M. M. Asad, Q. A. Al-Haija // COMPUSOFT, An international journal of advanced computer technology. – August-2017. – Vol. 6, Iss. 8. – P. 2381–2392.
2. Cormen T. H. Introduction to Algorithms / T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein. – Cambridge, USA : MIT Press, 3rd edition, 2009. – 1312 p.
3. Efficient modular exponentiation algorithms [Electronic resource]. – <https://eli.thegreenplace.net/2009/03/28/efficient-modular-exponentiation-algorithms>
4. Процько И. О. Обчислення факторизації числа в мультипоточному режимі на кристалі / И. О. Процько, О. В. Гришук // Радіоелектроніка, інформатика, управління – 2019. – № 3. – P. 117–122. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-3-13
5. Jakubski A. Review of General Exponentiation Algorithms / A. Jakubski, R. Perliński // Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science. –2011. Vol. 2, №10. – P. 87–98
6. Lara P. Parallel modular exponentiation using load balancing without precomputation / P. Lara, F. Borges, R. Portugal, N. Nedjah // Journal of Computer and System Sciences. – 2012; Vol.78, № 2. – P. 575–582. <https://doi.org/10.1016/j.jcss.2011.07.002>
7. MPIR: Multiple Precision Integers and Rationals. [Electronic resource]. – Access mode: <http://mpir.org/>
8. Koç C.-K. Analysis of sliding window techniques for exponentiation / C.-K. Koç // Computers & Mathematics with Applications. – 1995. – № 30. – P. 17–24.
9. Childs L. N. A Concrete Introduction to Higher Algebra. Undergraduate texts in Mathematics. / L. N. Childs. – New York : Springer, Science+Business Media LLC, 3rd edition, 2009. DOI: 10.1007/978-0-387-74725-5
10. PARI/GP home. [Electronic resource]. – Access mode: <http://pari.math.u-bordeaux.fr/>
11. Sun D.-Z. How to compute modular exponentiation with large operators based on the right-to-left binary algorithm / Da-Zhi Sun, Zhen-Fu Cao, Yu Sun // Applied Mathematics and Computation. – 1 May 2006. – Vol. 176, Iss. 1, – P. 280–292 DOI: 10.1016/j.amc.2005.09.062
12. Montgomery P. Modular Multiplication without Trial Division / P. Montgomery // Mathematics of Computation. –1985. Vol. 44, №170, – P. 519–521.
13. Algorithm design and theoretical analysis of a novel CMM modular exponentiation algorithm for large integers / A. Rezaei, P. Keshavarzi // RAIRO – Theoretical Informatics and Applications. – July-September 2015. – Vol. 49, Num. 3, P. 255 – 268. DOI: 10.1051/ita/2015007



## COMPARISON OF TWO FORMS OF ERLANGIAN DISTRIBUTION LAW IN QUEUING THEORY

**Tarasov V. N.** – Dr. Sc., Professor, Head of Department of Software and Management in Technical Systems of Volga State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation.

### ABSTRACT

**Context.** For modeling various data transmission systems, queuing systems G/G/1 are in demand, this is especially important because there is no final solution for them in the general case. The problem of the derivation in closed form of the solution for the average waiting time in the queue for ordinary system with erlangian input distributions of the second order and for the same system with shifted to the right distributions is considered.

**Objective.** Obtaining a solution for the main system characteristic – the average waiting time for queue requirements for three types of queuing systems of type G/G/1 with usual and shifted erlangian input distributions.

**Method.** To solve this problem, we used the classical method of spectral decomposition of the solution of Lindley integral equation, which allows one to obtain a solution for average the waiting time for systems under consideration in a closed form. For the practical application of the results obtained, the well-known method of moments of the theory of probability was used.

**Results.** For the first time, spectral expansions of the solution of the Lindley integral equation for systems with ordinary and shifted Erlang distributions are obtained, with the help of which the calculation formulas for the average waiting time in the queue for the above systems in closed form are derived.

**Conclusions.** The difference between the usual and normalized distribution is that the normalized distribution has a mathematical expectation independent of the order of the distribution  $k$ , therefore, the normalized and normal Erlang distributions differ in numerical characteristics. The introduction of the time shift parameter in the laws of input flow distribution and service time for the systems under consideration turns them into systems with a delay with a shorter waiting time. This is because the time shift operation reduces the coefficient of variation in the intervals between the receipts of the requirements and their service time, and as is known from queuing theory, the average wait time of requirements is related to these coefficients of variation by a quadratic dependence. The system with usual erlangian input distributions of the second order is applicable only at a certain point value of the coefficients of variation of the intervals between the receipts of the requirements and their service time. The same system with shifted distributions allows us to operate with interval values of coefficients of variations, which expands the scope of these systems. This approach allows us to calculate the average delay for these systems in mathematical packages for a wide range of traffic parameters.

**KEYWORDS:** Ordinary and normalized Erlangian distribution laws, Lindley integral equation, spectral decomposition method, Laplace transform.

### ABBREVIATIONS

LIE is a Lindley integral equation;  
QS is a queuing system;  
PDF is a probability distribution function.

### NOMENCLATURE

$f_\lambda(t)$  is a density function of the distribution of time between arrivals;

$F_\lambda^*(s)$  is a Laplace transform of the function  $f_\lambda(t)$ ;

$f_\mu(t)$  is a density function of the distribution of service time;

$F_\mu^*(s)$  is a Laplace transform of the function  $f_\mu(t)$ ;

$c_\lambda$  the coefficient of variation of time between arrivals;

$c_\mu$  the coefficient of variation of service time;

$E_2$  is an erlangian distribution of the second order;

$E_2^-$  is a shifted erlangian distribution of the second order;

G is an arbitrary distribution law;

$\bar{W}$  is an average delay in the queue;

$W^*(s)$  is a Laplace transform of delay density function;

$\lambda$  is a parameter of the erlangian distribution law of the input flow;

$\mu$  is a parameter of the erlangian distribution law of service time;

$\rho$  is a system load factor;

$\bar{\tau}_\lambda$  is an average time between arrivals;

$\bar{\tau}_\lambda^2$  is a second initial moment of time between arrivals;

$\bar{\tau}_\mu$  is an average service time;

$\bar{\tau}_\mu^2$  is a second initial moment of service time;

$\Phi_+(s)$  is a Laplace transform of the PDF of waiting time;

$\psi_+(s)$  is a first component of spectral decomposition;

$\psi_-(s)$  is a second component of spectral decomposition;

$\chi(t)$  is a characteristic function of a random variable.

### INTRODUCTION

This article is devoted to the analysis of the  $E_2/E_2/1$  QS with ordinary Erlang distributions, for which no results were found in the public domain on the average

delay of requests in the queue, which is the main characteristic for any QS. According to this characteristic, for example, packet delays in packet-switched networks are estimated when they are modeled using QS.

We also investigated the above system with time-shifted input Erlang distributions in order to obtain a solution for the average delay. A shift of the distribution law to the right from the zero point transforms the usual system  $E_2/E_2/1$  into a system of the  $G/G/1$  type. In queuing theory, studies of  $G/G/1$  systems are especially relevant due to the fact that there is no solution in the final form for the general case. Therefore, such systems are considered under different distribution laws.

In the study of  $G/G/1$  systems, an important role is played by the method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation, and most of the results in the theory of queuing were obtained using this method. In the previous works of the authors, it is clearly shown that in systems formed by shifted distribution laws, with the same load factor as compared with conventional systems, the average delay becomes less.

This is achieved because the coefficients of variation of the arrival  $c_\lambda$  and service times  $c_\mu$  for shifted distribution laws become smaller when entering the shift parameter  $t_0 > 0$ .

**The object of study** is the main characteristic – the average waiting time of requirements in the queue of the queuing systems type  $G/G/1$ .

**The subject of study** is the average waiting time of requirements in the queue of the QS  $E_2/E_2/1$  and in the same system, but with shifted input distributions.

**The purpose of the work** is obtaining a solution for the average delay of requirements in the queue in closed form for these systems.

## 1 PROBLEM STATEMENT

The paper poses the problem of finding a solution for the waiting time of requests in the queue in the ordinary system  $E_2/E_2/1$  formed by Erlang distributions, as a special case of the gamma distribution and in the system formed by shifted Erlang distributions. This task also involves identifying the differences between the usual and normalized Erlang distributions. To solve the problem, we used the apparatus of spectral decomposition of the Lindley integral equation.

Let us briefly recall the main content of the method of spectral decomposition of the LIE solution based on the classics of the queuing theory [1]. The solution of the LIE by the spectral decomposition method consists in finding the representation for the expression  $F_\lambda^*(-s) \cdot F_\mu^*(s) - 1$  in the form of a fractional rational function, i.e. as a product of two factors, which would give a rational function of  $s$ .

When using the method of spectral decomposition of an LIE solution to determine the average waiting time, we will follow the approach and symbolism of the author of the classical queuing theory [1]. To solve the problem, it is necessary to find the law of waiting time distribution in

the system through the spectral decomposition of the form:  $F_\lambda^*(-s)F_\mu^*(s)-1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ , where  $\psi_+(s)$  and  $\psi_-(s)$  are some fractional rational functions of  $s$  that can be factorized. Functions  $\psi_+(s)$  and  $\psi_-(s)$  must satisfy special conditions according to [1], which can be found in the previous works of the authors [2–6].

Thus, to solve the problem, it is necessary to construct spectral expansions of the form  $F_\lambda^*(-s)F_\mu^*(s)-1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$  for the systems under consideration, considering the conditions specified above in each case.

## 2 REVIEW OF THE LITERATURE

The method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation used in this work was first presented in detail in the classics of queuing theory [1], and was subsequently applied in many works, including [8, 9, 13]. A different approach to solving Lindley's equation has been used in Russian language literature. That work used factorization instead of the term "spectral decomposition" and instead of the functions  $\psi_+(s)$  and  $\psi_-(s)$  it used factorization components  $\omega_+(z, t)$  and  $\omega_-(z, t)$  of the function  $1 - z \cdot \chi(t)$ , where  $\chi(t)$  is the characteristic function of a random variable  $\xi$  with an arbitrary distribution function  $C(t)$ , and  $z$  is any number from the interval  $(-1, 1)$ . This approach for obtaining results for systems under consideration is less convenient than the approach described and illustrated with numerous examples in [1].

The method of spectral decomposition of the LIE solution was also used to study systems with different input distributions in [2–6]. At the same time, the scientific literature, including web resources, the author failed to find the results on the waiting time for the QS with Erlang distributions, as a special case of the gamma distribution. Among foreign publications, it is worth highlighting [10, 11], in which it is proposed to consider the queue of requests to Internet resources as queues with a time lag.

The results of works [2–6] together with [1] allowed developing the theory of the method of spectral decomposition of the LIE solution into the usual second-order Erlang distribution shifted to the right from the zero point.

Approximation methods with respect to distribution laws are described in detail in [9, 13, 14], and similar studies in queuing theory have recently been carried out in [15–24].

## 3 MATERIALS AND METHODS

As you know, the two-parameter gamma distribution is given by the density function of the form

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\beta^{-\alpha} t^{\alpha-1} e^{-t/\beta}}{\Gamma(\alpha)}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

where  $\Gamma(\alpha)$  is a gamma function equal  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$

for any real number  $z > 0, \alpha > 0, \beta > 0$ . Next, we need the numerical characteristics of the gamma distribution: the mean value of the interval  $\bar{\tau} = \alpha\beta$  and the coefficient of variation  $c = 1/\sqrt{\alpha}$ . To apply the spectral decomposition method, we find the Laplace transform of the gamma distribution

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{\alpha-1} e^{-t/\beta} dt = \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-(s+1/\beta)t} dt = \\ &= \left. \begin{aligned} (s+1/\beta)t &= x \\ t &= \frac{\beta}{\beta s+1} x \\ dt &= \frac{\beta}{\beta s+1} dx \end{aligned} \right\} = \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{\beta}{\beta s+1} \right)^{\alpha} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \\ &= \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{\beta}{\beta s+1} \right)^{\alpha} \Gamma(\alpha) = \frac{1}{(\beta s+1)^{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Analyzing the Laplace transform of the gamma distribution, we conclude that this distribution law in queuing theory can be used only in special cases with integer values  $\alpha \geq 2$ .

To apply the method of spectral decomposition of the Lindley integral equation in the last expression, we change the variable  $\lambda = 1/\beta$  for the distribution density function of the input flow intervals,  $\mu = 1/\beta$  for the distribution density function of the service time and restrict ourselves to the case  $\alpha=2$ . Thus, in the case of integers  $\alpha \geq 2$ , the gamma distribution turns into the usual Erlang distribution of order  $\alpha$ .

For example, when replacing  $\lambda = 1/\beta, k = \alpha$ , we get the usual Erlang distribution of order  $k$ :

$$f_{\lambda}(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!}. \text{ For } k=2 \text{ we get } f_{\lambda}(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}.$$

This distribution differs from the normalized Erlang distribution considered in [2], where  $f_{\lambda}(t) = 4\lambda^2 t e^{-2\lambda t}$ .

The difference between them is that the mathematical expectation of the normalized distribution does not depend on the order of the distribution  $k$ , therefore, they differ in numerical characteristics [14].

Due to such a difference between the distributions, the QS formed by two flows, in which the time intervals are given by the density functions of the usual second-order Erlang distribution, as a special case of the gamma distribution, we denote  $E_2/E_2/1$  as well as the QS formed by the normalized Erlang distributions. The main

differences between the normal (derived from the gamma distribution) and normalized  $E_2$  Erlang distributions are shown in Tables 1 and 2.

Table 1 – Numerical characteristics of distributions

Distribution	$\bar{\tau}_{\lambda}$	$\overline{\tau_{\lambda}^2}$	$c_{\lambda}^2$
Erlangian usual $E_2$	$2/\lambda$	$6/\lambda^2$	$1/2$
Erlangian normalized $E_2$	$1/\lambda$	$3/(2\lambda^2)$	$1/2$

Table 2 – Distribution parameter obtained by the method of moments

Distribution	Density $f_{\lambda}(t)$	Parameter $\lambda$
Erlangian usual $E_2$	$\lambda^2 t e^{-\lambda t}$	$\lambda = 2 / \bar{\tau}_{\lambda}$
Erlangian normalized $E_2$	$4\lambda^2 t e^{-2\lambda t}$	$\lambda = 1 / \bar{\tau}_{\lambda}$

Thus, these distribution laws differ in both parameter and numerical characteristics, except for the coefficient of variation. As we will see below, systems formed by ordinary and normalized Erlang distributions will have different spectral expansions. In this regard, it will be interesting to see the results obtained.

We will assume that the system  $E_2/E_2/1$  is formed by two flows with the functions of the probability distribution densities:

$$f_{\lambda}(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}, \quad (3)$$

$$f_{\mu}(t) = \mu^2 t e^{-\mu t}. \quad (4)$$

Then we will have:

$$F_{\lambda}^*(s) = \left( \frac{\lambda}{\lambda+s} \right)^2; F_{\mu}^*(s) = \left( \frac{\mu}{\mu+s} \right)^2.$$

Hence, the spectral expansion  $F_{\lambda}^*(-s)F_{\mu}^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$  of the LIE solution for the system under consideration will take the form:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} &= \left( \frac{\lambda}{\lambda-s} \right)^2 \left( \frac{\mu}{\mu+s} \right)^2 - 1 = \frac{\lambda^2 \mu^2 - (\lambda-s)^2 (\mu+s)^2}{(\lambda-s)^2 (\mu+s)^2} = \\ &= \frac{-s(s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0)}{(\lambda-s)^2 (\mu+s)^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

where the coefficients of the cubic polynomial collected using symbolic Mathcad operations

$$c_0 = 2\lambda\mu(\mu-\lambda), c_1 = -(\lambda^2 - 4\lambda\mu + \mu^2), c_2 = -2(\mu-\lambda).$$

The cubic polynomial  $s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0$  of the numerator has two negative roots and one positive one, since in the case of a stable system  $\lambda < \mu$  i.e.  $(\mu-\lambda) > 0$ . For convenience, let us denote them by  $-s_1, -s_2$  and  $s_3$ .

Then the zeros of the numerator of the expansion  $s = 0, -s_1, -s_2, s_3$ . Double poles of spectral decomposition  $s = \lambda, s = -\mu$  (see Fig. 1). Now, considering special conditions [1], we construct functions  $\psi_+(s)$  and  $\psi_-(s)$ :

$$\psi_+(s) = \frac{s(s+s_1)(s+s_2)}{(\mu+s)^2}; \quad \psi_-(s) = -\frac{(\lambda-s)^2}{(s-s_3)}$$

Checking the fulfillment of the conditions [1] for these functions is not difficult, this fact is also confirmed by Figure 1.

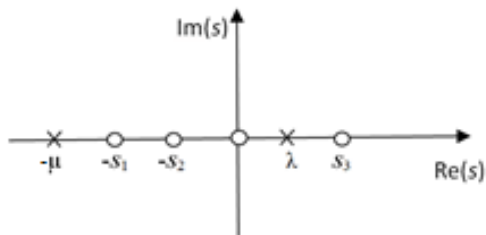


Figure 1 – Zeros and poles of the function  $\psi_+(s)/\psi_-(s)$  for the  $E_2/E_2/1$  system

When constructing these functions, it is more convenient to mark the zeros and poles of the ratio  $\psi_+(s)/\psi_-(s)$  on the complex  $s$  – plane to eliminate errors in constructing the functions  $\psi_+(s)$  and  $\psi_-(s)$ . In Fig. 1, the poles are marked with crosses, and zeros are marked with circles.

Further, using the method of spectral decomposition, we find the constant  $K$ :

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s+s_1)(s+s_2)}{(\mu+s)^2} = \frac{s_1 s_2}{\mu^2},$$

where  $s_1$  and  $s_2$  are the absolute values of negative roots  $-s_1, -s_2$ . The constant  $K$  is known to represent the probability that a demand entering the system finds it free.

Now let us build an intermediate function

$$\Phi_+(s) = \frac{K}{\psi_+(s)} = \frac{s_1 s_2 (s+\mu)^2}{\mu^2 s (s+s_1)(s+s_2)}$$

Hence, for the system  $E_2/E_2/1$ , we obtain the function:

$$W^*(s) = s \cdot \Phi_+(s) = \frac{s_1 s_2 (s+\mu)^2}{\mu^2 (s+s_1)(s+s_2)} \quad (6)$$

Comparison with a similar function for the  $E_2/E_2/1$  system formed by the normalized Erlang distributions from [2] also confirms their difference:

$$W^*(s) = \frac{s_1 s_2 (2\mu+s)^2}{4\mu^2 (s+s_1)(s+s_2)}$$

To find the average waiting time, we find the derivative of the function  $W^*(s)$  with a minus sign at the point  $s=0$ , for which we use the Mathcad package:

$$-\frac{dW^*(s)}{d(s)} \Big|_{s=0} = \frac{s_1+s_2}{s_1 s_2} - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu}$$

Finally, the average waiting time for the  $E_2/E_2/1$  system

$$\bar{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu}, \quad (7)$$

where  $s_1$  and  $s_2$  how the roots of the cubic equation are expressed through the parameters of distributions (3) and (4).

Next, consider QS, for which the distribution laws of the input flow and service time are given by the density functions shifted to the right:

$$f_\lambda(t) = \lambda^2 (t-t_0) e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad (8)$$

$$f_\mu(t) = \mu^2 (t-t_0) e^{-\mu(t-t_0)}. \quad (9)$$

We denote such a system  $E_2^- / E_2^- / 1$ .

To find the average waiting time in the queue for this system, we prove the following statement.

Statement. The spectral decompositions  $F_\lambda^*(-s)F_\mu^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$  of the LIE solution for systems  $E_2^- / E_2^- / 1$  and  $E_2/E_2/1$  completely coincide and have the form (5), i.e. the spectral decomposition is invariant to the operation of the time shift of the density function.

Proof. The Laplace transform of functions (8) and (9), respectively, have the form:

$$F_\lambda^*(-s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-s}\right)^2 e^{t_0 s}; \quad F_\mu^*(s) = \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^2 e^{-t_0 s}$$

Then for a  $E_2^- / E_2^- / 1$  system, the spectral decomposition will be:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} &= \left(\frac{\lambda}{\lambda-s}\right)^2 e^{t_0 s} \times \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^2 e^{-t_0 s} - 1 = \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda-s}\right)^2 \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^2 - 1. \end{aligned}$$

Here, exponents with opposite signs of exponential functions are reset to zero, and thus the shift operation in the spectral decomposition is leveled. Thus, the spectral decompositions of the solution of the LIE for the two systems under consideration coincide.

Assertion is proved.

Corollary. The formula for the average waiting time for a system with shifted distributions will have exactly the same form as for system with ordinary distributions, but with changed parameters  $\lambda$  и  $\mu$  due to a time shift operation [2–6]. Consequently, the average waiting time for systems with lag actually depends on the magnitude of the shift parameter  $t_0 > 0$ .

To determine the unknown distribution parameters, we use the Laplace transform of function (8). The average value of the interval between arrivals is given by the first derivative of the Laplace transform with a minus sign at the point  $s=0$ :

$$-\frac{dF_{\lambda}^*(s)}{ds}\Big|_{s=0} = \left[ \frac{2\lambda^2 e^{-t_0 s}}{(\lambda+s)^3} + \frac{\lambda^2 t_0 e^{-t_0 s}}{(\lambda+s)^2} \right] \Big|_{s=0} = 2/\lambda + t_0.$$

From here we get an expression for  $\bar{\tau}_{\lambda}$ :

$$\bar{\tau}_{\lambda} = 2/\lambda + t_0. \quad (10)$$

From the expression

$$\frac{d^2 F_{\lambda}^*(s)}{ds^2}\Big|_{s=0} = \frac{6}{\lambda^2} + 4\frac{t_0}{\lambda} + t_0^2 \text{ we find}$$

$$\bar{\tau}_{\lambda}^2 = \frac{6}{\lambda^2} + 4\frac{t_0}{\lambda} + t_0^2.$$

Determine the square of the coefficient of variation

$$c_{\lambda}^2 = \frac{\bar{\tau}_{\lambda}^2 - (\bar{\tau}_{\lambda})^2}{(\bar{\tau}_{\lambda})^2} = \frac{2}{(2 + \lambda t_0)^2}.$$

From here the value for  $c_{\lambda}$ :

$$c_{\lambda} = \sqrt{2} / (2 + \lambda t_0). \quad (11)$$

Note that for the distribution  $E_2$ :  $\bar{\tau}_{\lambda} = 2/\lambda$ ,  $c_{\lambda} = 1/\sqrt{2}$ .

Comparing the results of the numerical characteristics  $\bar{\tau}_{\lambda}$ ,  $c_{\lambda}$  for the distributions  $E_2$  and  $E_2^-$  you can see the difference between them, obtained as a result of the shift of the distribution laws by value  $t_0 > 0$ . The coefficient of variation  $c_{\lambda}$  for the distribution  $E_2^-$  decreases with a shift  $(1 + \lambda t_0 / 2)$  in times compared to the coefficient  $c_{\lambda}$  for the distribution  $E_2$ .

For the service time according to the law  $E_2^-$ , we obtain similar expressions for determining  $\mu$  and  $c_{\mu}$ :

$$\bar{\tau}_{\mu} = 2/\mu + t_0. \quad (12)$$

$$c_{\mu} = \sqrt{2} / (2 + \mu t_0). \quad (13)$$

By setting the values obtained above as input parameters  $\bar{\tau}_{\lambda}$ ,  $\bar{\tau}_{\mu}$ ,  $c_{\lambda}$ ,  $c_{\mu}$  for calculating the  $E_2^- / E_2^- / 1$  system, as well as the shift parameter  $t_0$  according to expressions (10) – (13), you can calculate the average waiting time using the calculation formula (7). In this case, the ranges of variation of the variation coefficients  $c_{\lambda} \in (0, 1/\sqrt{2})$  and  $c_{\mu} \in (0, 1/\sqrt{2})$ , are determined by relations (11) and (13), respectively, depending on the magnitude of the shift parameter  $t_0 > 0$ .

Considering that the average waiting time in the G/G/1 system is related to the coefficients of variation of the time between the arrivals of customers and the service time by a quadratic dependence, in a system with delay the waiting time will be shorter than in a conventional system, which is illustrated in the next section.

#### 4 EXPERIMENTS

Below in Table 3 shows the calculation data for the  $E_2^- / E_2^- / 1$  system for cases of low, medium and high load  $\rho = 0.1; 0.5; 0.9$ . For comparison, the right column shows data for a conventional  $E_2 / E_2 / 1$  system. The load factor in this case is determined by the ratio of the average intervals  $\rho = \bar{\tau}_{\mu} / \bar{\tau}_{\lambda}$ .

The calculations used the normalized service time  $\bar{\tau}_{\mu} = 1$ .

Table 3 – Results of experiments for QS  $E_2^- / E_2^- / 1$  and  $E_2 / E_2 / 1$

Input parameters				Average delay	
$\rho$	$c_{\lambda}$	$c_{\mu}$	$t_0$	For QS $E_2^- / E_2^- / 1$	For QS $E_2 / E_2 / 1$
0.1	0.643	0.071	0.9	0.000	0.017
	0.672	0.354	0.5	0.002	
	0.700	0.636	0.1	0.013	
	0.706	0.700	0.01	<b>0.016</b>	
0.5	0.389	0.071	0.9	0.001	0.390
	0.530	0.354	0.5	0.081	
	0.672	0.636	0.1	0.309	
	0.704	0.700	0.01	<b>0.382</b>	
0.9	0.134	0.071	0.9	0.034	4.359
	0.389	0.354	0.5	1.057	
	0.643	0.636	0.1	3.519	
	0.701	0.700	0.01	<b>4.271</b>	

Despite the large differences between the usual and normalized Erlang distributions shown in Tables 1 and 2, as well as the difference between the Laplace transforms of the waiting time density function, the data in Table 3 completely coincide with the corresponding data for the QS with normalized Erlang distributions  $E_2 / E_2 / 1$  [2].

This phenomenon, now after conducting computational experiments, can be explained by the following facts: first, the ordinary and normalized Erlang distributions have the same coefficients of variation, and secondly, the input parameter  $\rho = \frac{\bar{\tau}_\mu}{\bar{\tau}_\lambda} = \frac{2\lambda}{2\mu} = \frac{\lambda}{\mu}$  for the ordinary Erlang distribution completely coincides with for the normalized Erlang distribution.

## 5 RESULTS

In this work, spectral expansions of the solution to the Lindley integral equation for the ordinary system and the system with delay are obtained, with the help of which a calculation formula for the average waiting time in the queue for the system  $E_2/E_2/1$  in closed form is derived.

This calculation formula is also valid for a system with a time delay  $E_2^-/E_2^-/1$ , considering changes in the numerical characteristics of its shifted distributions. The average waiting time in a system with delay, as expected, is many times less than in a conventional system, and as the value of the shift parameter decreases, it approaches the average waiting time in a conventional system.

The calculation data in Table 3 are in good agreement with the results of the method of two-moment approximation of the processes of arrival and departure of claims [7].

## 6 DISCUSSION

The results of Table 3 confirm the complete adequacy of the constructed mathematical models for the average delay of requests in the queue for a conventional  $E_2/E_2/1$  system and a system with delay. Table data 3 fully confirm the above assumptions about the average waiting time in a system with delay.

In addition, with a decrease in the shift parameter  $t_0$ , the average queue delay in a system with delay tends to the value of this time in a conventional system, which additionally confirms the adequacy of the constructed mathematical models for both systems under consideration.

The range of variation of the parameters of the system is wider than that of the conventional  $E_2/E_2/1$  system, therefore, these systems can be successfully applied in the modern theory of teletraffic. The results of the performed experiments confirm the expansion of the ranges of variation of the parameters for the system with delay for  $c_\lambda$  and  $c_\mu$  from 0 to  $1/\sqrt{2}$ .

Thus, the introduction of distributions shifted to the right from the zero point expands the range of variation of the coefficients of variation of the arrival intervals and service time, thereby expanding the scope of these QSSs.

Using the proposed approach, in addition to the average waiting time, it is possible to determine the variance and moments of higher orders of the waiting time.

## CONCLUSIONS

In this work, the problem of deriving a formula for the average delay of requests in the queue for the considered systems is solved.

**The scientific novelty** of the results is that for the first time the spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation for the considered systems was obtained which are used to derive expression for the average waiting time in the queue for this system in closed form.

These expressions complement and expands the well-known incomplete formula for the average waiting time in the G/G/1 systems with arbitrary laws of input flow distribution and service time.

**The practical significance** of the work lies in the fact that the obtained results can be successfully applied in the modern theory of teletraffic, where the delays of incoming traffic packets play a primary role. For this, it is necessary to know the numerical characteristics of the incoming traffic intervals and the service time at the level of the first two moments, which does not cause difficulties when using modern traffic analyzers [10].

**Prospects for further research** are seen in the continuation of the study of systems of type G/G/1 with other common input distributions and in expanding and supplementing the formulas for average waiting time.

## ACKNOWLEDGEMENTS

This work was carried out as part of the author's scientific school "Methods and Models for the Research of Computing Systems and Networks", registered at the Russian Academy of Natural Sciences on 31.03.2015 and was supported by the University of PSUTI.

## REFERENCES

1. Kleinrock L. Queueing Systems, Vol. I. Theory. New York, Wiley, 1975, 417 p.
2. Tarasov V. N., Bakhareva N. F. Research of queueing systems with shifted erlangian and exponential input distributions, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2019, No. 1, pp. 67–76. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-1-7
3. Tarasov V. N. The analysis of two queueing systems HE2/M/1 with ordinary and shifted input distributions, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2019, No. 2, pp. 71–79. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-2-8
4. Tarasov V. N. Queueing systems with delay, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2019, No. 3, pp. 55–63. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-3-7
5. Tarasov V. N., Bakhareva N. F. Comparative analysis of two queueing systems M/HE2/1 with ordinary and with the shifted input distributions, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2019, No. 4, pp. 50–58. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-4-5
6. Tarasov V. N. Analysis of H-2/E-2/1 system and her of the analog with shifted input distributions, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2020, No. 1, pp. 90–97. DOI: 10.15588/1607-3274-2020-1-10
7. Kruglikov V. K., Tarasov V. N. Analysis and calculation of queueing-networks using the two-dimensional diffusion-approximation, *Automation and Remote Control*, 1983, No. 8, pp. 1026–1034.

8. Brannstrom N. A. Queueing Theory analysis of wireless radio systems. Applied to HS-DSCH. Lulea university of technology, 2004, 79 p.
9. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods, *Operation Research*, 1982, Vol. 30, No. 1, pp. 125–147.
10. Novitzky S., Pender J., Rand R. H., Wesson E. Limiting the oscillations in queues with delayed information through a novel type of delay announcement, *Queueing Systems*, 2020, Vol. 95, pp. 281–330. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-020-09657-9>
11. Novitzky S., Pender J., Rand R. H., Wesson E. Nonlinear Dynamics in Queueing Theory: Determining the Size of Oscillations in Queues with Delay. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 18–1 2019, Vol. 18, No. 1, pp. 279–311. DOI: <https://doi.org/10.1137/18M1170637>
12. RFC 3393 [IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM)] Available at: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>. (accessed: 26.02.2016).
13. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. Teletraffic and datatraffic in a Period of Change. ITC-13. Elsevier Science Publishers, 1991, pp. 683–688.
14. Aliev T. I. Osnovy modelirovaniya diskretnykh system. SPb, SPbGU ITMO, 2009, 363 p.
15. Aras A. K., Chen X. & Liu Y. Many-server Gaussian limits for overloaded non-Markovian queues with customer abandonment, *Queueing Systems*, 2018, Vol. 89, No. 1, pp. 81–125. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-018-9575-0>
16. Jennings O. B. & Pender J. Comparisons of ticket and standard queues, *Queueing Systems*, 2016, Vol. 84, No. 1, pp. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
17. Gromoll H. C., Terwilliger B. & Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times, *Queueing Systems*, 2018, Vol. 89, No. 3, pp. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
18. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates, *Queueing Systems*, 2018, Vol. 89, No. 3, pp. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>
19. Bazhba M., Blanchet J., Rhee CH., et al. Queue with heavy-tailed Weibull service times, *Queueing Systems*, 2019, Vol. 93, No. 11, pp. 1–32. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09640-z/>
20. Adan I., D’Auria B., Kella O. Special volume on ‘Recent Developments in Queueing Theory’ of the third ECQT conference, *Queueing Systems*, 2019, Vol. 93, No. 1, pp. 1–190. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09630-1>
21. Adan I., D’Auria B., Kella O. Special volume on ‘Recent Developments in Queueing Theory’ of the third ECQT conference: part 2, *Queueing Systems*, 2019, pp. 1–2. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09637-8>
22. Tibi D. Martingales and buffer overflow for the symmetric shortest queue model, *Queueing Systems*, 2019, Vol. 93, pp. 153–190. DOI: [10.1007/s11134-019-09628-9](https://doi.org/10.1007/s11134-019-09628-9)
23. Jacobovic R., Kella O. Asymptotic independence of regenerative processes with a special dependence structure. *Queueing Systems*, 2019, Vol. 93, pp. 139–152. DOI: [10.1007/s11134-019-09606-1](https://doi.org/10.1007/s11134-019-09606-1)
24. Wang L., Kulkarni V. Fluid and diffusion models for a system of taxis and customers with delayed matching, *Queueing Systems*, 2020, Vol. 96, pp. 101–131. DOI: [10.1007/s11134-020-09659-7](https://doi.org/10.1007/s11134-020-09659-7)

Received 14.05.2021.  
Accepted 22.07.2021.

УДК 621.391.1:621.395

**Тарасов В. Н.** – д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри програмного забезпечення та управління в технічних системах Поволзького державного університету телекомунікацій та інформатики, РФ.

### МОДЕЛІ ЗАТРИМКИ НА БАЗІ СИСТЕМ З ЗВИЧАЙНИМИ ТА З ЗСУНУТИМИ ГІПЕРЕКСПОНЕНТНИМ ТА ГІПЕРЕРЛАНГІВСЬКИМ ВХІДНИМИ РОЗПОДІЛАМИ

**Актуальність.** Для моделювання різних систем передачі даних затребувані системи масового обслуговування G/G/1, це особливо актуально в зв’язку з тим, що для них не існує рішення в кінцевому вигляді в загальному випадку. Розглянуто задачу виведення рішення для середньої затримки в черзі у замкнутій формі для двох систем зі звичайними і з зсунутими ерлангівськими вхідними розподілами.

**Мета роботи.** Отримання рішення для основної характеристики системи – середньої затримки вимог в черзі для двох систем масового обслуговування типу G/G/1 зі звичайними і з зсунутими ерлангівськими вхідними розподілами.

**Метод.** Для вирішення поставленого завдання був використаний класичний метод спектрального розкладання розв’язку інтегрального рівняння Ліндлі. Цей метод дозволяє отримати рішення для середньої затримки для розглянутих систем у замкнутій формі. Для практичного застосування отриманих результатів використаний відомий метод моментів теорії ймовірностей.

**Результати.** Вперше отримано спектральні розкладання розв’язку інтегрального рівняння Ліндлі для двох систем, за допомогою яких виведені розрахункові формули для середньої затримки в черзі в замкнутій формі.

**Висновки.** Різниця між звичайним і нормованим розподілом полягає в тому, що у нормованого розподілу математичне сподівання не залежить від порядку розподілу  $k$ , отже, нормоване і звичайне розподілу Ерланга відрізняються числовими характеристиками. Введення параметра зсуву в часі в закони розподілу вхідного потоку і часу обслуговування для розглянутих систем, перетворює їх в системи запізненням з меншим часом очікування. Це пов’язано з тим, що операція зсуву в часі зменшує величину коефіцієнтів варіацій інтервалів між надходженнями вимог і їх часу обслуговування, а як відомо з теорії масового обслуговування, середній час очікування вимог пов’язано з цими коефіцієнтами варіацій квадратичною залежністю. Якщо система з ерлангівськими вхідними розподілами другого порядку працює тільки при одному точковому значенні коефіцієнтів варіацій інтервалів між надходженнями вимог і їх часу обслуговування, то ця ж система з зсунутими розподілами дозволяє оперувати з інтервальними значеннями коефіцієнтів варіацій, що розширює

сферу застосування цих систем. Такий підхід дозволяє розрахувати середньої затримки для зазначених систем в математичних пакетах для широкого діапазону зміни параметрів трафіку.

Крім середнього часу очікування, такий підхід дає можливість також визначити моменти вищих порядків часу очікування. З огляду на той факт, що варіація затримки пакетів (джиттер) в телекомунікації визначається як дисперсія затримки від його середнього значення, то джиттер можна буде визначити через дисперсію затримки.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** звичайний і нормований закони розподілу Ерланга, інтегральне рівняння Ліндлі, метод спектрального розкладання, перетворення Лапласа.

УДК 621.391.1:621.395

## СРАВНЕНИЕ ДВУХ ФОРМ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭРЛАНГА В ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

**Тарасов В. Н.** – д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, РФ.

### АННОТАЦИЯ

**Актуальность.** Для моделирования различных систем передачи данных востребованы системы массового обслуживания  $G/G/1$ , это особо актуально в связи с тем, что для них не существует решения в конечном виде в общем случае. Рассмотрена задача вывода решения для среднего времени ожидания в очереди в замкнутой форме для обычных систем с эрланговскими входными распределениями второго порядка и для этих же систем со сдвинутыми вправо распределениями.

**Цель работы.** Получение решения для основной характеристики системы – среднего времени ожидания требований в очереди для двух систем массового обслуживания типа  $G/G/1$  с обычными и со сдвинутыми эрланговскими входными распределениями.

**Метод.** Для решения поставленной задачи использован метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли, который позволяет получить решение для среднего времени ожидания для рассматриваемых систем в замкнутой форме. Для практического применения полученных результатов использован известный метод моментов теории вероятностей.

**Результаты.** Впервые получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для систем с обычными и сдвинутыми распределениями Эрланга, с помощью которых выведены расчетные формулы для среднего времени ожидания в очереди для вышеуказанных систем в замкнутой форме.

**Выводы.** Разница между обычным и нормированным распределением заключается в том, что у нормированного распределения математическое ожидание не зависит от порядка распределения, следовательно, нормированное и обычное распределения Эрланга отличаются числовыми характеристиками. Введение параметра сдвига во времени в законы распределения входного потока и времени обслуживания для рассматриваемых систем, преобразует их в системы запаздыванием с меньшим временем ожидания. Это связано с тем, что операция сдвига во времени уменьшает величину коэффициентов вариаций интервалов между поступлениями требований и их времени обслуживания, а как известно из теории массового обслуживания, среднее время ожидания требований связано с этими коэффициентами вариаций квадратичной зависимостью. Если система с эрланговскими входными распределениями второго порядка работает только при одном точечном значении коэффициентов вариаций интервалов между поступлениями требований и их времени обслуживания, то эта же система со сдвинутыми распределениями позволяет оперировать с интервальными значениями коэффициентов вариаций, что расширяет область применения этих систем. Такой подход позволяет рассчитать среднее время ожидания для указанных систем в математических пакетах для широкого диапазона изменения параметров трафика.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** обычный и нормированный эрланговский законы распределения, интегральное уравнение Линдли, метод спектрального разложения, преобразование Лапласа.

### ЛИТЕРАТУРА / LITERATURA

1. Kleinrock L. *Queueing Systems, Vol. I: Theory* / L. Kleinrock. – New York : Wiley, 1975. – 417 p.
2. Tarasov V. N. Research of queueing systems with shifted erlangian and exponential input distributions / V. N. Tarasov, N. F. Bakhareva // *Radio Electronics, Computer Science, Control.* – 2019. – № 1. – P. 67–76. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-1-7
3. Tarasov V. N. The analysis of two queueing systems HE2/M/1 with ordinary and shifted input distributions / V. N. Tarasov // *Radio Electronics, Computer Science, Control.* – 2019. – № 2. – P. 71–79. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-2-8
4. Tarasov V. N. Queueing systems with delay / V. N. Tarasov // *Radio Electronics, Computer Science, Control.* – 2019. – № 3. – P. 55–63. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-3-7
5. Tarasov V. N. Comparative analysis of two queueing systems M/HE2/1 with ordinary and with the shifted input distributions / V. N. Tarasov, N. F. Bakhareva // *Radio Electronics, Computer Science, Control.* – 2019. – № 4. – P. 50–58. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-4-5
6. Tarasov V. N. Analysis of H-2/E-2/1 system and her of the analog with shifted input distributions / V. N. Tarasov // *Radio Electronics, Computer Science, Control.* – 2020. – № 1. – P. 90–97. DOI: 10.15588/1607-3274-2020-1-10
7. Kruglikov V. K. Analysis and calculation of queueing-networks using the two-dimensional diffusion-approximation / V. K. Kruglikov, V. N. Tarasov // *Automation and Remote Control.* – 1983. – № 8. – P. 1026–1034.
8. Brannstrom N. A Queueing Theory analysis of wireless radio systems / N. Brannstrom. – Applied to HS-DSCH. Lulea university of technology, 2004. – 79 p.



9. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods / W. Whitt // *Operation Research*. – 1982. – № 1. – P. 125–147.
10. Limiting the oscillations in queues with delayed information through a novel type of delay announcement / [S. Novitzky, J. Pender, R. H. Rand, E. Wesson] // *Queueing Systems*. – 2020. – Vol. 95. – P. 281–330. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-020-09657-9>
11. Nonlinear Dynamics in Queueing Theory: Determining the Size of Oscillations in Queues with Delay / [S. Novitzky, J. Pender, R. H. Rand, E. Wesson] // *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* – 2019. – № 1. – P. 279–311. DOI: <https://doi.org/10.1137/18M1170637>
12. [HTTPS://tools.ietf.org/html/rfc3393](https://tools.ietf.org/html/rfc3393). RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM) (accessed: 26.02.2016).
13. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals / A. Myskja // *Teletraffic and datatrafic in a Period of Change, ITC-13*. Elsevier Science Publishers. – 1991. – P. 683–688.
14. Aliev T. I. Approximation of Probability Distributions in Queueing Models / T. I. Aliev // *Scientific and technical bulletin of information technologies, mechanics and optics*. – 2013. – № 2. – P. 88–93.
15. Aras A. K. Many-server Gaussian limits for overloaded non-Markovian queues with customer abandonment / A. K. Aras, X. Chen, Y. Liu // *Queueing Systems*. – 2018. – Vol. 89, № 1. – P. 81–125. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-018-9575-0>
16. Jennings O. B. Comparisons of ticket and standard queues / O. B. Jennings, J. Pender // *Queueing Systems*. – 2016. – Vol. 84, № 1. – P. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
17. Gromoll H. C. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times / H. C. Gromoll, B. Terwilliger, B. Zwart // *Queueing Systems*. – 2018. – Vol. 89, № 3. – P. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
18. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates / B. Legros // *Queueing Systems*. – 2018. – Vol. 89, № 3. – P. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>
19. Bazhba M. Queue with heavy-tailed Weibull service times / M. Bazhba, J. Blanchet, C. H. Rhee // *Queueing Systems*. – 2019. – Vol. 93, № 11. – P. 1–32. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09640-z/>
20. Adan I. Special volume on ‘Recent Developments in Queueing Theory’ of the third ECQT conference / I. Adan, B. D’Auria, O. Kella // *Queueing Systems*. – 2019. – Vol. 93, № 1. – P. 1–190. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09630-1>
21. Adan I. Special volume on ‘Recent Developments in Queueing Theory’ of the third ECQT conference: part 2 / I. Adan, B. D’Auria, O. Kella // *Queueing Systems*. – 2019. – P. 1–2. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09637-8>
22. Tibi D. Martingales and buffer overflow for the symmetric shortest queue model / D. Tibi // *Queueing Systems*. – 2019. – Vol. 93. – P. 153–190. DOI: [10.1007/s11134-019-09628-9](https://doi.org/10.1007/s11134-019-09628-9)
23. Jacobovic R. Asymptotic independence of regenerative processes with a special dependence structure / R. Jacobovic, O. Kella // *Queueing Systems*. – 2019. – Vol. 93. – P. 139–152. DOI: [10.1007/s11134-019-09606-1](https://doi.org/10.1007/s11134-019-09606-1)
24. Wang L. Fluid and diffusion models for a system of taxis and customers with delayed matching / L. Wang, V. Kulkarni // *Queueing Systems*. – 2020. – Vol. 96. – P. 101–131. DOI: [10.1007/s11134-020-09659-7](https://doi.org/10.1007/s11134-020-09659-7)

## MODELING OF ASYMPTOTICALLY OPTIMAL PIECEWISE LINEAR INTERPOLATION OF PLANE PARAMETRIC CURVES

**Frolov O. V.** – PhD, Associate Professor, Associate Professor at the Information Systems Department, Simon Kuznets Kharkiv National University Of Economic, Kharkiv, Ukraine.

**Losev M. U.** – PhD, Associate Professor, Associate Professor at the Information Systems Department, Simon Kuznets Kharkiv National University Of Economic, Kharkiv, Ukraine.

### ABSTRACT

**Context.** Piecewise linear approximation of curves has a large number of applications in computer algorithms, as the reconstruction of objects of complex shapes on monitors, CNC machines and 3D printers. In many cases, it is required to have the smallest number of segments for a given accuracy.

**Objective.** The objective of this paper is to improve the method of asymptotically optimal piecewise linear interpolation of plane parametric curves. This improvement is based to research influence of the method parameters and algorithms to distributions of approximation errors.

**Method.** An asymptotically optimal method of curves interpolation is satisfied to the condition of minimum number of approximation units. Algorithms for obtaining the values of the sequence of approximation nodes are suggested. This algorithm is based on numerical integration of the nodes regulator function with linear and spline interpolation of its values. The method of estimating the results of the curve approximation based on statistical processing of line segments sequence of relative errors is substantiated. Modeling of real curves approximation is carried out and influence of the sampling degree of integral function – the nodes regulator on distribution parameters of errors is studied. The influence is depending on a method of integral function interpolation.

**Results.** Research allows to define necessary the number of discretization nodes of the integral function in practical applications. There have been established that with enough sampling points the variance of the error's distribution stabilizes and further increasing this number does not significantly increase the accuracy of the curve approximation. In the case of spline interpolation of the integral function, the values of the distribution parameters stabilized much faster, which allows to reduce the number of initial sampling nodes by 5–6 times having similar accuracy.

**Conclusions.** Modelling of convex planar parametric curves reconstruction by an asymptotically optimal linear interpolation algorithm showed acceptable results without exceeding the maximum errors limit in cases of a sufficient discretization of the integral function. The prospect of further research is to reduce the computational complexity when calculating the values of the integral distribution function by numerical methods, and to use discrete analogues of derivatives in the expression of this function.

**KEYWORDS:** interpolation, polyline segment, linear rational B-spline, equidistant, integration, parametric curve, approximation error, variance.

### ABBREVIATIONS

3D is a three-dimensional form;  
LRBS is a linear rational B-spline;  
CNC is a computer numerical control.

### NOMENCLATURE

$\varepsilon$  is an admissible interpolation error bound, which corresponds to the Hausdorff distance between the curve and the polyline;

$[a]$  is an integer part of  $a$ ;

$d_j$  is a Hausdorff distance between the curve and the  $j$ -th segment of the polyline;

$h$  is a sampling step;

$i, j$  are indexes;

$l_j$  is a segment of the interpolant polyline;

$m$  is a number of polyline segments;

$N$  is a number of points for initial sampling of the integral function – the nodes regulator;

$\mathbf{p}$  is a vector-valued function of parameter (independent variable)  $t$ ;

$P$  is a point on the curve;

$t$  is a parameter (independent variable) varies over the interval  $[0, T]$ ;

$s$  is a reparameterization parameter that determines the asymptotically optimal sampling of the curve;

$w_i$  are weights of the linear rational B-spline;

$x, y$  are Cartesian coordinates;

$\gamma_j = \frac{d_j^{\max}}{\varepsilon}$  is a relative interpolation error for  $j$ -th segment of the polyline;

$\Delta$  is an interpolation error of the integral function;

$\lambda_{i,i+1}$  is a value between 0 and 1, which determines the value of the curve parameter  $t_{i+\frac{1}{2}}$  within the LRB-

spline interpolation interval;

$\sigma$  is a standard deviation for the sample;

$\bar{\theta}$  is a sample mean;

$\Gamma$  is a plane curve;

$\Delta$  is a range of error values for the polyline segments sequence;

$\Phi(t)$  is a nodes distribution function;

$\Psi(t)$  is an integral of the distribution function which define asymptotically optimal sampling of interpolation nodes.

### INTRODUCTION

A wide range of applications requires a transition from “curvilinear” representation of objects to their description in the form of polygons or segments of polylines. These

are rendering, tessellation, finding the intersections of curves and surfaces. Most CNC machines and 3D printers also support only a limited set of interpolation commands, the most common of which are linear, circular, and helical.

Therefore, the reconstruction of continuous geometric objects, such as curves and surfaces, using computers, CNC machines or printers requires sampling: representation as a finite set of points (nodes). This set is then converted to pixels or connected by simpler lines (usually straight lines). Of course, there is a problem of optimizing the nodes number and their location along the curve or surface being reconstructed.

Thus, the development of effective algorithms for reconstructing curves by polylines, considering the accuracy of approximation and optimization of segments number is an actual scientific problem.

**The object of study** is polylines that reconstruct the given convex plane curves and are formed from the nodes that are on these curves.

**The subject of study** is the asymptotically optimal piecewise linear interpolation of convex plane curves that ensuring a required approximation error bound.

**The aim of the work** is to improve the method of asymptotically optimal piecewise – linear interpolation of convex plane parametric curves based on research of influence of parameters and algorithms of this method on approximation errors distributions for real curves.

## 1 PROBLEM STATEMENT

Let a reconstructing curve is represented in the vector – valued parametric form as a single arc:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t) \quad (x = x(t), y = y(t)), \quad (1)$$

or a piecewise parametric form, for example the spline form:

$$S(t) = \sum_{j=1}^k a_j B_j(t). \quad (2)$$

In this case, the problem of linear interpolation of the curve can be considered as obtaining a sequence of values of the parameter  $t$ , which determine the polyline nodes, and provides the required accuracy of reproduction.

Asymptotically optimal in the Hausdorff metric [1] is the polyline interpolation of a plane curve, based on the following choice of nodes:

1) The number of polyline segments can be determined according to the formula:

$$m = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{8\varepsilon}} \int_0^T \Phi(t) dt \right\rceil + 1, \quad (3)$$

where the distribution function has following form:

$$\Phi(t) = \frac{\sqrt{|x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)|}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}. \quad (4)$$

1) The  $j$ -th value of the parameter –  $t_j$ , which define the interpolation node for the curve without the inflection points (for  $\Phi(t) \neq 0, t \in [0, T]$ ), is obtained from the equation:

$$\int_0^{t_j} \Phi(t) dt = \frac{j}{m} \int_0^T \Phi(t) dt, \quad (j = 0, 1, \dots, m). \quad (5)$$

Since the right-hand side of the equation (5) is a monotonic increasing discrete sequence, in the limiting case this sequence can be considered as a variable  $s$ , and expression (5) as an equation of reparameterization.

Let define

$$\Psi(t) = \int_0^t \Phi(u) du, \quad (6)$$

the dependence between the parameters will take the form

$$t = \Psi^{-1}(s), \quad (7)$$

where  $\Psi^{-1}$  is the inverse function of  $\Psi$ .

It is possible to obtain the single value of  $t$  only when  $\Psi$  is a monotone increasing function. In addition, most often the integral of the right-hand side of (6) has no finite expression. This leads to sample the values of the integral function based on the numerical integration of the right-hand side (6).

## 2 REVIEW OF THE LITERATURE

Numerous studies are related to the development of algorithms for piecewise linear reconstruction of curves. These studies include the papers focused on interpolation of curves when the polyline nodes are on the original curve, and studies on the approximation of curves, which will mean the location of these nodes and the polyline itself within the “tolerance”, which is determined by the accuracy of reproduction.

Non-uniform interpolation that adapts to the shape of the curve was considered in [2]. Usually the following procedure is performed: the original ordered set of curve points obtained by the initial uniform sampling is taken; the original set is divided into intervals; for each interval, the internal nodes are checked according to the criteria of local flatness; depending on the result of the check interval is divided into two parts and followed by recursive check, or the end points of the interval are stored in a separate list of nodes that meet the flatness criterion.

The sampling of curve points based on reparameterization depending on the curvature and mixed parameterization of the arc length and curvature with equal weights was considered in [3]. A similar approach to the sampling

is considered in [4], where the mixed criteria was taken as the length of the arc and the bending energy of the curve (which depends on the square of the curvature). These methods [3, 4] require numerical integration and solving the system of nonlinear equations.

A review and analysis of real time linear interpolators for parametric curves applied to use in of CNC systems is given in [5]. The use of a conical cutting tool for CNC machining of free – form surfaces is also required piecewise linear representation of curves – [6]. The reconstruction of the curve by polygon segments in relation to the printing of models on 3D printers was considered in [7].

The issue of reconstruction of a plane curve by a discrete set of points with noise was considered in [8]. The approach to solving the problem is based on the least squares method and minimization of the function, which contains a given set of points and angular coefficients of the polyline segments, using the linear programming methods.

In [9], the method of particle swarm optimization was used to construct a piecewise linear approximation of parametric curves.

The question of the best piecewise – linear approximation to the plane curve without inflection points  $y = f(x)$  with polyline nodes that do not lie on the curve, and examples of such approximation were considered in [10]. Optimal piecewise linear approximation of a function using GPU – based calculations applied to image segmentation problems was substantiated in [11]. In this work, error estimates when approximating a curve  $y = f(x)$  by interpolation and approximation algorithms are proposed, the question of the optimal curve partitioning for a given number of nodes is considered.

A numerical method to analyze and model planar shapes via polygonal curve evolutions is studied in [12, 13]. Consider a smooth curve each point of which moves in the normal direction with speed equal to a function of the curvature and curvature derivatives at the point. Chosen the speed function properly, the evolving curve converges to a desired shape.

Some theoretical results concerning estimate of the Hausdorff distance between the curve and the polyline based on the Sobolev space were considered in [14].

Algorithms for adaptive polyline interpolation of an ordered discrete set of points, allow to dilute the original set and obtain a polyline with fewer nodes. An overview of these methods is given in [15].

General algorithms for asymptotic optimal interpolation and approximation of curves by technological lines (including polylines) were considered in [1]. The characteristic of this approach is that it gives a polyline with the least number of nodes. Analyzing these studies, it is possible to identify unresolved issues, namely: substantiation of the number of points of preliminary sampling curve, choice of numerical integration method when calculating values of nodes regulator function, methods of its interpolation, etc.

### 3 MATERIALS AND METHODS

The approach to obtaining the nodes of the asymptotically optimal partition of the curve is to interpolate the values of the integral distribution function. The following algorithm can be proposed for this purpose.

Let's define a step of a uniform sampling  $h = \frac{T}{N}$  and then receive a set of curve points

$$P_i = \mathbf{p} \left( \frac{i}{N} \right), (i = 0, 1, \dots, N), \quad (8)$$

corresponding to a discrete sequence of curve parameter values  $\Delta_N^t \left\{ t_i = 0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, T \right\}$ .

To obtain the values of the nodes sequence  $\Delta_m^t = \left\{ t_{j,m}^* \right\} (j = 0, 1, \dots, m)$  for the asymptotically optimal partition of the curve by one of the known numerical integration methods we obtain a sequence of values of  $s_i = \Psi(t_i)$ ,  $t_i \in \Delta_N^t$ ,  $(i = 0, 1, \dots, N)$  function (6) at the nodes of the initial uniform grid  $\Delta_N^t$ . And, further, interpolate these values between the nodes, we find the value of the inverse function  $t_j = \Psi_{-1}(s_j)$  with a uniform already, according to the right part (5), the distribution of  $s_j$  values from 0 to  $s_N = \Psi(t_N)$ .

The number of polyline segments, according to (3), will take the form

$$m = \left\lceil \frac{s_N}{\sqrt{8\varepsilon}} \right\rceil + 1. \quad (9)$$

The  $s$ -values for uniform grid spacing  $\Delta_m^s \left\{ s_j, j = 0, 1, \dots, m \right\}$  is calculated by the expression

$$s_j = \frac{j s_N}{m}. \quad (10)$$

Let define the values of the curve parameter  $t_j^*$ , which form the asymptotically – optimal sequence of polyline nodes. The simplest approach is to construct a linear interpolation of the function  $s = \Psi(t)$  by the initial uniform grid values of  $t \in \Delta_N^t$ . Finding the intersection of the grid lines  $s = s_j$  and the graphics of  $\Psi(t)$  constructed on the grid  $\Delta_N^t$ , we obtain the corresponding values of the sequence from the following expression of the inverse dependence.

$$t_j^* = t_i + \frac{T(s_j - s_i)}{N(s_{i+1} - s_i)}. (s_i \leq s_j \leq s_{i+1}, t_i \in \Delta_N^t). \quad (11)$$

An alternative approach that can be proposed is interpolation of integral function  $\Psi(t)$  by a linear rational B-spline. The principles of this approach were considered in [16, 17]. This method provides  $C^1$  continuity at the interpolation nodes. In the proposed method each interpolation interval  $[t_i, t_{i+1}]$  corresponds to the LRBS curve with an open two-interval knot vector  $- [t_i, t_i, t_{i+1/2}, t_{i+1}, t_{i+1}]$ , where  $t_{i+1/2}$  – some internal parameter value within the interval. The value  $t_{i+1/2}$  can be determined by a coefficient  $\lambda_{i,i+1}$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ), then we define

$$t_{i+1/2} = (1 - \lambda_{i,i+1}) t_i + \lambda_{i,i+1} t_{i+1}.$$

The monotonic increasing linear rational functions that interpolate the function between the values  $s_i = \Psi(t_i)$  and  $s_{i+1} = \Psi(t_{i+1})$  at the ends of the interval will take the form:

– for  $t_i \leq t < t_{i+1/2}$  :

$$s_{i,i+1/2} = \frac{w_i s_i (t_{i+1/2} - t) + w_{i+1/2} s_{i+1/2} (t - t_i)}{w_i (t_{i+1/2} - t) + w_{i+1/2} (t - t_i)}, \quad (12)$$

– for  $t_{i+1/2} \leq t < t_{i+1}$  :

$$s_{i+1/2,i+1} = \frac{w_{i+1/2} s_{i+1/2} (t_{i+1} - t) + w_{i+1} s_{i+1} (t - t_{i+1/2})}{w_{i+1/2} (t_{i+1} - t) + w_{i+1} (t - t_{i+1/2})}.$$

Having the values of the interpolated function and its derivatives ( $s'_i, s'_{i+1}$ ) at the ends of the interval, the coefficients of the LRB – spline are defined according to the following steps:

– the value of one of the weights according to [16] can be taken arbitrarily – it will be a scale factor for other weights, we are free to choose any positive value for the first weight  $w_i$  ;

– then the last weight is obtained from the expression [16]:

$$w_{i+1} = \sqrt{\frac{s'_i}{s'_{i+1}}} w_i; \quad (13)$$

– the value of  $\lambda_{i,i+1}$  can be obtained according to [17] as following:

$$\lambda_{i,i+1} = \begin{cases} \frac{s'_i - (s'_i s'_{i+1})^{1/2}}{s'_i - s'_{i+1}}, & \text{при } s'_i \neq s'_{i+1}; \\ \frac{1}{2}, & \text{при } s'_i = s'_{i+1}; \end{cases} \quad (14)$$

– the value of the  $s_{i+1/2}$  at the internal point, will have meet the conditions of smoothness [16]:

$$s_{i+1/2} = \frac{(1 - \lambda_{i,i+1}) w_i s_i + \lambda_{i,i+1} w_{i+1} s_{i+1}}{(1 - \lambda_{i,i+1}) w_i + \lambda_{i,i+1} w_{i+1}}; \quad (15)$$

– the expression for the internal weight has the form:

$$w_{i+1/2} = \frac{t_{i+1} - t_i}{s_{i+1} - s_i} [(1 - \lambda_{i,i+1}) w_{i+1} s'_{i+1} + \lambda_{i,i+1} w_i s'_i]. \quad (16)$$

Solving the equations (12) with respect to  $t$ , we obtain:

– for  $s_i \leq s_j \leq s_{i+1/2}$  :

$$t_j^* = \frac{w_i t_{i+1/2} (s_j - s_i) + w_{i+1/2} t_i (s_{i+1/2} - s_j)}{w_i (s_j - s_i) + w_{i+1/2} (s_{i+1/2} - s_j)};$$

– for  $s_{i+1/2} \leq s_j \leq s_{i+1}$  :

$$t_j^* = \frac{w_{i+1/2} t_{i+1} (s_j - s_{i+1/2}) + w_{i+1} t_{i+1/2} (s_{i+1} - s_j)}{w_{i+1/2} (s_j - s_{i+1/2}) + w_{i+1} (s_{i+1} - s_j)}. \quad (17)$$

To estimate the modelling results and compare with the maximum approximation error bound, the equidistant method to the curve [1] can be used. The essence of this method is to construct internal and external equidistant to the reproducible curve. The method is to show constructed polyline together with the inner and outer equidistant to the curve.

The equidistant method provides the possibility of visual control over the behavior of the polyline relative to the limits of  $\varepsilon$  – permissible “tube” for the original curve. However, the significant disadvantages of this approach are the impossibility of quantitative estimation of the approximation error bounds, the difficulty of visual control for small errors and for a large number of polyline segments.

To eliminate the disadvantages of the equidistant method, we consider the possibility of evaluation based on quantitative characteristics of the quality of curve reconstruction. It is natural to choose as such a characteristic the maximum distance  $d_j^{\max}$  between the polyline segment  $l_j$  and the corresponding curve arc  $\Gamma_{t_{j-1}}^{t_j^*}$  and to compare it with the given approximation error bound. Having calculated these distances for the entire polyline, we obtained a sequence of error values  $\{d_{j,m}^{\max}\}$ , ( $j=1, \dots, m$ )

where  $d_j^{\max} = \max \{d(\Gamma_{t_{j-1}}^{t_j^*}, l_j)\}$ . This sequence can be represented graphically as a bar chart, where the horizontal axis represents the number of polyline segment,

and the vertical axis – the corresponding distance  $d_j^{\max}$  from the curve to the polyline. To simplify the comparison with the error limit and to be able to analyze the results obtained at different values of accuracy, we introduce the concept of relative error of the segment –  $\gamma_j$ , for which we take the ratio of the maximum distance of the polyline segment to the approximation error bound –  $\gamma_j = d_j^{\max} / \varepsilon$ . This means that the values of the relative error in the range from 0 to 1 satisfy the specified accuracy of the approximation, and values greater than one are beyond the error bound.

In the case of an interpolation polyline, the start and end points of its arbitrary segment lie on the curve and are defined by the values of the curve parameter  $t_{j-1}^*$  and  $t_j^*$ . Thus, the arc of the curve interpolated by the current segment is determined by the interval of the curve parameter –  $(t_{j-1}^*, t_j^*)$ .

Therefore, the distance between the  $j$ -th segment of the interpolation polyline and the point  $M(x_M(t), y_M(t))$  on the curve, is determined by the equation

$$d_j(t) = \left| \frac{A_j x_M + B_j y_M + C_j}{\sqrt{A_j^2 + B_j^2}} \right|, \quad (18)$$

where  $A_j = y_{j-1} - y_j$ ,  $B_j = x_j - x_{j-1}$ ,  $C_j = y_j x_{j-1} - x_j y_{j-1}$ .

To obtain the local extrema of function (18), we differentiate its right-hand side by  $t$  and, equaling it to zero, we have

$$A_j x'(t) + B_j y'(t) = 0. \quad (19)$$

Having obtained the roots of this equation, which is within the arc range of values, we choose the maximum from them –  $d_j^{\max}$ .

If the curve is composed of several elementary curve arcs, the nodal points of the interpolation polyline may belong to different components of the curves. This means that the distance between the curve and the polyline must be obtained among all the arcs of the curve that are within the interpolation interval of a segment. For example, in the case of B – spline based on an open knot vector  $T(t_i \in [0, T])$  we find the following values of the knot vector  $t_i \geq t_j$  (for  $t_{i-1} < t_j$ ) and  $t_{i-k} \geq t_{j-1}$  (for  $t_{i-k-1} < t_{j-1}$ ), which correspond to the  $j$ -th segment of the polyline. For each spline arc within the interval  $(t_i, t_{i-k-1})$  we find the distances according to the above algorithm –  $\{d_k^{\max}\}$ .

And, then choose the maximum of them –  $d_j^{\max} = \max\{d_k^{\max}\}$ .

#### 4 EXPERIMENTS

Experiments for reconstruction of curves by an asymptotically optimal interpolation algorithm aimed to investigate the influence of algorithm parameters and methods on the quality of reconstruction results. Such influencing factors include: the number of the initial uniform sampling nodes for the integral function –  $N$ , the

error in calculating the values of the function  $\Psi - \delta^{\Psi}$ , the interpolation method of this function.

Two plane convex curve (closed and open) were chosen to the reproduction modelling. The first (Fig. 1) is a Bezier curve of the sixth order with the coordinates of the control polygon (0.0; 0.0), (0.55; 6.9), (11.8; 9.2), (16.5; 6.25), (22.0; 3.2), 24.5; 0.0), (18.0; -1.0). The second (Fig. 2) is called the Pascal snail and has the following parameters: radius of the base circle – 2.5, offset – 14. Both curves do not contain inflection points.

In this work, we will focus on the study of the influence on the results of reconstruction the initial sampling of the function (6) –  $N$  at a constant integration error  $\delta^{\Psi}$ . The interpolation of the obtained values will be implemented according to the linear algorithm – formula (11) and using LRB-spline – formula (17). This will allow to compare the results of the approximation and define the sufficient value of the parameter  $N$ .

In [1], the following simple dependence was used to define the value of  $N$

$$N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1, \quad (20)$$

which considers only the reconstruction error bound and does not depend on the properties of the curve itself. In addition, this expression does not take in account how the values of the integral function are interpolated at the intervals between the sampling nodes. For the further comparison, we give a set of approximation error bounds and the corresponding the number of sampling nodes, which are calculated by (20) and summarized in Table 1.

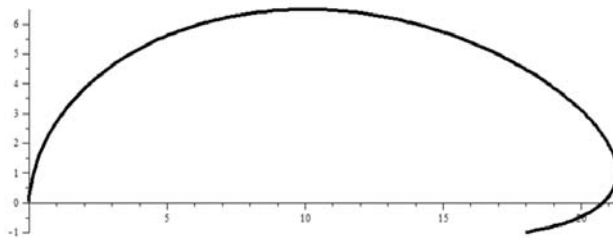


Figure 1 – Bezier curve reconstructed by polylines

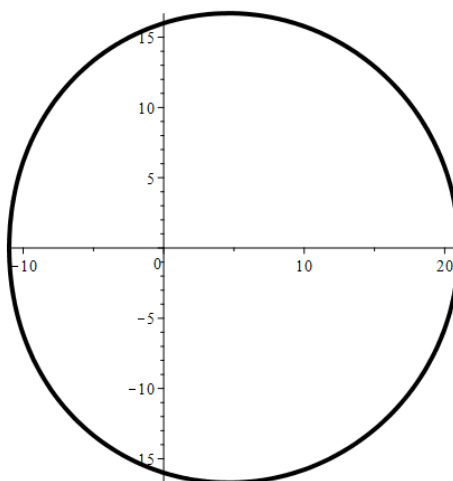


Figure 2 – Pascal's snail reconstructed by polylines

Table 1 – The value of the number of sampling nodes obtained by the expression (23)

Error bound – $\varepsilon$	0.0001	0.001	0.005	0.0075	0.01	0.025	0.05	0.1
Number of nodes for the initial sampling – $N$	10001	1001	201	134	101	41	21	11

For the linear method of interpolation, we take as a basis the estimate of the error and starting from it we will define the number of sampling points and fix its impact on the distribution of reconstruction errors. According to [17], the estimate of the maximum error of linear interpolation on a segment  $[t_{i-1}, t_i]$  has the form

$$\delta_i = \max_{[t_{i-1}, t_i]} |f(t) - L_1(t)| \leq h^2 \frac{M_{2,i}}{8}, \quad (21)$$

where  $M_{2,i} = \max_{[t_{i-1}, t_i]} |f''(t)|$ .

Given that we have a constant sampling step  $h = \frac{T}{N}$  and extending the estimate to all intervals  $M_2 = \max_T |f''(t)|$  we find

$$N \geq T \sqrt{\frac{M_2}{8\delta}}. \quad (22)$$

For certainty, we define

$$N = \left\lceil T \sqrt{\frac{M_2}{8\delta}} \right\rceil + 1. \quad (23)$$

As follows from (23), linear interpolation has the convergence order  $O(h^2)$ , and the error bound of linear rational interpolation was estimated in [18] as  $O(h^3)$ , i.e., as a case of quadratic interpolation. The estimate of quadratic interpolation has the form

$$\delta_i = \max_{[t_{i-1}, t_i]} |f(t) - L_2(t)| \leq \frac{\sqrt{3}h^3}{27} M_{3,i}, \quad (24)$$

where  $M_{3,i} = \max_{[t_{i-1}, t_i]} |f'''(t)|$ .

Based on this estimate, by analogy with linear interpolation, we will have

$$N = \left\lceil \frac{T\sqrt[6]{3}}{3} \sqrt[3]{\frac{M_3}{\delta}} \right\rceil + 1. \quad (25)$$

We begin the choosing of the  $\delta$  value with the estimate  $\delta = \varepsilon$ , and further, we will reduce this value by division on  $2^k$  (for linear interpolation case) and  $3^k$  (for LRBS case). For calculating the values of the integral function  $\Psi_i$ , we

use Clenshaw-Curtis quadrature with a constant value of the integration error  $\delta^\Psi = 0.5 \cdot 10^{-10}$ . To explain the reconstruction results, we will compare the bar charts of error distributions at different values of  $\delta$ , shown on the same scale factor – Fig. 3–6.

For the analysis of modeling data, it is more convenient to present results in the form of statistical characteristics of errors distributions obtained for sequences of poly-line segments. These characteristics are: maximum and minimum values of the errors sequence –  $\gamma_{\max}, \gamma_{\min}$ , mean –  $\bar{\theta}$ , median, the range of errors for the sequence of segments –  $\Delta$ , standard deviation –  $\sigma$ . The characteristics are presented in tables that correspond to the approximations of the curve having a given error bound and the same number of polyline segments. The results are obtained for different number of the integral function sampling nodes.

## 5 RESULTS

Tables 2–5 show the values of the error distribution characteristics for the curves (Fig. 1, 2) using a linear interpolation of the integral function (6) by expressions (11). From the presented results it follows that at values  $\delta = \varepsilon / 64 \dots \varepsilon / 256$  the segments errors are stabilized being within the range of admissible values close to its upper limit – 0.9... 0.98. The comparison of the sample variances for the cases  $\varepsilon / 128, \varepsilon / 256$  and  $\varepsilon^2$  according to the Cochren test with a confidence level of 0.95 did not show statistical significance. Therefore, a further increasing the number of sampling nodes did not have a significant effect on the approximation results.

Further, we will consider the effect of the integral function interpolation by LRB-spline and compare them with the results already obtained by linear interpolation.

In LRBS case, we will start to change the  $\delta$ -value in (25) from the estimate  $\delta = 3\varepsilon$ . Tables 6–9 show the results for the interpolation of the integral function by a linear rational B-spline under similar conditions to the linear method. The relative approximation error according to these tables was stabilized at values of  $\delta = \varepsilon / 81 \dots \varepsilon / 243$  at values close to those observed with the linear method. Comparison of sample variances by the Cochren's test starting from  $\delta = \varepsilon / 9 \dots \varepsilon / 27$  did not show statistical significance. If we also compare the results of the corresponding tables for the linear and LRBS interpolation of the integral function, it becomes clear that to achieve the same results of approximation by the spline method required 5–6 times fewer sampling nodes than by the linear method.

Table 2 – The results of the reconstruction for the curve – Fig. 1 and  $\varepsilon = 0.001$   
 (number of polyline segments  $m = 122$ )

Statistical characteristic	The interpolation error of the integral function, $\delta$									
	$\varepsilon$	$\varepsilon/2$	$\varepsilon/4$	$\varepsilon/8$	$\varepsilon/16$	$\varepsilon/32$	$\varepsilon/64$	$\varepsilon/128$	$\varepsilon/256$	$\varepsilon^2$
$\gamma_{\max}$	0.989389	0.98049	0.974665	0.972353	0.972083	0.971481	0.971236	0.971281	0.97122	0.9712
$\gamma_{\min}$	0.953614	0.961996	0.967626	0.969393	0.969849	0.970404	0.970604	0.97069	0.970703	0.970723
$\Delta$	0.035775	0.018494	0.007039	0.002959	0.002234	0.001077	0.000632	0.000591	0.000516	0.00047
$\bar{\theta}$	0.970928	0.970915	0.970912	0.970915	0.970911	0.970911	0.970911	0.970909	0.970912	0.97091
	0.970446	0.970743	0.97083	0.970909	0.970871	0.970897	0.9709	0.970899	0.970911	0.97091
$\sigma$	0.007305	0.00322	0.001057	0.000627	0.000401	0.000196	0.000141	0.000108	0.000101	$9.72 \cdot 10^{-5}$
$N$	73	102	144	203	287	405	572	808	1143	2257

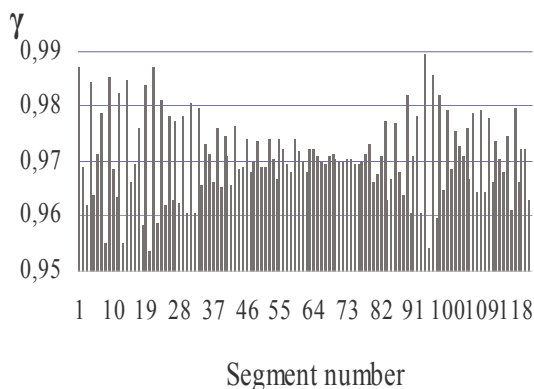


Figure 3 – Errors distributions for the reconstruction of the curve – Fig. 1 (given error bound  $\varepsilon = 0.001$  and  $\delta = \varepsilon$ )

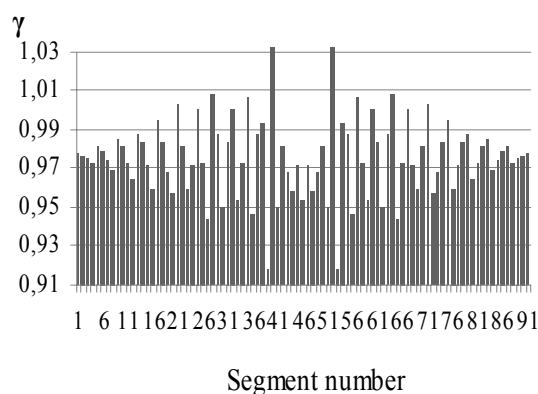


Figure 5 – Errors distributions for the reconstruction of the curve – Fig. 2 (given error bound  $\varepsilon = 0.01$  and  $\delta = \varepsilon$ )

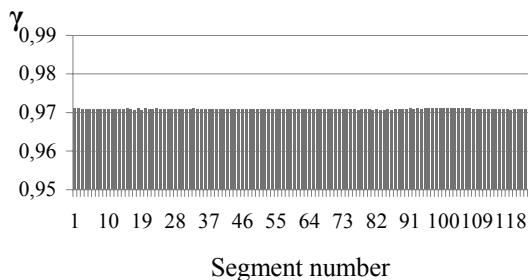


Figure 4 – Errors distributions for the reconstruction of the curve – Fig. 1 (given error bound  $\varepsilon = 0.001$  and  $\delta = \varepsilon/64$ )

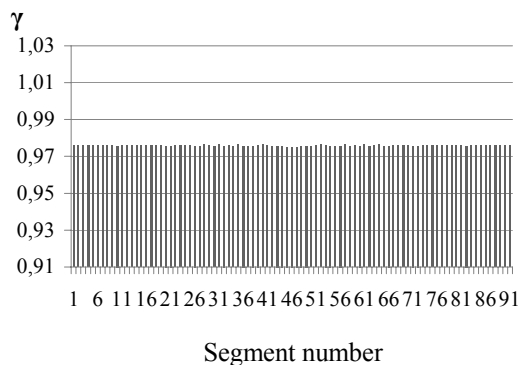


Figure 6 – Errors distributions for the reconstruction of the curve – Fig. 2 (given error bound  $\varepsilon = 0.01$  and  $\delta = \varepsilon/64$ )

Table 3 – The results of the reconstruction for the curve – Fig. 1 and  $\varepsilon = 0.01$   
 (number of polyline segments  $m = 40$ )

Statistical characteristic	The interpolation error of the integral function, $\delta$									
	$\varepsilon$	$\varepsilon/2$	$\varepsilon/4$	$\varepsilon/8$	$\varepsilon/16$	$\varepsilon/32$	$\varepsilon/64$	$\varepsilon/128$	$\varepsilon/256$	$\varepsilon^2$
$\gamma_{\max}$	0.957806	0.934061	0.914664	0.908149	0.90704	0.905889	0.905787	0.905455	0.905296	0.905335
$\gamma_{\min}$	0.852996	0.876438	0.894885	0.897718	0.899909	0.901159	0.901194	0.901487	0.901521	0.901572
$\Delta$	0.10481	0.057623	0.019779	0.010431	0.00713	0.004729	0.004592	0.003968	0.003775	0.003763
$\bar{\theta}$	0.903137	0.903025	0.902994	0.902989	0.902987	0.902986	0.902987	0.902987	0.902986	0.902986
median	0.900533	0.900686	0.901924	0.902694	0.902683	0.902828	0.902873	0.902906	0.902914	0.902931
$\sigma$	0.022944	0.011551	0.004583	0.002402	0.001687	0.00108	0.001008	0.000904	0.000875	0.000853
$N$	24	33	47	65	92	129	182	257	362	639



Table 4 – The results of the reconstruction for the curve – Fig. 2 and  $\varepsilon = 0.001$   
 (number of polyline segments  $m = 286$ )

Statistical characteristic	The interpolation error of the integral function, $\delta$									
	$\varepsilon$	$\varepsilon/2$	$\varepsilon/4$	$\varepsilon/8$	$\varepsilon/16$	$\varepsilon/32$	$\varepsilon/64$	$\varepsilon/128$	$\varepsilon/256$	$\varepsilon^2$
$\gamma_{\max}$	1.00654	0.99826	0.99214	0.98935	0.98913	0.98854	0.98828	0.98822	0.98821	0.98821
$\gamma_{\min}$	0.9693	0.97773	0.98395	0.98678	0.98681	0.98743	0.98768	0.98769	0.98773	0.98774
$\Delta$	0.03724	0.02053	0.00819	0.00257	0.00232	0.00111	0.0006	0.00053	0.00048	0.00047
$\bar{\theta}$	0.98798	0.987977	0.98797	0.987955	0.98797	0.987969	0.987963	0.987971	0.987967	0.987966
median	0.98799	0.98798	0.987935	0.98798	0.98798	0.98796	0.98796	0.98796	0.98797	0.98797
$\sigma$	0.006474	0.003764	0.001683	0.00052	0.00035	0.000216	0.000121	$8.56 \cdot 10^{-5}$	$7.47 \cdot 10^{-5}$	$6.96 \cdot 10^{-5}$
$N$	87	122	172	243	343	484	684	966	1366	7627

Table 5 – The results of the reconstruction for the curve – Fig. 2 and  $\varepsilon = 0.01$   
 (number of polyline segments  $m = 91$ )

Найменування показника	The interpolation error of the integral function, $\delta$									
	$\varepsilon$	$\varepsilon/2$	$\varepsilon/4$	$\varepsilon/8$	$\varepsilon/16$	$\varepsilon/32$	$\varepsilon/64$	$\varepsilon/128$	$\varepsilon/256$	$\varepsilon^2$
$\gamma_{\max}$	1.031872	0.999084	0.988514	0.979086	0.978574	0.977092	0.976432	0.976231	0.975974	0.975947
$\gamma_{\min}$	0.918589	0.953424	0.964541	0.971311	0.972784	0.974536	0.975064	0.975238	0.975292	0.975361
$\Delta$	0.113283	0.04566	0.023973	0.007775	0.00579	0.002556	0.001368	0.000993	0.000682	0.000586
$\bar{\theta}$	0.975881	0.975812	0.975791	0.975784	0.975784	0.975783	0.975783	0.975783	0.975783	0.975783
median	0.975494	0.975934	0.975165	0.976036	0.975893	0.97578	0.975793	0.975794	0.975787	0.975783
$\sigma$	0.019654	0.010643	0.005374	0.001766	0.001046	0.00058	0.000264	0.000185	0.000101	$9 \cdot 10^{-5}$
$N$	28	40	55	78	109	154	217	307	433	764

Table 6 – The results of the reconstruction for the curve – Fig. 1 and  $\varepsilon = 0.001$   
 (number of polyline segments  $m = 122$ )

Statistical characteristic	The interpolation error of the integral function, $\delta$							
	$3\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon/3$	$\varepsilon/9$	$\varepsilon/27$	$\varepsilon/81$	$\varepsilon/243$	$\varepsilon^3$
$\gamma_{\max}$	0.973099	0.972094	0.971562	0.971373	0.9713	0.971228	0.971232	0.971195
$\gamma_{\min}$	0.967027	0.969814	0.97064	0.970705	0.970726	0.970728	0.970705	0.970729
$\Delta$	0.006072	0.00228	0.000922	0.000667	0.000574	0.000501	0.000527	0.000466
$\bar{\theta}$	0.97091	0.970914	0.970913	0.970914	0.970912	0.970914	0.970914	0.970911
median	0.970872	0.970909	0.970898	0.970908	0.97091	0.970909	0.970909	0.970908
$\sigma$	0.000701	0.000306	0.000148	0.000109	0.000102	0.0001	$9.83E-05$	$9.52 \cdot 10^{-5}$
$N$	28	40	57	81	116	167	240	3817

Table 7 – The results of the reconstruction for the curve – Fig. 1 and  $\varepsilon = 0.01$   
 (number of polyline segments  $m = 40$ )

Statistical characteristic	The interpolation error of the integral function, $\delta$							
	$3\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon/3$	$\varepsilon/9$	$\varepsilon/27$	$\varepsilon/81$	$\varepsilon/243$	$\varepsilon^3$
$\gamma_{\max}$	0.911873	0.908855	0.906987	0.90518	0.905401052	0.905290953	0.905338795	0.905324594
$\gamma_{\min}$	0.898304	0.900459	0.901631	0.901539	0.901569423	0.901586084	0.901585175	0.901584787
$\Delta$	0.013569	0.008397	0.005356	0.003642	0.003831629	0.003704868	0.003753621	0.003739807
$\bar{\theta}$	0.902988	0.902987	0.902986	0.902986	0.902986498	0.902986386	0.902986403	0.902986184
median	0.902984	0.902739	0.902931	0.90293	0.902928449	0.902927493	0.902928085	0.90292768
$\sigma$	0.002580	0.00162	0.001009	0.000847	0.00084955	0.000845842	0.000845356	0.000845317
$N$	14	19	27	38	55	78	112	383

Table 8 – The results of the reconstruction for the curve – Fig. 2 and  $\varepsilon = 0.001$   
 (number of polyline segments  $m = 286$ )

Statistical characteristic	The interpolation error of the integral function, $\delta$							
	$3\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon/3$	$\varepsilon/9$	$\varepsilon/27$	$\varepsilon/81$	$\varepsilon/243$	$\varepsilon^3$
$\gamma_{\max}$	0.9911	0.98927	0.98829	0.98823	0.98822	0.98823	0.98823	0.98823
$\gamma_{\min}$	0.98623	0.98716	0.9876	0.98773	0.98772	0.98772	0.98772	0.98772
$\Delta$	0.00487	0.00211	0.00069	0.0005	0.0005	0.00051	0.00051	0.00051
$\bar{\theta}$	0.98797011	0.987963007	0.98797035	0.98796374	0.987962657	0.98796965	0.987970105	0.987969231
median	0.988075	0.98801	0.98799	0.98797	0.98797	0.98797	0.98797	0.98797
$\sigma$	0.000535	0.000254	0.000113	$8.0278 \cdot 10^{-5}$	$7.86862 \cdot 10^{-5}$	$7.74136 \cdot 10^{-5}$	$7.21426 \cdot 10^{-5}$	$6.92676 \cdot 10^{-5}$
$N$	28	40	57	82	118	169	243	3872

Table 9 – The results of the reconstruction for the curve – Fig. 2 and  $\varepsilon = 0.01$   
 (number of polyline segments  $m = 91$ )

Statistical characteristic	The interpolation error of the integral function, $\delta$							
	$3\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon/3$	$\varepsilon/9$	$\varepsilon/27$	$\varepsilon/81$	$\varepsilon/243$	$\varepsilon^3$
$\gamma_{\max}$	0.984439	0.980645	0.977005	0.976055	0.975935	0.975909	0.975911	0.975908
$\gamma_{\min}$	0.968286	0.972696	0.973873	0.975333	0.975368	0.975312	0.975367	0.975367
$\Delta$	0.016153	0.007949	0.003132	0.000722	0.000567	0.000597	0.000544	0.000541
$\bar{\theta}$	0,975784121	0.975783604	0.975782813	0.975783154	0.975783374	0.975782956	0.975783121	0.975782791
median	0.976166	0.976035	0.975893	0.97582	0.975794	0.975785	0.975783	0.975781
$\sigma$	0.002169927	0.001081117	0.00042438	0.000149687	$9.17794 \cdot 10^{-5}$	$8.61524 \cdot 10^{-5}$	$8.52029 \cdot 10^{-5}$	$8.50578 \cdot 10^{-5}$
$N$	14	19	27	39	55	79	114	389

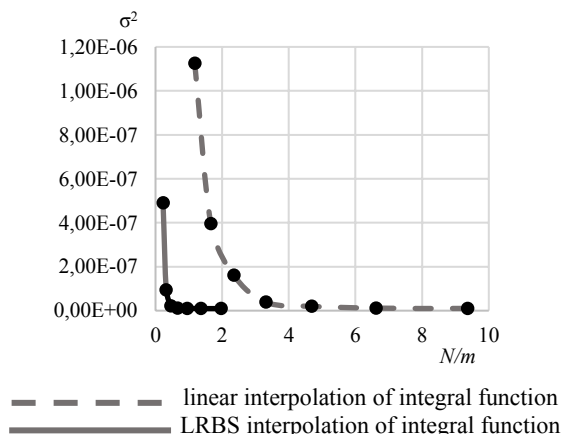


Figure 7 – Dependencies of sample variance on the ratio of the number of function sampling nodes  $N$  to the number of approximation polyline segments  $m$  for reconstructing the curve – Fig. 1 with tolerance  $\varepsilon=0.001$

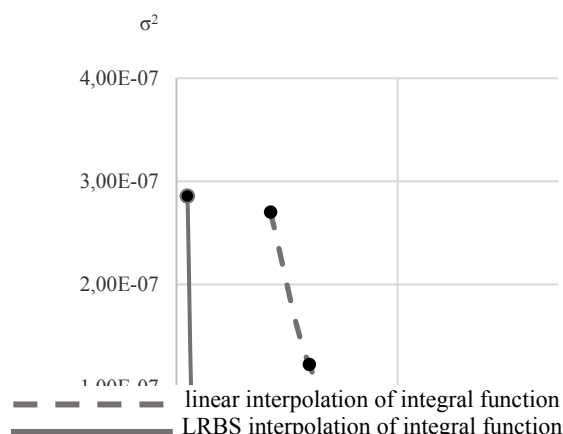


Figure 9 – Dependencies of sample variance on the ratio of the number of function sampling nodes  $N$  to the number of approximation polyline segments  $m$  for reconstructing the curve – Fig. 2 with tolerance  $\varepsilon=0.001$

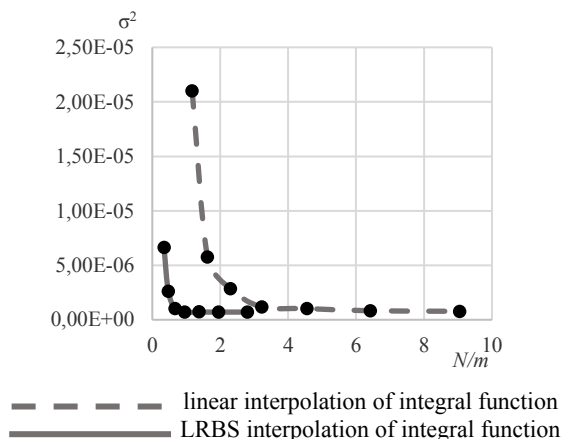


Figure 8 – Dependencies of sample variance on the ratio of the number of function sampling nodes  $N$  to the number of approximation polyline segments  $m$  for reconstructing the curve – Fig. 1 with tolerance  $\varepsilon=0.01$

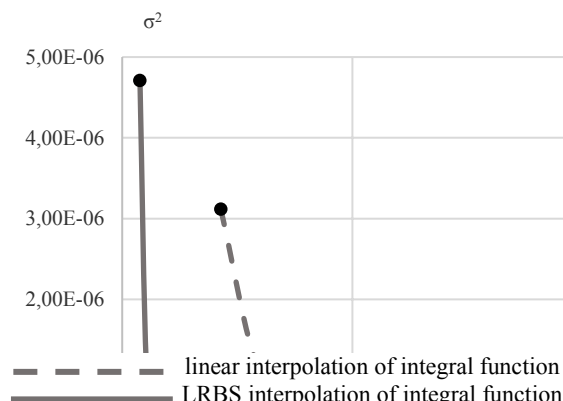


Figure 10 – Dependencies of sample variance on the ratio of the number of function sampling nodes  $N$  to the number of approximation polyline segments  $m$  for reconstructing the curve – Fig. 2 with tolerance  $\varepsilon=0.01$

## 6 DISCUSSION

In more detail to see the difference between the two interpolation methods of the integral function (linear and LRBS), we compare the dependence of  $\sigma^2$  on a number of sampling nodes. To reduce the effect of a given approximation error  $\varepsilon$ , we will determine the dependence on the

ratio of the number  $N$  of sampling points to the number of approximation segments  $m$ . On Fig. 7–10 we present these dependencies. It follows from these graphics that the rate of variance decreases when the nodes number ratio increasing was different for linear and for LRBS interpolations. This is confirmed by the fact that the approximation errors for LRBS interpolation were stabilized at the ratio up to  $1 \div 2 N/m$  (for the linear method at the ratio  $5 \div 7 N/m$ ).

Comparison of sampling node numbers for expressions (20) and (24), (25) shows that formula (20) can give both increased and decreased number of sampling points relative to the stabilization values (see Tables 2–9).

The experiments also showed the suitability of the models for the reconstruction of real parametric curves. The approximation error of polyline was stabilized at the level 90–98 percent of the error bound. This indicates that the asymptotically optimal algorithm provides an error close to the upper limit of the error bound and the smallest number of the polyline segments.

### CONCLUSIONS

The simulation of the reconstruction of convex plane parametric curves by an asymptotically optimal linear interpolation algorithm showed quite acceptable results without exceeding the approximation error bound in cases of a sufficient number of integral function sampling nodes.

The **scientific novelty** of obtained results is to identify the influence of increasing the number of the initial sampling of the integral function – the regulator on the quality of curves reconstruction. The effect is to improve the characteristics of approximation error distribution for the polyline segments sequence, namely, to reduce the variation of the error series, which corresponds to the stabilization of the error values around the mean value. Experimentally, it was confirmed that the increase in the number of integral function sampling nodes is bounded by the values of stabilization, after which the differences between the variances are not statistically significant. For the first time in the asymptotically optimal algorithm, LRBS interpolation of the integral function was used, which allows to significantly reduce (by  $5 \div 6$  times) the number of sampling nodes and related calculations.

The **practical significance** of the work is to clarify and refine the parameters of the asymptotically optimal interpolation algorithm, which affects the results of curve reconstruction.

### ACKNOWLEDGEMENTS

The work is supported by the state budget scientific research project of Simon Kuznets Kharkiv National University of Economic. The title of the project is “Modern methods and tools of analysis and development of information systems” (state registration number 0118U007183).

### REFERENCES

1. Ligun A. A., Shumeiko A. A., Radzevitch S. P., Goodman E. D. Asymptotically optimal disposition of tangent points for approximation of smooth convex surfaces by polygonal functions, *Computer Aided Geometric Design*, 1997, Vol. 14, pp. 533–546. DOI: 10.1016/S0167-8396(96)00044-1.
2. de Figueiredo L. H. Adaptive sampling of parametric curves, *Graphics Gems V*, 1995, pp. 173–178. DOI: 10.1016/B978-0-12-543457-7.50032-2.
3. Pagani L., Scott P. J. Curvature based sampling of curves and surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, 2018, Vol. 59, pp. 32–48. DOI: 10.1016/j.cagd.2017.11.004.
4. Hernández-Mederos V., Estrada-Sarlabous J. Sampling points on regular parametric curves with control of their distribution, *Computer Aided Geometric Design*, 2003, Vol. 20, Issue 6, pp. 363–382. DOI: 10.1016/S0167-8396(03)00079-7.
5. Zhong W., Luo X., Chang W. et al. A real-time interpolator for parametric curves, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2018, Vol. 125, pp. 133–145, DOI: 10.1016/j.ijmactools.2017.11.010.
6. Bo P., Bartoň M., Pottmann H. Automatic fitting of conical envelopes to free-form surfaces for flank CNC machining, *Computer-Aided Design*, 2017, Vol. 91, pp. 84–94. DOI: 10.1016/j.cad.2017.06.006.
7. Song Y., Yang Zh., Liu Y., Deng J. Function representation based slicer for 3D printing, *Computer Aided Geometric Design*, 2018, Vol. 62, pp. 276–293. DOI: 10.1016/j.cagd.2018.03.012.
8. Ohrhallinger S., Wimmer M. StretchDenoise: parametric curve reconstruction with guarantees by separating connectivity from residual uncertainty of samples, *Proceedings of the 26th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications*, 2018, pp. 1–4. DOI: 10.2312/pg.20181266.
9. Cleghorn C. W., Engelbrecht A. P. Piecewise linear approximation of  $n$ -dimensional parametric curves using particle swarms, *Swarm Intelligence. ANTS 2012. Lecture Notes in Computer Science*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012, Vol. 7461, pp. 292–299. DOI: 10.1007/978-3-642-32650-9\_30.
10. Ugaz C., Han L., Lim A. Knot locating in piecewise linear approximation [Electronic resource], *arXiv preprint, arXiv 1909.03112*, 2019, 13 p. Access mode: <https://arxiv.org/abs/1909.03112>
11. Berjón D., Gallego G., Cuevas C. et al. Optimal piecewise linear function approximation for GPU-based applications, *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, Vol. 46 (11), pp. 2584–2595. DOI: 10.1109/TCYB.2015.2482365.
12. Belyaev A. G., Anoshkina E. V., Yoshizawa S., Yano M. Polygonal curve evolutions for planar shape modeling and analysis, *International Journal of Shape Modeling*, 1999, Vol. 05, No. 02, pp. 195–217. DOI: 10.1142/S0218654399000174.
13. Langer T., Belyaev A. G., Seidel H.-P. Asymptotic analysis of discrete normals and curvatures of polylines, *SCCG '05: Proceedings of the 21st Spring Conference on Computer Graphics*, 2005, pp. 229–232. DOI: 10.1145/1090122.1090160.
14. Gournay F., Kahn J., Lebrat L. Approximation of curves with piecewise constant or piecewise linear functions [Electronic resource], *HAL Id hal-02284549*, 2019, 17 p. Access mode: <https://arxiv.org/pdf/1909.04582.pdf>
15. Han Y., Samet H. LiMITS: An effective approach for trajectory simplification [Electronic resource], *arXiv pre-print*,

- arXiv:2010.08622v1*, 2020, 13 p. Access mode: <https://arxiv.org/abs/2010.08622v1>
16. Fuhr R. D., Kallay M. Monotone linear rational spline interpolation, *Computer Aided Geometric Design*. 1992, Vol. 9, Issue 4, pp. 313–319. DOI:10.1016/0167-8396(92)90038-Q.
17. Epperson J. F. An introduction to numerical methods and analysis. New Jersey, Wiley, 2013, 615 p.
18. Oja P. Low degree rational spline interpolation, *BIT Numerical Mathematics*, 1997, Vol. 37, Issue 4, pp. 901–909. DOI: 10.1007/BF02510359.

Received 15.06.2021.  
Accepted 19.08.2021.

УДК 512.2:004.94

## МОДЕЛЮВАННЯ АСИМПТОТИЧНО-ОПТИМАЛЬНОЇ КУСКОВО-ЛІНІЙНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ПЛОСКИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ КРИВИХ

**Фролов О. В.** – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри інформаційних систем Харківського національного технічного університету ім. С. Кузнеця, Харків, Україна.

**Лосєв М. Ю.** – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри інформаційних систем Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця, Харків, Україна.

### АНОТАЦІЯ

**Актуальність.** Апроксимація кривих ламаними привертає увагу з метою її застосування до відтворення об'єктів складної форми на комп'ютері, верстатах з ЧПК та 3D принтерах. При цьому бажано мати найменшу кількість ланок ламаної, що замінює криву, зі збереженням необхідної точності відтворення.

**Мета.** Вдосконалення методу асимптотично оптимальної кусково-лінійної інтерполяції плоских параметричних кривих на основі дослідження впливу його параметрів та алгоритмів на розподіли похибок апроксимації реальних кривих ліній.

**Метод.** В роботі розглядається асимптотично-оптимальна інтерполяція плоских кривих, які задовольняють умові мінімальності кількості ланок апроксимації. Було запропоновано алгоритми отримання значень послідовності вузлів апроксимації на основі чисельного інтегрування функції – регулятора з подальшою лінійною та сплайновою інтерполяцією її значень. Обґрунтовано методику оцінки результатів моделювання апроксимації реальних кривих, що базується на статистичній обробці рядів відносних похибок ланок ламаної. Проведено моделювання апроксимації реальних кривих та досліджено вплив на показники розподілу похибок кількісної характеристики ступеню дискретизації інтегральної функції – регулятора вузлів в залежності від методу інтерполяції значень інтегральної функції.

**Результати.** Проведені дослідження дозволили виявити вплив первісної дискретизації інтегральної функції – регулятора вузлів на якість відтворення кривих ламаними за асимптотично оптимальним алгоритмом та можливості визначення раціонального ступеню дискретизації при практичних розрахунках для відтворення виробів складної форми. Встановлено, що при достатній кількості точок дискретизації дисперсія розподілу похибок апроксимації стабілізується і збільшення цієї кількості на порядок не значно підвищує точність відтворення кривої. При цьому сплайнова інтерполяція значень інтегральної функції давала значно більшу швидкість стабілізації значень параметрів розподілів, що дозволяє знизити кількість вузлів первісної дискретизації у 5–6 разів маючи аналогічні показники точності апроксимації.

**Висновки.** Відтворення реальних плоских параметричних кривих опуклої форми ламаними за асимптотично-оптимальним алгоритмом інтерполяції показало цілком прийнятні результати без перевищення допустимої похибки апроксимації у випадках достатнього ступеню дискретизації значень інтегральної функції. Напрямами подальших досліджень може бути дослідження можливості спрощення розрахунків при обчисленні значень інтегральної функції розподілу чисельними методами, а також можливості використання дискретних аналогів похідних у виразі цієї функції.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** інтерполяція, ламана, еквідистанта, інтегрування, плоска параметрична крива, похибка.

УДК 512.2:004.94

## МОДЕЛИРОВАНИЕ АСИМПТОТИЧНО-ОПТИМАЛЬНОЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПЛОСКИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРИВЫХ

**Фролов О. В.** – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры Информационных систем Харьковского национального экономического университета им. С. Кузнеця, Харьков, Украина.

**Лосев М. Ю.** – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры информационных систем Харьковского национального экономического университета имени Семена Кузнеця, Харьков, Украина.

### АННОТАЦИЯ

**Актуальность.** Аппроксимация кривых ломаными привлекает внимание с целью ее применения к восстановлению объектов сложной формы на компьютере, станках с ЧПУ и 3D принтерах. При этом желательно иметь наименьшее количество звеньев ломаной, заменяющей кривую, с сохранением необходимой точности аппроксимации.

**Цель.** Совершенствование метода асимптотически оптимальной кусочно-линейной интерполяции плоских параметрических кривых на основе исследования влияния его параметров и алгоритмов на распределения погрешностей при аппроксимации реальных кривых линий.

**Метод.** В работе рассматривается асимптотично-оптимальная интерполяция плоских кривых, удовлетворяющих условию минимальности количества звеньев аппроксимации. Было предложены алгоритмы получения значений последовательности узлов аппроксимации на основе численного интегрирования функции – регулятора с последующей линейной и сплайновой интерполяции ее значений. Обоснована методика оценки результатов моделирования аппроксимации реальных кривых, основанный на статистической обработке последовательностей относительных погрешностей звеньев ломаной. Проведено

моделирование аппроксимации реальных кривых и исследовано влияние на показатели распределения погрешностей количественной характеристики степени дискретизации интегральной функции – регулятора узлов в зависимости от метода интерполяции значений интегральной функции.

**Результаты.** Проведенные исследования позволили выявить влияние первоначальной дискретизации интегральной функции – регулятора узлов на качество восстановления кривых ломаными и возможности определения рациональной степени дискретизации при практических расчетах для воспроизведения изделий сложной формы. Установлено, что при достаточном количестве точек дискретизации дисперсия распределения погрешностей аппроксимации стабилизируется и увеличение этого количества на порядок незначительно повышает точность воспроизведения кривой. При этом сплайновая интерполяция значений интегральной функции давала значительно большую скорость стабилизации значений параметров распределений, что позволяет снизить количество узлов первоначальной дискретизации в 5–6 раз имея аналогичные показатели точности аппроксимации.

**Выводы.** Восстановление реальных плоских параметрических кривых выпуклой формы ломаными при помощи асимптотически-оптимального алгоритма интерполяции показало вполне приемлемые результаты без превышения допустимой погрешности аппроксимации в случаях достаточной степени дискретизации значений интегральной функции. Направлениями дальнейших исследований может служить исследование возможности упрощения расчетов при вычислении значений интегральной функции распределения численными методами, а также возможности использования дискретных аналогов производных в выражении этой функции.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** интерполяция, ломаная, эквидистанта, интегрирования, плоская параметрическая кривая, погрешность.

#### ЛИТЕРАТУРА / LITERATURA

1. Asymptotically optimal disposition of tan-gent points for approximation of smooth convex surfaces by polygonal functions/ [A. A. Ligun, A. A. Shumeiko, S. P. Radzevitch, E. D. Goodman] // *Computer Aided Geometric Design*. – 1997. – Vol. 14. – P. 533–546. DOI: 10.1016/S0167-8396(96)00044-1.
2. de Figueiredo L. H. Adaptive sampling of parametric curves / L. H. de Figueiredo // *Graphics Gems V*. – 1995. – P. 173–178. DOI: 10.1016/B978-0-12-543457-7.50032-2.
3. Pagani L. Curvature based sampling of curves and surfaces / L. Pagani, P. J. Scott // *Computer Aided Geometric Design*. – 2018. – Vol. 59. – P. 32–48. DOI: 10.1016/j.cagd.2017.11.004.
4. Hernández-Mederos V. Sampling points on regular parametric curves with control of their distribution / V. Hernández-Mederos, J. Estrada-Sarlabous // *Computer Aided Geometric Design*. – 2003. – Vol. 20, Issue 6. – P. 363–382. DOI: 10.1016/S0167-8396(03)00079-7.
5. A real-time interpolator for parametric curves / [W. Zhong, X. Luo, W. Chang et al.] // *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. – 2018. – Vol. 125. – P. 133–145. DOI: 10.1016/j.ijmactools.2017.11.010.
6. Bo P. Automatic fitting of conical envelopes to free-form surfaces for flank CNC machining / P. Bo, M. Bartoň, H. Pottmann // *Computer-Aided Design*. – 2017. – Vol. 91. – P. 84–94. DOI: 10.1016/j.cad.2017.06.006.
7. Function representation based slicer for 3D printing / [Y. Song, Zh. Yang, Y. Liu, J. Deng] // *Computer Aided Geometric Design*. – 2018. – Vol. 62. – P. 276–293. DOI: 10.1016/j.cagd.2018.03.012.
8. Ohrhallinger S. StretchDenoise: parametric curve reconstruction with guarantees by separating connectivity from residual uncertainty of samples / S. Ohrhallinger, M. Wimmer // *Proceedings of the 26th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications*. – 2018. – P. 1–4. DOI: 10.2312/pg.20181266.
9. Cleghorn C. W. Piecewise linear approximation of n-dimensional parametric curves using particle swarms / C. W. Cleghorn, A. P. Engelbrecht // *Swarm Intelligence*. ANTS 2012. *Lecture Notes in Computer Science*. – Springer, Berlin, Heidelberg. – 2012. – Vol. 7461. – P. 292–299. DOI: 10.1007/978-3-642-32650-9\_30.
10. Knot locating in piecewise linear approximation [Electronic resource] / C. Ugaz, L. Han, A. Lim // *arXiv preprint, arXiv 1909.03112*. – 2019. – 13 p. – Access mode: <https://arxiv.org/abs/1909.03112>
11. Berjón D. Optimal piecewise linear function approximation for GPU-based applications / D. Berjón, G. Gallego, C. Cuevas et al. // *IEEE Transactions on Cybernetics*. – 2016. – Vol. 46 (11). – P. 2584–2595. DOI: 10.1109/TCYB.2015.2482365.
12. Polygonal curve evolutions for planar shape modeling and analysis / [A. G. Belyaev, E. V. Anoshkina, S. Yoshizawa, M. Yano] // *International Journal of Shape Modeling*. – 1999. – Vol. 05, No. 02. – P. 195–217. DOI: 10.1142/S0218654399000174.
13. Langer T. Asymptotic analysis of discrete normals and curvatures of polylines / T. Langer, A. G. Belyaev, H.-P. Seidel // *SCCG '05: Proceedings of the 21st Spring Conference on Computer Graphics*. – 2005. – P. 229–232. DOI: 10.1145/1090122.1090160.
14. Approximation of curves with piecewise constant or piecewise linear functions [Electronic resource] / F. Gournay, J. Kahn, L. Lebrat // *HAL Id hal-02284549*. – 2019. – 17 p. – Access mode: <https://arxiv.org/pdf/1909.04582.pdf>
15. LiMITS: An effective approach for trajectory simplification [Electronic resource] / Y. Han, H. Samet // *arXiv pre-print, arXiv:2010.08622v1*. – 2020. – 13 p. – Access mode: <https://arxiv.org/abs/2010.08622v1>
16. Fuhr R. D. Monotone linear rational spline interpolation. / R. D. Fuhr, M. Kallay // *Computer Aided Geometric Design*. – 1992. – Vol. 9, Issue 4. – P. 313–319. DOI:10.1016/0167-8396(92)90038-Q.
17. Epperson J.F. An introduction to numerical methods and analysis / J. F. Epperson. – New Jersey : Wiley, 2013. – 615 p.
18. Oja P. Low degree rational spline interpolation / P. Oja // *BIT Numerical Mathematics*. – 1997. – Vol.37, Issue 4. – P. 909. DOI:10.1007/BF02510359.

## ВЕКТОРНІ МОДЕЛІ ЛОГІКИ І СТРУКТУРИ ДЛЯ ТЕСТУВАННЯ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ЦИФРОВИХ СХЕМ

**Хаханова А. В.** – канд. техн. наук, доцент каф. Автоматизації проектування обчислювальної техніки, Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна.

**Хаханов В. І.** – д-р техн. наук, професор каф. Автоматизації проектування обчислювальної техніки, Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна.

**Чумаченко С. В.** – д-р техн. наук, професор, зав. каф. Автоматизації проектування обчислювальної техніки, Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна.

**Литвинова Є. І.** – д-р техн. наук, професор каф. Автоматизації проектування обчислювальної техніки, Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна.

**Рахліс Д. Ю.** – канд. техн. наук, доцент каф. Автоматизації проектування обчислювальної техніки, Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна.

### АНОТАЦІЯ

**Актуальність.** Відомо, що структури даних є визначальними для створення ефективних паралельних алгоритмів і високопродуктивних обчислювальних пристроїв. Тому розробка математично досконалих і технологічно простих структур даних займає близько 80 відсотків часу проектування, коли на алгоритми і їх hardware-software кодування витрачається близько 20 відсотків часових і матеріальних ресурсів. Це обумовлює пошук таких примітивів структур даних, які суттєво спростять паралельні високопродуктивні алгоритми, що працюють на них. Пропонуються моделі і методи для тестування та моделювання цифрових систем, що містять окремі переваги квантового комп'ютингу в частині імплементації векторних кубітних структур даних в технології класичних обчислювальних процесів.

**Мета.** Розробка інноваційної технології кубітно-векторного синтезу і дедуктивного аналізу тестів для їх верифікації на основі векторних структур даних, що істотно спрощують алгоритми, які можуть бути вбудовані як компоненти BIST в цифрові системи на кристалах.

**Метод.** Використовується дедуктивне моделювання несправностей для отримання аналітичних виразів, орієнтованих на транспортування списків несправностей через функціональний або логічний елемент на основі хог-операції, яка виконує роль вимірника подібності-відмінності між тестом, функцією і несправностями, заданими однаково в одному з форматів – таблицю, графом, рівнянням. Пропонується двійковий вектор як самий технологічний примітив структур даних для завдання логічної функціональності з метою паралельного синтезу та аналізу цифрових систем. Паралелізм рішення комбінаторних задач є фізична властивість квантового комп'ютингу, що в класичному комп'ютингу, для паралельного моделювання та діагностування несправностей, забезпечується унітарно-кодованими структурами даних, завдяки надлишкової пам'яті.

**Результати.** 1) Розроблено метод аналітичного синтезу дедуктивної логіки для функціональних елементів вентильного рівня і рівня регістрових передач. 2) Запропоновано дедуктивний процесор для моделювання несправностей на основі транспортування вхідних списків або векторів несправностей на зовнішні виходи цифрових схем. 3) Описано кубітно-векторну форму завдання логіки та методи кубітного синтезу дедуктивних рівнянь для моделювання несправностей. 4) Розроблено кубітно-векторний метод синтезу тестів, що використовує похідні, які обчислюються за векторним покриттям логіки. 5) Виконано верифікацію моделей і методів на тестових прикладах в програмній реалізації структур і алгоритмів.

**Висновки.** Наукова новизна полягає в новій парадигмі технології синтезу дедуктивної RTL-логіки на основі метричного рівняння тестування, що формує хог-відносини між тестом, функцією і несправностями. Вводиться векторна форма опису структур, яка дає можливість застосувати відомі технології синтезу та аналізу тестів логічних схем для ефективного вирішення завдань тестування графових структур і автоматичних моделей цифрових пристроїв. Практична значимість відбивається в прикладах аналітичного синтезу дедуктивної логіки для функціональних елементів векторного рівня і рівня регістрових передач. Пропонується дедуктивний процесор для моделювання несправностей, який орієнтований на імплементацію як засобу BIST, що використовується в режимі онлайн тестування, моделювання і діагностування несправностей для цифрових систем на кристалах. Пропонується кубітно-векторна форма опису цифрових систем, яка перевершує існуючі способи завдання обчислювальних пристроїв за метрикою: технологічність, компактність, швидкодія і якість. Розроблено програмний застосунок, який реалізує основні сервіси тестування, моделювання та діагностування, що використовуються в навчальному процесі для вивчення переваг кубітно-векторних структур даних і алгоритмів. Наводяться оцінки обчислювальної складності процесів синтезу тестів і дедуктивних формул для логіки і їх використання при моделюванні несправностей.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** RTL логіка, синтез, технічна діагностика, моделювання цифрових схем, X-функція, метрика подібності-відмінності, дедуктивна функція, метрика рівняння тестування.

### АБРЕВІАТУРИ

AI – штучний інтелект;

BIST – вбудоване самотестування;

Design – проектування;

FC – fault coverage (покриття несправностей);

FD – fault detected (виявлені несправності);

ML – машинне навчання;

RTL – register transfer level (рівень регістрових передач);

SoC – система на кристалі;

Testing – тестування;

АЛП – арифметико-логічний пристрій;

ДНФ – діз'юнктивна нормальна форма.

## НОМЕНКЛАТУРА

$C = (C_1, C_2, \dots, C_i, \dots, C_n)$  – таблиця істинності;

$C_i = \{X_i Y_i\}$  – сукупністю вхідних двійкових векторів  $X_i$ , кожному з них ставиться у відповідність стан виходу  $Y_i$ ;

$D(a, b)$  – метрика відмінності двох об'єктів  $a$  і  $b$ ;

$d_i$  – відстань Хеммінга між двома моделями об'єктів;

$F$  – функція;

$G$  – орієнтований граф;

$H$  – матриця перестановки;

$k$  – число двійкових змінних;

$L$  – несправність;

$L_{ij}^*$  – дедуктивна матриця для паралельного аналізу

одиначних константних несправностей;

$n$  – розмірність таблиці істинності;

$N$  – кількість вершин графа;

$N_1 (N_0)$  – число вершин в області відправлення (прибуття) розглянутої відповідності;

$Q$ -логіка – логіка, що оперує кубітами (векторними формами унітарного кодування універсуму з  $n$  примітивів);

$Q$ -покриття – вектор станів вихідної змінної таблиці істинності;

$\{Q, E, H, J\}$  – символи універсума примітивів, що генерують булеан;

$S(a, b)$  – метрика подібності двох об'єктів  $a$  і  $b$ ;

$T$  – тест;

$T_{i1}, T_{i2}$  – значення відповідних вхідних змінних на тестових наборах;

$U$  – число змінних управління;

$V_i$  – вершина графа;

$V_g$  – опису графа;

$V_t$  – завдання тесту;

$V_f$  – вектор несправностей;

$X_i$  – вхідний двійковий вектор;

$X_1, X_2$  – вхідні списки або вектори несправностей, які транспортуються на вихід елемента;

$Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_i, \dots, Y_n)$  – вектор станів виходу логічного елемента;

$Y_i$  – стан вихідної змінної на  $i$ -наборі тесту.

## ВСТУП

Парадигма створення квантового ринкового комп'ютера, що використовує квантову логіку на основі кубітних структур даних, є сумнівною. Метричні підстави: 1)  $Q$ -логіка, як і звичайна, створює до 90 відсотків всіх проблем, пов'язаних з технологією її апарат-

ної реалізації, продуктивністю, якістю, надійністю, тестуванням, діагностуванням та ремонтом. 2) Включення класичної та квантової логіки з комп'ютера дає можливість перейти на більш високий рівень архітектури комп'ютерингу, яка використовує тільки регулярну пам'ять для зберігання і логічного перетворення даних. 3) При цьому усуваються недоліки, пов'язані з використанням обов'язкових сьогодні блоків АЛП та шин даних, які в десятки разів сповільнюють обчислювальні процеси. 4) Перспективною стає архітектура  $Q$ -комп'ютера, що використовує тільки структуру електронів як пам'ять і транзакції між ними на основі керованих фотонів. 5) Швидкодія звернення до електрон-пам'яті і виконання транзакцій на ній визначається швидкістю світла, що робить такий  $Q$ -комп'ютер ринково привабливим і унікальним для вирішення комбінаторних завдань. 6) Технічні і температурні умови для реалізації квантового обчислювача є поки непереборним обмежувачем для його масової імплементації в існуючий кіберпростір.

Проте, далі пропонуються моделі і методи для тестування і моделювання цифрових систем, що містять окремі переваги квантового комп'ютерингу в частині імплементації векторних кубітних структур даних в технології класичних обчислювальних процесів. Відомо, що структури даних є визначальними для створення ефективних паралельних алгоритмів і високопродуктивних обчислювальних пристроїв. Тому розробка математично досконалих і технологічно простих структур даних в «розумних» компаніях займає близько 80 відсотків часу проектування, коли на алгоритми та їх hardware-software кодування витрачається близько 20 відсотків часових і матеріальних ресурсів.

Звідси випливає простий висновок – необхідно знайти такі примітиви структур даних, які суттєво спростять паралельні високопродуктивні алгоритми, що працюють на них. Виходячи зі сказаного, далі пропонується двійковий вектор, як самий технологічний примітив структур даних для завдання логічної функціональності з метою паралельного синтезу та аналізу цифрових систем. Паралелізм рішення комбінаторних задач є фізична властивість квантового комп'ютерингу, яке в класичному комп'ютерингу, для паралельного моделювання несправностей (parallel fault simulation) і діагностики несправностей (fault diagnosis), забезпечується унітарно кодованими структурами даних, завдяки надлишковій пам'яті [1].

**Об'єкт дослідження** – процес паралельного синтезу та аналізу цифрових систем.

**Предмет дослідження** – методи кубітно-векторного синтезу і дедуктивного аналізу тестів та їх верифікація на основі векторних структур даних.

**Мета дослідження** – запропонувати інноваційну технологію кубітно-векторного синтезу і дедуктивного аналізу тестів для їх верифікації на основі векторних структур даних, що істотно спрощують алгоритми, які можуть бути вбудовані як компоненти BIST в цифрові системи на кристалах.

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Інноваційна ідея для вирішення проблем тестування. Ринкова метрика квантового комп'ютингу – паралелізм розв'язання комбінаторних задач, завдяки структурам даних, де примітивом є кубіт, що одночасно має два стани  $X = \{0,1\}$ . Ці стани можна унітарно закодувати для класичного комп'ютера як суперпозицію – об'єднання двох символів  $11 = \{10, 01\}$  відповідно. Природно, можна придумати будь-яке кінцеве число символів, що одночасно створюють один, більш складний чотирьохкомпонентний кубіт-стан, наприклад,  $Y = \{Q, E, H, J\} \rightarrow 1111 = \{1000, 0100, 0010, 0001\}$  [18, 23, 24, 25, 27, 29, 30]. Застосування кубітності (векторності) до логіки також має сенс паралелізму. Таблицю істинності хог-елемента можна зобразити, наприклад, у вигляді унітарних кодів вхідних наборів:  $00\ 0\ 01\ 1, 10\ 1, 11\ 0 \rightarrow 1000\ 0, 0100\ 1, 0010\ 1, 0001\ 0$ . Дані коди можна попарно (1,4 і 2,3) суперпозиціонувати або мінімізувати до наступного вигляду:  $1001, 0, 0110\ 1$ . Природно, досить мати тільки один з них для ідентифікації функції (структури), зважаючи на їх додатковості, наприклад,  $0110\ 1$ . Це є не тільки результат мінімізації, але ще й короткий запис ДНФ. Відкинувши останню одиницю, дедуктивно виходить вектор вихідних станів  $0110$ , який тут і далі ідентифікується або визначається кубітним.

Для досягнення поставленої мети треба вирішити наступні задачі:

1) розробити метод аналітичного синтезу дедуктивної логіки для функціональних елементів вентильного рівня (gate level) і рівня регістрових передач (register transfer level) [25];

2) запропонувати дедуктивний процесор для моделювання несправностей на основі транспортування вхідних списків або векторів несправностей на зовнішні виходи цифрових схем [27];

3) описати кубітно-векторну форму завдання логіки та методи кубітного синтезу дедуктивних рівнянь для моделювання несправностей [18];

4) розробити кубітно-векторний метод синтезу тестів, що використовує похідні, які обчислюються за векторним покриттям логіки [29];

5) виконати верифікацію моделей і методів на тестових прикладах в програмній реалізації структур і алгоритмів [24].

## 2 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Тематика статті викликає певний інтерес з боку дослідників, що займаються тестуванням проектів [1] і верифікацією цифрових систем на кристалі з точки зору технологій наноелектроніки, що з'являються. Субатомний рівень деталізації мікросхем вимагає розробки нових підходів в області синтезу тестів, моделювання несправностей і діагностики з метою створення тестопригодних і відмовостійких обчислювальних систем [2–17]. Це підтверджується численними публікаціями в області технологій проектування і тестування. а саме: в бібліотеці IEEE Xplore по даній темі

знайдено 175920 публікацій, серед яких напрямок, пов'язаний з моделюванням несправностей, становить близько 25% (43028) опублікованих робіт. Крім того, відповідна оцінка двох згаданих областей досліджень була зроблена видавництвом Springer, де опубліковано відповідно 182717 і 15603 монографій. Класифікація технологій моделювання (Fault Simulation) несправностей може бути представлена відношенням структур даних, моделей (Models), методів (Methods) і типів несправностей (Fault models) (рис. 1) [18].

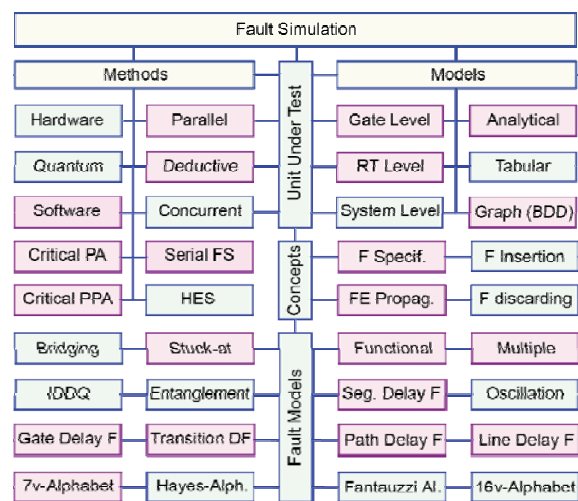


Рисунок 1 – Класифікація технологій моделювання несправностей

Згідно з рисунком 1, блок, що тестується (Unit Under Test), може бути представлений моделями вентильного рівня (Gate Level) чи рівня регістрових передач (RT Level), аналітичними (Analytical), табличними (Tabular) чи графічними (Graph, BDD) моделями, моделями на системному рівні (System Level). До методів моделювання несправностей можна віднести: апаратні (Hardware), програмні (Software), квантові (Quantum), паралельні (Parallel), дедуктивні (Deductive) та спільні (Concurrent) методи, апаратне вбудоване моделювання (HES), методи активізації критичних шляхів (Critical PA) та парної активізації критичних шляхів (Critical PPA), послідовне моделювання несправностей (Serial FS). Існують наступні моделі несправностей: функціональні (Functional), множинні (Multiple), мостикові (Bridging), константні (Stuck-at), струмкові (IDDQ), несправності типу «переплутування» (Entanglement), несправності, пов'язані з затримками вентиля (Gate Delay F), шляху (Path Delay F), переходу (Transition DF), лінії (Line Delay F) та сегмента (Seg. Delay F), несправності, пов'язані з брязкотом сигналу (Oscillation), модель несправності у семизначному (7v-Alphabet) та шістнадцятизначному (16v-Alphabet) алфавітах моделювання перехідних процесів, а також у дев'ятизначному алфавіті Хейеса (Hayes-Alph.) та у шістнадцятизначному алфавіті Фантози (Fantauzzi Al.) для моделювання перехідних процесів. Всі методи моделювання оперують наступними поняттями (Concepts): специфікація несправнос-



тей (F Specif.), введення несправностей в схему (F Insertion), просування несправностей від входів до виходів (FE Propag.), скидання шляхів активізації несправностей (F discarding).

Основні проблеми в галузі моделювання несправностей слід визначити наступним чином. 1. Висока обчислювальна складність комбінаторних алгоритмів аналізу несправностей на вентильному рівні і рівні регістрових передач опису моделі [2, 5, 8, 11, 14]. 2. Складність алгоритмів моделювання та аналізу результатів моделювання послідовних схем, яка пов'язана з непередбачуваною кількістю ітерацій [1, 2, 6, 7, 10, 13, 14, 15]. 3. Значний обсяг структур даних для аналізу цифрових систем на кристалі, що негативно впливає на продуктивність методів моделювання несправностей і синтезу тестів [1, 3, 5, 9, 18, 20]. 4. Складність аналізу і синтезу тестів для логіки великої розмірності і їх структурна складність, пов'язана з реконвергентними розгалуженнями [1, 4, 8, 9, 11, 18]. 5. Паралельне вирішення задач тестування та моделювання цифрових пристроїв [1, 7, 18 – 30].

### 3 МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИ

Розглянемо метрику тестування цифрових систем. Дедукція (deductio) – логічне отримання висновку від загального до конкретного, де правильність гарантується істинністю посилок-аксіом, що призводять до істинності наслідків-теорем. Індукція (inductio) – логічне отримання висновку від часткового до загального, де правильність гарантується достатньою або вичерпною кількістю фактичних даних. Аксіома конволюції testing простору: «Хог-відношення відстаней між кінцевим числом замкнених в циклі компонентів завжди дорівнює нулю» [18]. Очевидність цієї аксіоми демонструється на рис. 2, де циклічне з'єднання кінцевої множини моделей об'єктів завжди створює нульову суму відстаней:  $\oplus_{i=1}^n d_i = 0$ .

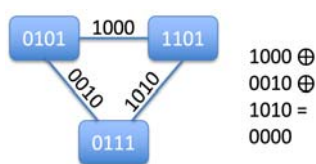


Рисунок 2 – Метрика конволюційного замикання відстаней

Тут складання всіх кодів-відстаней контуру дає результат  $1000 \oplus 1010 \oplus 0111 = 0000$ . Природно, що аксіома вірна для будь-якого кінцевого числа елементів, що становлять контур або цикл. Слідство: якщо відомі дві відстані, то за хог-відношенням між ними завжди можна визначити третю. Виключною властивістю сукупності взаємопов'язаних компонентів – функція (function), тест (test) і несправність (fault) – є той факт, що одночасно вони являють собою відстані-відносини між усіма парними сполученнями в структурі їх трикутної хог-взаємодії (рис. 3).

Слід мати на увазі, що формати тесту, функції і несправностей повинні бути однієї розмірності. Тому

модель завдання одиночної несправності повинна збігатися з сумарною кількістю вхідних і вихідних змінних.

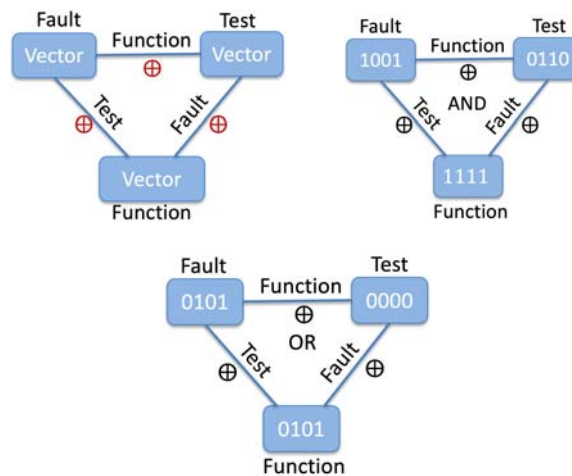


Рисунок 3 – Метрика хог-відносин: function-test-fault (функція-тест-несправність)

Наприклад, для and-or-логіки від трьох змінних несправність першого входу матиме вигляд вектора (1001). Це означає, що несправність першого входу робить істотний вплив на стан виходу, пов'язаного з координатою 4. Test-вектор 0100 (0000), Fault-вектор 1001 і Function-вектор 1111 (0101) для 3and і 3or логіки відповідно представлені в другому і третьому трикутнику. Відносини представлені ребрами трикутної графової структури. При цьому вершини є вектори (таблиці) відносин.

Іншими словами, в трикутній структурі є вершини (вектори-таблиці), які позначають функції-тести-несправності. Однак кожен з цих компонентів створює відносини між двома іншими за допомогою хог-операції. Це означає, що хог-відношення між несправністю (Fault) і тестом (Test) є функцією (Function), між несправністю (Fault) і функцією (Function) є тест-відношення (Test), між тестом (Test) та функцією (Function) є несправність-відношення (Fault) [18].

Трикутна структура таблиць істинності (Function), тестів (Test), несправностей (Fault) для логічного елемента 2and дозволяє вирішувати вже комбінаторні задачі: синтезу тестів, моделювання несправностей і формування таблиці істинності (рис. 4) [18, 28].

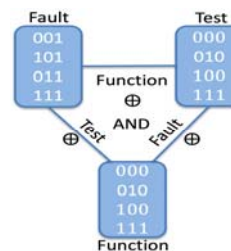


Рисунок 4 – Метрика табличних хог-відносин: function-test-fault (функція-тест-несправність) для 2and-логіки

В цьому випадку трикутна структура відносин між тестом, несправностями та функцією, поданих таблицею істинності, служить шаблоном-стандартом для верифікації отриманих відносин між згаданими знайденими компонентами.

У компоненті Faults одиницями показані несправності (активності ліній), що транспортуються на виході елемента. Перший куб 001 – перевірка несправності виходу, другий куб 101 – активізація першої та вихідної змінної, третій 011 – транспортування несправностей другою змінною на вихід, 111 – транспортування несправностей з двох входів на вихід. Інтерес також представляє схематична форма відносин, яка дає можливість створювати цифрові структури для вирішення задач тестування (рис. 5). Однак, як правило, обчислювальна NP-складність задач тестування [1, 11] пов'язана з наявністю початкових умов – функції (Function) у вигляді: таблиці істинності, рівняння або альтернативних графів.

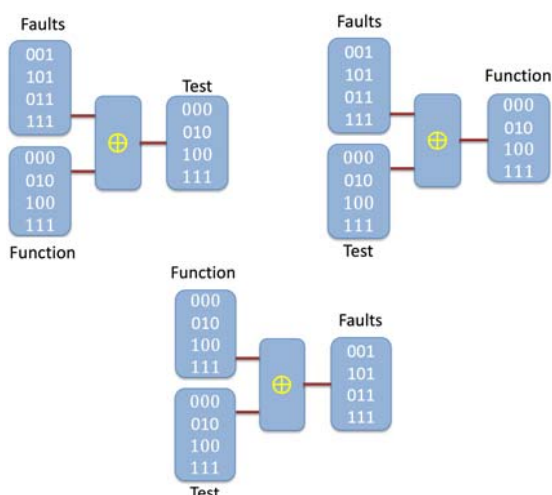


Рисунок 5 – Схематична форма відносин для рівняння тестування

При цьому необхідно знайти тест (Test), а потім його верифікувати на класі одиночних константних несправностей, що означає побудувати два відсутніх компонента в трикутнику рівняння тестування (рис. 6).

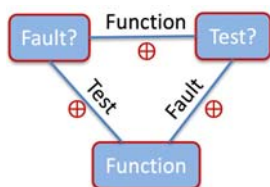


Рисунок 6 – Метрика табличних хог-відносин: function-test-fault (функція-тест-несправність)

Аксиома: «У світі Design and Test немає нічого, крім функцій  $F$ , тестів  $T$  і несправностей  $L$ , хог-відносини яких дорівнюють нулю:  $F \oplus T \oplus L = 0$ » [18]. Інша справа, що ця тривіальність і істинність

даної метрики не завжди проглядається через призму складних моделей, методів і алгоритмів проектування, виробництва та експлуатації технічних виробів, напрацьованих людством за останні 100 років. Лінійний характер взаємодії дає можливість визначити будь-який з заданих компонентів через хог-відношення двох атрибутів, що залишилися. Природно, що сукупність несправностей деякої функціональності на тестових наборах можна визначити за допомогою виразу  $L = T \oplus F$ , яке вироджується в групу відомих методів моделювання несправностей, таких як дедуктивні, паралельні, спільні, одиночні.

Дедуктивне моделювання несправностей можна структурувати на дві послідовні фази.

1. Синтез дедуктивних формул  $L$  для логічних або функціональних елементів  $F$  комбінаційної схеми [18, 22, 25], що залежать від тестових вхідних наборів  $T$  і логіки компонентів  $L = f(T, F)$ .

2. Моделювання несправностей логічної комбінаційної схеми шляхом використання дедуктивних формул на тестових вхідних послідовностях [27, 30]. Як правило, розглядаються поодинокі константні несправності вхідних, внутрішніх і вихідних ліній схеми, які покривають до 95% всіх можливих несправностей. Сутність дедукції для отримання аналітичних виразів, орієнтованих на транспортування списків несправностей через функціональний або логічний елемент, полягає у використанні хог-операції для формування основного конволюційного лінійного рівняння тестування  $T \oplus F \oplus L = 0$ . Дана рівність описує всі можливі процеси, пов'язані з синтезом тестів  $T = F \oplus L$  і функціональних описів  $F = T \oplus L$ , діагностуванням несправностей, включаючи визначення вихідного списку несправностей, одержуваного шляхом дедуктивної (теоретико-множинної) взаємодії списків вхідних несправностей, що транспортуються через логічний елемент:  $L = T \oplus F$ . Тут  $\oplus$  – операція виконує глобальну роль вимірника (арбітра) подібності-відмінності між тріадою компонентів: тест, функція, несправності, які повинні бути однаково задані в будь-якому з відомих форматів опису даних: таблиці, графі, рівняння. Таким чином, маючи два відомих компонента в рівнянні тестування, завжди можна отримати будь-який третій шляхом синтезу хог-взаємодії між двома першими. Істинність рівняння тестування можна продемонструвати на простому прикладі логічного інвертора:  $F = (01) \oplus T = (10) \oplus L = (11) = (00)$ .

Розглянемо таблично-векторні моделі для опису і аналізу структур і функцій. Мета – створення універсальної векторної моделі опису структур і функцій для розробки ефективних паралельних методів синтезу та аналізу, тестування і моделювання компонентів SoC. Поставлені наступні завдання. 1. Обґрунтування кубітно-векторної форми опису структур і функцій. 2. Використання векторної форми для опису графових моделей. 3. Застосування векторної форми для опису таблиць переходів для кінцевих автоматів. 4. Викори-

стання кубітно-векторної форми для розробки векторно-орієнтованих методів синтезу тестів і моделювання несправностей графових структур.

Практичний інтерес представляє пошук простої, технологічної та універсальної форми для опису графів і функцій, алгоритмів і структур, моделей і методів, яка дає можливість застосовувати напрацьовані вченими теорії для ефективного вирішення завдань проектування і тестування, синтезу та аналізу цифрових систем. Розглядаючи аналітичні, табличні і графові моделі [1, 11, 14, 18, 24, 28] можна прийти до таких висновків. 1. Аналітика, володіючи певною компактністю, потребує складних алгоритмів розв'язання рівнянь. 2. Таблиці або матриці мають недолік, пов'язаний з розмірністю моделей для логічних схем від великого числа ( $> 20$ ) змінних. 3. Графові моделі зручні для візуального сприйняття людиною, але важкі для їх дешифрування і подальшого структурного синтезу цифрового обчислювача. Пропонується серединна векторна (кубітна) форма опису, універсально придатна для завдання функцій і структур, яка має: 1) компактність порівняно з таблицями; 2) простоту опису порівняно з логічними рівняннями; 3) технологічність і паралелізм вирішення завдань аналізу та синтезу; 4) формування нової обчислювальної технології, заснованої на використанні швидкодіючої пам'яті і виключення традиційної логіки зі складу універсального комп'ютера; 5) подальшу орієнтацію алгоритмів і структур даних на квантові обчислювачі. Недоліком і одночасно перевагою векторної форми опису функцій і структур є адресованість його бітів, яка дає можливість швидко (за один цикл звернення до пам'яті) знаходити рішення.

Далі розглядаються дві форми опису: таблиці і вектори, інваріантні для завдання примітивів функцій і структур.

Таблиця істинності  $C = (C_1, C_2, \dots, C_i, \dots, C_n)$ , де  $C_i = \{X_i Y_i\}$ , представлена сукупністю вхідних двійкових векторів  $X_i$ , де кожному з них ставиться у відповідність стан виходу  $Y_i$ .

Інша інтерпретація: таблиця істинності є вектор  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_i, \dots, Y_n)$ , станів виходу логічного елемента, де адресою комірки вектора є двійковий вхідний набір.

Третя інтерпретація: таблиця істинності є орієнтований граф  $G$ , представлений повною сукупністю дуг – парами вершин  $G = (V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_n)$ , де  $V_i = \{V_i^X, V_i^Y\}$ , а наявність (відсутність) дуги між

двійково кодovаними вершинами відзначається одиничним (нульовим) значенням стану виходу  $Y_i$ .

Четверта інтерпретація: таблиця істинності графа є вектор  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_i, \dots, Y_n)$ , наявності-відсутності дуг, де адресою комірки  $Y_i$  вектора є пара двійкових кодів вершин витoku і стоку  $\{V_i^X, V_i^Y\}$ . При цьому розмірність таблиці істинності  $n = 2^k$  завжди має функціональну залежність від числа змінних  $k$ . Число двійкових змінних  $k$  для таблично-векторного опису графа є функцією від цілої частини логарифма для кількості  $N$  вершин графової структури  $k = 2 \times \lceil \log_2 N \rceil$ , округленої в більший бік. Наприклад, для двох вершин графа (рис. 7) число змінних буде дорівнювати двом  $k = 2 \times \lceil \log_2 N \rceil = 2$ .

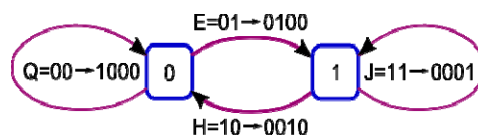


Рисунок 7 – Повний граф з двох вершин і чотирьох дуг

При цьому існує 16 можливих варіантів графових структур, які визначаються комбінаціями вектора  $Y$ , поданими у таблиці 1. Тут формула подвоєння числа змінних унеможливує їх непарну кількість, що характерно для відношення, що задається декартовим квадратом вершин графа.

Однак існує специфіка відношення-відповідності, яке формується декартовим добутком окремо кодovаних вершин, що оптимізує число змінних у бік мінімуму і створює непарне число змінних, яке визначається формулою:  $k = \lceil \log_2 N_1 \rceil \times \lceil \log_2 N_0 \rceil$ , як підмножина декартова добуток двох множин.

Що стосується маркування переходів, характерного для кодування граф-схем алгоритмів або керуючих автоматів, то тут таблиця істинності приростає змінними управління і не більше того.

Недоліком такої форми опису автоматних переходів є розмірність таблиці, яка експоненціально залежить від числа змінних управління  $U$  і змінних кодування станів автомата:

$$C = 2 \times \lceil \log_2 N \rceil \lceil +U \times 2^{2 \times \lceil \log_2 N \rceil} \rceil$$

Однак розмірність вектора автоматних переходів є прийнятною для вирішення задач синтезу та аналізу, тестування і діагностування, визначається оцінкою:

$V = 2^{2 \times \lceil \log_2 N \rceil + U}$ , яка в  $2 \times \lceil \log_2 N \rceil + U$  раз менше таблиці істинності.

Таблиця 1 – Варіанти графових структур

$V_i^X$	$V_i^Y$	Y1	Y2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Розглянемо логічні функції вимірювання. Як не дивно, але в природі існують лише дві логічних функції для вимірювання процесів і явищ, що складають групу  $X$ -функцій:  $\text{xor}$  and  $\text{not-xor}$  [18, 22]. Їм ставляться у відповідність тільки два поняття: відмінності і подібності процесів і явищ, які покладені в основу всіх вимірювальних комп'ютерних технологій, включаючи ML і AI. Метрична унікальність даних функцій визначається їх властивостями немінімізованості (незмінності), що ілюструється наступними топологічними діаграмами Карно їх таблиць істинності від однієї, двох, трьох і чотирьох змінних, які представлені на рис. 8.

$X_1$	0	1
	0	1

$X_1 \setminus X_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

$X_1 \setminus X_2 X_3$	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1

$X_1$	0	1
	1	0

$X_1 \setminus X_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

$X_1 \setminus X_2 X_3$	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0

Рисунок 8 – Таблиці істинності  $X$ -функцій

Таких  $\text{xor}$ -функцій всього дві від будь-якого кінцевого числа змінних: від однієї змінної (повторювач і інвертор) на тлі загальної кількості, рівної чотирьом; їх всього дві від двох змінних на тлі шістнадцяти (що виключає або, операція еквівалентності); дві від трьох змінних на тлі 256; дві від чотирьох змінних на тлі числа 65536, що визначає їх загальну кількість. Рекурентний синтез  $X$ -функцій від довільного числа змінних досить повно представлений в [18, 22]. Слід зауважити, що таблиця істинності, записана в сусідньому кодї, становить певний інтерес для синтезу (тестів), аналізу, мінімізації цифрових схем.

Розглянемо процес вимірювання векторів опису процесів і явищ. Що стосується метрики вимірювання процесів і явищ, представлених двійковими (чисельними) векторами параметрів, то тут фігурують дві оцінки (similarity-difference) [27], які взаємно доповнюють один одного до норми-універсуму, що дорівнює 1. Структурно, метрика подібності-відмінності двох процесів, явищ, об'єктів, компонентів використовує дві формули, які оперують в бінарній алгебрі логіки двома паралельними операціями  $\text{and}$ ,  $\text{xor}$  для отримання результуючих векторів:

$$(a,b) = a_i \wedge b_i; \quad D(a,b) = a_i \oplus b_i.$$

Нормована метрика подібності-відмінності [16, 17] використовує дві формули, що також оперують в алгебрі логіки двома паралельними операціями, але доповнені арифметикою підрахунку одиничних координат, отриманих в результаті виконання логічних операцій. Крім того, з'являється спільний знаменник у вигляді диз'юнкції однойменних координат векторів, який служить інтегратором розрізнених структур да-

них, процесів, що беруть участь, в загальний вектор істотних координат, щодо яких виконується нормування подібності (S) та відмінності (D):

$$S(a,b) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \wedge b_i}{\sum_{i=1}^n a_i \vee b_i}; \quad D(a,b) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \oplus b_i}{\sum_{i=1}^n a_i \vee b_i}.$$

Розглянемо дедуктивне моделювання, а саме синтез та аналіз дедуктивної логіки. Базове рівняння визначається наступною формулою [1, 18]:  $L = f(T, F) = T \oplus F$ , що випливає з тотожності ( $F \oplus L \oplus T = 0$ ).

Нехай  $\epsilon$  булева функція від  $n$  змінних:  $Y = F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ . Згідно з базовим рівнянням, дедуктивна функція може бути зображена у вигляді:

$$F = L \oplus T \rightarrow F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = (X_1 \oplus T_1, X_2 \oplus T_2, \dots, X_i \oplus T_i, \dots, X_n \oplus T_n) \oplus Y_i.$$

Тут  $x_i = X_i \oplus T_i$  ( $F = L \oplus T$ ) – визначення вхідної змінної  $x_i$  логічної функції через  $\text{xor}$ -взаємодію списку або вектора вхідних несправностей  $X_i$  з тестовим значенням  $T_i$ . При цьому  $F \oplus Y_i \in \text{xor}$ -взаємодія функції з її тестовим значенням. Якщо, наприклад,  $x_i = 0, T_i = 0$  для логічного елемента “and”, то  $X_i = 0$ , оскільки  $x_i \oplus X_i \oplus T_i = 0$ . Але якщо  $x_i = 0, T_i = 1$ , то залишається єдине –  $X_i = 1$ . Це означає, що тестовий набір, який перевіряє несправність, повинен бути протилежним за значенням до стану вхідної змінної  $x_i$  логічної функції. Вірно і те, що трьох одиниць не може бути в компонентах рівності. Всі можливі варіанти довизначення компонентів в тотожність  $F \oplus L \oplus T = 0$ : всі нулі або дві одиниці з трьох.

Завжди тільки дві функції від кінцевого числа ( $n = 1, 2, 3, \dots, k$ ) змінних ( $\text{xor}$ ,  $\text{not-xor}$ ), які складають сімейство  $X$ -функцій [22], мають властивість транспортування несправностей, інваріантну по відношенню до тест-вектору, що робить ці функціональності унікальними.

Таким чином, правило дедукції, саме в вигляді  $F = L \oplus T$  для синтезу відповідної логіки, використовує деяку функцію  $F$ , яка аксіоматично і парадоксально є відстанню між тестом  $T$  і несправностями  $L$ . Що стосується функцій від однієї змінної  $Y = x_1, Y = \overline{x_1}$ , то їх дедуктивний аналіз призводить до тривіального результату, який показує інваріантність транспортування всіх несправностей на вихід щодо будь-якого тестового набору:

$$F = L \oplus T : x_1 = (X_1 \oplus T_{i1}) \oplus Y_i =$$

$$= \overline{x_1}[(X_1 \oplus 0) \oplus 0] \vee x_1[(X_1 \oplus 1) \oplus 1] = \overline{x_1}X_1 \vee x_1X_1 = X_1.$$

$$F = L \oplus T : x_1 = (X_1 \oplus T_{i1}) \oplus Y_i =$$

$$= \overline{x_1}[(\overline{X_1} \oplus 0) \oplus 1] \vee x_1[(\overline{X_1} \oplus 1) \oplus 0] = \overline{x_1}X_1 \vee x_1X_1 = X_1.$$

Отримані дедуктивні вирази не мають вхідних змінних ( $x_1$ ), що свідчить про їх неістотність для транспортування несправностей ( $X_1$ ) через елементи: повторювач та інвертор.

Розглянемо векторний (кубітний) метод синтезу дедуктивних функцій у вигляді діз'юнктивної нормальної форми (ДНФ, Disjunctive Normal Form). Метод орієнтований на логіку довільної розмірності, яка задається кубітним вектором функціональності, що робить його практично орієнтованим, з огляду на технологічність і простоту реалізації. Як правило, методи синтезу дедуктивних формул для цифрових схем залишаються за межами публікацій, які описують використання вже готових логічних виразів. Далі пропонується підхід до отримання таких формул, а точніше матриць для дедуктивного аналізу цифрових схем. Найпростішою і ефективною технологією синтезу дедуктивних функцій для моделювання несправностей є метод, який використовує кубітні або векторні покриття булевих функцій. Під кубітним  $Q$ -покриттям розуміється вектор станів вихідної змінної таблиці істинності [18, 23, 28], де кожній координаті вектора ставиться у відповідність двійкова адреса, що ототожнюється з вхідним набором функціонального елемента. Якщо врахувати той факт, що для кожного вхідного набору існує власна дедуктивна функція, то для всіх вхідних послідовностей необхідно побудувати матрицю розмірності  $2^n \times 2^n$ . Процесор синтезу дедуктивної матриці (Matrix of Deductive Q-coverages) для паралельного аналізу одиночних константних несправностей на основі  $Q$ -покриття (Q-coverage) функціональності містить тільки дві операції (рис. 9).

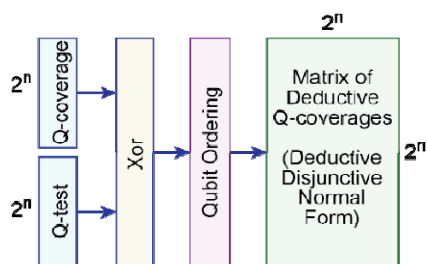


Рисунок 9 – Секвенсор синтезу векторів дедуктивної матриці

1) Синтез матриці  $Q$ -векторів дедуктивних функцій залежить від двійково-десятькового номера вхідного набору і координат  $Q$ -вектора ( $Q$ -test) для функції від  $n$  змінних:  $L_{ij}^* = (Q_i \oplus Q_j)_{j=1, m}^m$ ,  $m = 2^n$ . Фактично береться перша координата кубітного покриття (векто-

ра), яка хог-взаємодіє з усіма координатами  $Q$ -вектора функціональності для формування дедуктивного вектора щодо першої вхідної послідовності (Qubit Ordering). Потім береться друга координата  $Q$ -вектора, яка також хог-взаємодіє з усіма координатами  $Q$ -покриття. Процедура закінчується після того, як всі координати  $Q$ -вектора були хог-складені з кубітним вектором. Обчислювальна складність даної процедури дорівнює  $2^{n+1}$ , яка може бути зменшена до  $n$  шляхом апаратної реалізації паралельного виконання хог-операції.

2) Після отримання дедуктивної матриці для всіх вхідних наборів по кубітному покриттю функціональності необхідно виконати процедуру перестановки бітів в стовпцях отриманої матриці за правилом:  $L_{ij} = (L^*(H_{ij}))_{i,j=1}^m$ , відповідно до номерів, поданих в матриці перестановки  $H$ , яка за розмірністю дорівнює матриці кубітних покриттів дедуктивних функцій.

Розглянемо кубітно-векторний метод синтезу тестів. Метод становить інтерес завдяки своїй інноваційності, створюваної векторними структурами даних, на яких виконується обчислення похідних за кожною вхідною змінною логічної схеми. Тут похідна визначається виконанням хог-операції над лівою та правою частинами кубітного покриття-вектора [23, 24, 29]:

$$Q'(X_k) = \{Q_i^L, Q_i^R\} = Q_i^L \bigoplus_{i=1, 2^{k-1}}^{k=1, n} Q_i^R.$$

Алгоритм обчислення похідних за змінними для  $Q$ -вектора (10001001) логічної схеми:

1. Хог-складання сусідніх бітів  $Q$ -вектора з подальшим занесенням результату в кожен із сусідніх бітів:

$$Q'(X_k)(0,1) = Q_0 \oplus Q_1, Q'(X_1)(2,3) = Q_2 \oplus Q_3,$$

$$Q'(X_1)(4,5) = Q_4 \oplus Q_5, Q'(X_1)(6,7) = Q_6 \oplus Q_7.$$

2. Хог-складання сусідніх пар бітів кубітного вектора з подальшим занесенням результату в кожен сусідню пару бітів:

$$Q'(X_2)(0,1,2,3) = Q_{01} \oplus Q_{23},$$

$$Q'(X_2)(4,5,6,7) = Q_{45} \oplus Q_{67}.$$

3. Хог-складання сусідніх тетрад бітів кубітного вектора з подальшим занесенням результату в кожен сусідню тетраду бітів:

$$Q'(X_3)(0,1,2,3,4,5,6,7) = Q_{0123} \oplus Q_{4567}.$$

Результати обчислення похідних представлені таблицею 2.

Таблиця 2 – Похідні за змінними для  $Q$ -вектора

Q	1	0	0	0	1	0	0	1
$Q'(X_1)$	1	1	0	0	1	1	1	1
$Q'(X_2)$	1	0	1	0	1	1	1	1
$Q'(X_3)$	0	0	0	1	0	0	0	1

4. Саме наявність векторної структури даних робить ефективним обчислення похідних, що призводить до простої заключної процедури синтезу тестів, яка зводиться до виконання наступної формули  $T(Q') = \bigvee_{i=1,n} Q'(X_i)$  для створення векторної структури

при тесту для такої схеми (рис. 10). Кубітне покриття цифрової схеми представлено вектором станів вихідної змінної (100000000000001) для шістнадцяти вхідних наборів, де були отримані чотири кубітних (векторних) похідних, що становлять тест на основі використання виразу  $T(Q') = \bigvee_{i=1,n} Q'(X_i)$ .

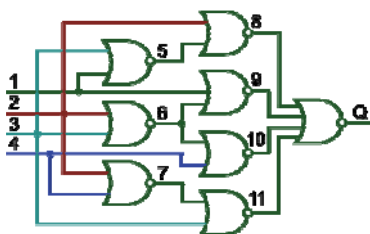


Рисунок 10 – Схема для синтезу тестів

Сукупність кубітних похідних або пар вхідних наборів є тест для перевірки константних несправностей розглянутої вхідної змінної. Таких пар для кожної вхідної лінії може бути кілька, зважаючи на наявність всередині схеми паралельних логічних шляхів від входу до виходу.

#### 4 ЕКСПЕРИМЕНТИ

Розглянемо як приклад відношення, описане таблицею істинності (вектором) і відповідним графом (рис. 11).

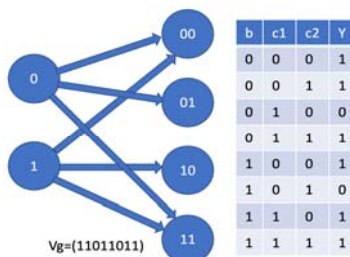


Рисунок 11 – Векторне і табличне подання графа відповідності

Звичайно, даний граф можна представити і в універсальній формі відношення, як підмножини декартова квадрата, що збільшить число змінних для кодування вершин від трьох до шести. Однак така надмірність дає можливість не зберігати інформацію про специфічний розподіл змінних і вершин на дві під-

© Хаханова А. В., Хаханов В. І., Чумаченко С. В., Литвинова Є. І., Рахліс Д. Ю., 2021  
 DOI 10.15588/1607-3274-2021-3-7

множини, які формують відповідність. Прикладом автоматного графа може служити таблиця істинності (рис. 12).

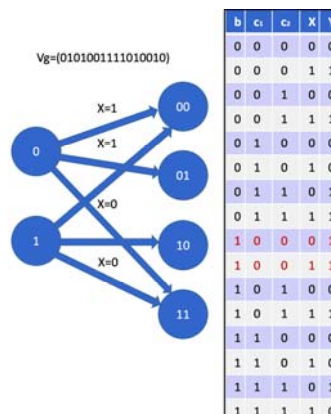


Рисунок 12 – Граф автомата зі змінними для управління переходами

Наступний граф (рис. 13) показує ефективність опису в формі таблиці та вектора.

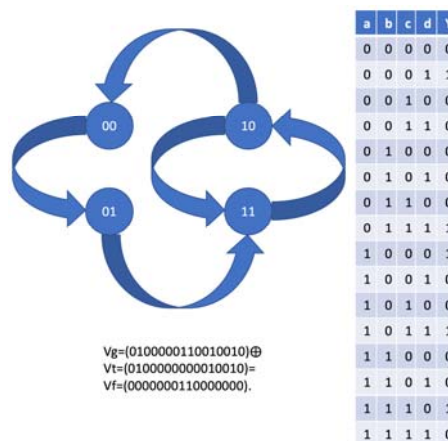


Рисунок 13 – Таблиця істинності і вектор переходів графа

Цей вектор може бути використаний для вирішення завдань тестування, включаючи створення моделі несправностей, синтез тестів для них, моделювання несправностей векторно-дедуктивним методом. Дані технології, орієнтовані на табличну і векторну форму подання функцій і структур, описані публікаціями [18–20]. Наприклад, константні несправності координат вектора  $Y$  ідентифікують несправності наявності-відсутності переходів: 1) константа 0 створює помилку відсутності переходу, коли він є в моделі, 2) константа 1 – наявність помилкового переходу, коли його насправді немає. Як приклад тут подані три вектори: опису графа  $V_g$ , завдання тесту  $V_t$ , а також результат їх взаємодії  $V_f = V_g \oplus V_t$  в формі вектора несправностей  $V_f$  введеного класу, які перевіряються тестом  $V_t$ . Інтерпретація тестування несправностей в векторі  $V_f = (0000000110000000)$ : перевірка відсутності пе-

реходів між вершинами 01 – 11 та 10 – 00, які повинні бути в специфікованій моделі автомата. На рис. 14 зображено граф переходів  $\overline{RS}$ -тригера, який має три стійких стани 01, 10, 11, а також один неможливий – 00.

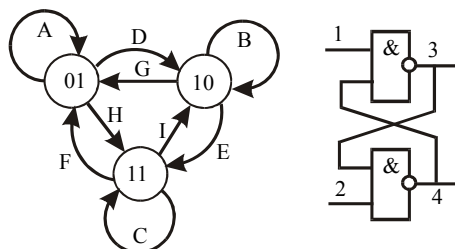


Рисунок 14 – Граф переходів  $\overline{RS}$ -тригера

Наступна таблиця істинності (табл. 3) являє собою проміжні дані для формування векторної форми опису графа переходів, яка записана в правій колонці  $Y = (0000011101\ 110111)$ .

Таблиця 3 – Таблиця істинності

X1	X2	Y1	Y2	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Досить просто визначити потужність несправностей переходів, які прив'язуються до повного графу, що становить  $2 \cdot n$  можливих несправностей, протилежних за знаком вектору стану таблиці істинності  $Y = (111110001\ 0001000)$ . Природно, що синтезований тест повинен покривати згенеровану множину несправностей.

Наприклад, два вектора  $a = 00111100$  і  $b = 10101010$ , що мають несуттєві нульові однойменні координати, автоматично виключаються з нормованого оцінювання, завдяки врахуванню і підрахунку тільки одиничних значень в результуючих векторах:

$$S(a,b) = \frac{\sum_{i=1}^n (00111100 \wedge 10101010 = 001010000) = 2}{\sum_{i=1}^n (00111100 \vee 10101010 = 10111110) = 6} = 0,33;$$

$$D(a,b) = \frac{\sum_{i=1}^n (00111100 \oplus 10101010 = 10010110) = 4}{\sum_{i=1}^n (00111100 \vee 10101010 = 10111110) = 6} = 0,66.$$

Розглянемо синтез дедуктивної логіки для and-елемента:

$$Y = x_1 \wedge x_2 = x_1 x_2 \rightarrow (X_1 \oplus T_1)(X_2 \oplus T_2) \oplus Y.$$

$$L[T = (00,01,10,11), F = (x_1 \wedge x_2)] = (00 \vee 01 \vee 10 \vee 11) \wedge [(X_1 \oplus T_{i1})(X_2 \oplus T_{i2}) \oplus Y_i] = L\{\overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_1} x_2 \vee x_1 \overline{x_2} \vee x_1 x_2\} [(X_1 \oplus T_{i1})(X_2 \oplus T_{i2}) \oplus Y_i] = \overline{x_1 x_2} [(X_1 \oplus 0) \wedge (X_2 \oplus 0) \oplus 0] \vee \overline{x_1} x_2 [(X_1 \oplus 0)(X_2 \oplus 1) \oplus 0] \vee x_1 \overline{x_2} \wedge [(X_1 \oplus 1)(X_2 \oplus 0) \oplus 1] \vee x_1 x_2 [(X_1 \oplus 1)(X_2 \oplus 1) \oplus 1] =$$

$$= \overline{x_1 x_2} (X_1 X_2) \vee \overline{x_1} x_2 (X_1 \overline{X_2}) \vee x_1 \overline{x_2} (\overline{X_1} X_2) \vee x_1 x_2 (\overline{X_1} \overline{X_2}).$$

Цікаво, що синтез дедуктивної логіки для xor-елемента створює функцію, рівну вихідній:

$$Y = x_1 \oplus x_2 \Rightarrow (X_1 \oplus T_1) \oplus (X_2 \oplus T_2) \oplus Y.$$

$$L[T = (00,01,10,11), F = (x_1 \oplus x_2)] = (00 \vee 01 \vee 10 \vee 11) [(X_1 \oplus T_{i1}) \oplus (X_2 \oplus T_{i2}) \oplus Y_i] = L\{\overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_1} x_2 \vee x_1 \overline{x_2} \vee x_1 x_2\} [(X_1 \oplus T_{i1}) \oplus (X_2 \oplus T_{i2}) \oplus Y_i] =$$

$$= \overline{x_1 x_2} [(X_1 \oplus 0) \oplus (X_2 \oplus 0) \oplus 0] \vee \overline{x_1} x_2 \wedge \wedge [(X_1 \oplus 0) \oplus (X_2 \oplus 1) \oplus 0] \vee x_1 \overline{x_2} [(X_1 \oplus 1) \oplus (X_2 \oplus 0) \oplus 1] \vee x_1 x_2 [(X_1 \oplus 1) \oplus (X_2 \oplus 1) \oplus 1] =$$

$$= \overline{x_1 x_2} (X_1 \oplus X_2) \vee \overline{x_1} x_2 (X_1 \oplus X_2) \vee x_1 \overline{x_2} (X_1 \oplus X_2) \vee x_1 x_2 (X_1 \oplus X_2) = X_1 \oplus X_2 = \overline{X_1} X_2 \vee X_1 \overline{X_2}.$$

Аналогічний результат має ще тільки одна функція – not-xor:

$$Y = \overline{x_1 \oplus x_2} \Rightarrow \overline{(X_1 \oplus T_1) \oplus (X_2 \oplus T_2)} \oplus Y.$$

$$L[T = (00,01,10,11), F = \overline{x_1 \oplus x_2}] = (00 \vee 01 \vee 10 \vee 11) \wedge \wedge [(X_1 \oplus T_1) \oplus (X_2 \oplus T_2) \oplus Y_i] = L\{\overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_1} x_2 \vee x_1 \overline{x_2} \vee x_1 x_2\} [(X_1 \oplus T_1) \oplus (X_2 \oplus T_2) \oplus Y_i] =$$

$$= \overline{x_1 x_2} [(X_1 \oplus 0) \oplus (X_2 \oplus 0) \oplus 1] \vee \vee \overline{x_1} x_2 [(X_1 \oplus 0) \oplus (X_2 \oplus 1) \oplus 0] \vee \vee x_1 \overline{x_2} [(X_1 \oplus 1) \oplus (X_2 \oplus 0) \oplus 0] \vee \vee x_1 x_2 [(X_1 \oplus 1) \oplus (X_2 \oplus 1) \oplus 1] =$$

$$= \overline{x_1 x_2} (X_1 \oplus X_2) \vee \overline{x_1} x_2 (X_1 \oplus X_2) \vee x_1 \overline{x_2} (X_1 \oplus X_2) \vee x_1 x_2 (\overline{X_1} \overline{X_2}) \vee x_1 x_2 (X_1 \oplus X_2) =$$

$$= X_1 \oplus X_2 = \overline{X_1} X_2 \vee X_1 \overline{X_2}.$$

Синтез дедуктивної логіки  $L$  на тестових наборах  $T$  для двухвходового og-елемента  $F$  також здійснюється за правилом  $F = L \oplus T$ :  $x_1 \vee x_2 = (X_1 \oplus T_{i1}) \vee (X_2 \oplus T_{i2}) \oplus Y_i$ .

Подальші найпростіші перетворення призводять до синтезу дедуктивної логіки:

$$L[T = (00,01,10,11), F = (x_1 \vee x_2)] = (00 \vee 01 \vee 10 \vee 11) \wedge \wedge [(X_1 \oplus T_{i1}) \vee (X_2 \oplus T_{i2}) \oplus Y_i] = L\{\overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_1 x_2} \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_2\}[(X_1 \oplus T_{i1} \vee X_2 \oplus T_{i2}) \oplus Y_i] =$$

$$= \overline{x_1 x_2} \wedge [(X_1 \oplus 0) \vee (X_2 \oplus 0) \oplus 0] \vee \vee \overline{x_1 x_2} [(X_1 \oplus 0) \vee (X_2 \oplus 1) \oplus 1] \vee \vee x_1 x_2 [(X_1 \oplus 1) \vee (X_2 \oplus 0) \oplus 1] \vee \vee x_1 x_2 [(X_1 \oplus 1) \vee (X_2 \oplus 1) \oplus 1] =$$

$$= \overline{x_1 x_2} (X_1 \vee X_2) \vee \overline{x_1 x_2} (\overline{X_1 X_2}) \vee x_1 x_2 (\overline{X_1 X_2}) \vee x_1 x_2 (X_1 X_2).$$

Далі наведені приклади отримання матриці дедуктивних векторів і відповідних їм функцій для логіки (and, or, xor, not-xor, not, repeater) на основі використання тільки кубітних покриттів функціональностей [18, 24, 27]:

Q <sub>and</sub>	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	L <sub>3</sub>	L <sub>4</sub>
0	0	0	0	1
0	0	0	0	1
0	0	0	0	1
1	1	1	1	0

 $\rightarrow$ 

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

 $\rightarrow$ 

X <sub>1</sub> X <sub>2</sub>	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	L <sub>3</sub>	L <sub>4</sub>
00	0	0	0	0
01	0	0	1	1
10	0	1	0	1
11	1	0	0	1

 $\rightarrow$ 

$$\rightarrow L = (00)(X_1 X_2) \vee (01)(\overline{X_1 X_2}) \vee (10)(\overline{X_1 X_2}) \vee (11)(X_1 X_2).$$

Q <sub>or</sub>	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	L <sub>3</sub>	L <sub>4</sub>
0	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	0	0
1	1	0	0	0

 $\rightarrow$ 

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

 $\rightarrow$ 

X <sub>1</sub> X <sub>2</sub>	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	L <sub>3</sub>	L <sub>4</sub>
00	0	0	0	0
01	1	1	0	0
10	1	0	1	0
11	1	0	0	1

 $\rightarrow$ 

$$\rightarrow L = (00)(X_1 \vee X_2) \vee (01)(\overline{X_1 X_2}) \vee (10)(\overline{X_1 X_2}) \vee (11)(X_1 X_2).$$

Q <sub>xor</sub>	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	L <sub>3</sub>	L <sub>4</sub>
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0

 $\rightarrow$ 

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

 $\rightarrow$ 

X <sub>1</sub> X <sub>2</sub>	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	L <sub>3</sub>	L <sub>4</sub>
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
10	1	1	1	1
11	0	0	0	0

 $\rightarrow$ 

$$\rightarrow L = (00 \vee 01 \vee 10 \vee 11)(\overline{X_1 X_2} \vee X_1 \overline{X_2}) = (xx)(\overline{X_1 X_2} \vee X_1 \overline{X_2}).$$

Q <sub>xnor</sub>	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	L <sub>3</sub>	L <sub>4</sub>
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0

 $\rightarrow$ 

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

 $\rightarrow$ 

X <sub>1</sub> X <sub>2</sub>	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	L <sub>3</sub>	L <sub>4</sub>
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
10	1	1	1	1
11	0	0	0	0

 $\rightarrow$ 

$$\rightarrow L = (00 \vee 01 \vee 10 \vee 11)(\overline{X_1 X_2} \vee X_1 \overline{X_2}) = (xx)(\overline{X_1 X_2} \vee X_1 \overline{X_2}).$$

Q <sub>not</sub>	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>
1	0	1
0	1	0

 $\rightarrow$ 

1	2
2	1

 $\rightarrow$ 

X	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>
0	0	0
1	1	1

 $\rightarrow$

$$\rightarrow L = (0 \vee 1)(X \vee X) = (xx)(X).$$

Q <sub>rep</sub>	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>
0	0	1
1	1	0

 $\rightarrow$ 

1	2
2	1

 $\rightarrow$ 

X	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>
0	0	0
1	1	1

 $\rightarrow$

$$\rightarrow L = (0 \vee 1)(X \vee X) = (xx)(X).$$

Тут процедура перестановки бітів є рекурсивною і регулярною, але не є обчислювально складною [28, 29].

У таблиці 4 наведені: стани вхідних змінних, які відповідають значенням координат кубітного вектора-покриття, булеві похідні, отриманий тест об'єднання похідних (Test) і мінімальний тест-вектор (T<sub>min</sub>).

Таблиця 4 – Таблиця даних

X <sub>1</sub>	.....11111111
X <sub>2</sub>	....1111....1111
X <sub>3</sub>	..11..11..11..11
X <sub>4</sub>	.1.1.1.1.1.1.1.1
Q	1.....1
Q'(X <sub>1</sub> )	1.....11.....1
Q'(X <sub>2</sub> )	1...1.....1...1
Q'(X <sub>3</sub> )	1.1.....1.1
Q'(X <sub>4</sub> )	11.....11
Test =	111.1...11...1.111
T <sub>min</sub> =	11.....11.....11

Для візуального сприйняття таблиці даних точками відзначені нульові стани координат таблиці істинності і матриці похідних. В результаті виконання og-операції над векторами кубітних похідних було отримано тест, який містить 10 вхідних наборів T = (1110100110010111). Він є тестом діагностування для одиночних константних несправностей.

Подальша процедура мінімізації тесту здійснюється на основі дедуктивного моделювання, з урахуванням структури схеми, шляхом знаходження квазімінімального покриття (тут не розглядається) всіх змінних-стовпців таблиці нульовими і одиничними значеннями виявлених константних несправностей.

Виконання даної процедури формує результат з шести тестових наборів, наведених в таблиці 5.

Тут точками відзначені координати з неперевірюваними несправностями, FD – Fault Detected, FC – Fault Coverage, X = {0,1}.

Таблиця 5 – Тестові набори

Test	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	FD	FC
000011100001	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	50	50
000111000010	.	.	.	0	.	.	1	.	.	0	1	16	66	
011100001000	.	.	.	.	1	.	.	0	.	.	1	12	75	
100001110000	0	.	.	1	.	0	.	.	.	1	16	87		
111000000100	.	.	.	.	1	.	.	.	0	.	1	12	91	
111100000001	0	0	0	0	.	.	.	1	1	1	1	0	37	100
U =	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		



## 6 РЕЗУЛЬТАТИ

Таким чином, векторна форма опису дає можливість застосувати напрацьовані вченими технології синтезу та аналізу тестів логічних схем для ефективного вирішення завдань тестування графових структур і автоматних моделей цифрових пристроїв.

При вимірі векторів опису процесів немає потреби обчислювати обидві оцінки за даними формулами. Досить визначити одну з них, а другу можна отримати за формулою доповнення:  $D(a, b) = 1 - S(a, b)$ ;  $S(a, b) = 1 - D(a, b)$ .

Результати синтезу дедуктивної логіки для базисних елементів (and, or, not) орієнтовані на апаратну реалізацію методу моделювання несправностей, де фігурують вхідні тестові набори в форматі  $(x_1 x_2)$ , а також вектори або списки вхідних несправностей  $(X_1 X_2)$ , що транспортуються на вихід логічного елемента.

Запропонований метод синтезу дедуктивних матриць для моделювання несправностей відрізняється від відомих аналогів оригінальністю математичних рішень, високим рівнем паралелізму і компактністю структур даних, що дозволяє використовувати його програмну чи апаратну реалізацію для синтезу, аналізу, тестування, верифікації та діагностування цифрових систем на кристалах. Для розвитку memory-driven logic-free комп'ютерингу запропонований кубітно-векторний дедуктивний аналіз є істотним внеском в проектування ремонтпридатних цифрових систем регістрового і системного рівня опису [18].

Проведені експерименти з синтезу тестів на 16 схемах, що містять 4–10 вхідних змінних, показали: 1) для чотирьох схем були отримані оптимальні тести; 2) для дванадцяти схем тести відрізнялися від оптимальних не більше, ніж на 25 відсотків; 3) обчислювальна складність запропонованого кубітного методу синтезу квазіоптимального тесту для логічної функціональності від  $n$  змінних визначається оцінкою, яка формує часові витрати на взяття кубітних похідних і мінімізацію тесту:  $Q = 2n + 2n^2 = 2n(n + 1)$ .

## 7 ОБГОВОРЕННЯ

Основне рівняння тестування, яке використовується для цифрових систем, також толерантно і може бути застосовано для тестування графових структур. Природно, вектор графа може бути також перетворений до матричної форми, яка визначає підмножину декартового квадрата щодо кодових позначень вершин. Але в цьому випадку необхідно використовувати вже інші специфічні матричні методи синтезу та аналізу графових структур.

Відмінністю формованої оцінки від відстані Хеммінга є виключення з метрики і структур даних умови існування двох нулів на однойменних координатах, що істотно підвищує адекватність вимірювання процесів.

Інтеграція отриманої дедуктивної логіки (рис. 15) представлена універсальним дедуктивним процесором [18, 26, 27] для обробки логічних схем в базисі (and, or, not), де  $V$  – змінна вибору типу логічного елемента для його дедуктивного моделювання з метою транспортування вхідних списків несправностей на вихід.

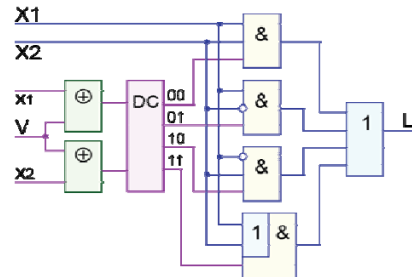


Рисунок 15 – Дедуктивний процесор

У схемі інвертор відсутній через його неістотність (не вплив) на процес транспортування несправностей. Процесор орієнтований на його імплементацію як засобу BIST [1,11], яке може бути використане в режимі онлайн тестування, моделювання та діагностування несправностей для цифрових систем на кристалах вентиляційного рівня. Слід зауважити, що тема мінімізації дедуктивної логіки для схем великої розмірності відсутня в сучасних публікаціях.

Висока продуктивність синтезу дедуктивних кубітних покриттів  $Q = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$  є підставою для його використання в режимі online, оскільки регістрова реалізація фактично двох операцій: xor-порівняння і перестановки бітів, дозволить звести згадану оцінку до 2–5 автоматних тактів. Крім того, дві згадані операції можна об'єднати в одну процедуру, виконувану в одному автоматному такті. Примітно, що для  $X$ -функціональності довільної складності процедура синтезу тестів відсутня, а його запис визначається всіма одиничними координатами  $Q$ -вектора, доповненими нульовою координатою. Тест для  $X$ -функцій (3-xor, 3-not-xor) формується таким чином:

$$T = T^1 \vee T_i^0;$$

$$T^1 = \forall T_i : f(T_i) = 1;$$

$$T_i^0 \in T^0 = \forall T_i : f(T_i) = 0;$$

$$T(01101001) = (001 \vee 010 \vee 100 \vee 111) \vee 000;$$

$$T(10010110) = (000 \vee 011 \vee 101 \vee 110) \vee 001.$$

Потужність тесту для  $X$ -функції від  $n$  змінних завжди дорівнює половині довжини кубітного покриття плюс одиниця:  $Q = 1 + \frac{1}{2} \times 2^{2^n}$ .

## ВИСНОВКИ

В роботі розглянута задача, пов'язана з розробкою інноваційної технології кубітно-векторного синтезу і

дедуктивного аналізу тестів для їх верифікації на основі векторних структур даних, що істотно спрощують алгоритми, які можуть бути вбудовані як компоненти BIST в цифрові системи на кристалах.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що:

1) вперше розроблено векторну форму опису структур, яка дає можливість застосувати напрацьовані вченими технології синтезу та аналізу тестів логічних схем для ефективного вирішення задач тестування графових структур та автоматних моделей цифрових пристроїв;

2) вперше отримано нову технологічну метрику хог-відношення в довільному форматі даних: функція-тест-несправність, яка є утвореною для формулювання всіх завдань, пов'язаних з синтезом тестів, функціональних описів і моделюванням несправностей SoC;

3) вперше розроблено новий метод синтезу дедуктивних матриць для моделювання несправностей цифрових схем логічного і RT-рівня, який відрізняється від відомих аналогів оригінальністю математичних рішень, високим рівнем паралелізму і компактністю кубітно-векторних структур даних, що дозволяє використовувати його програмну чи апаратну реалізацію для синтезу, аналізу, тестування, верифікації та діагностування SoC;

4) вперше розроблено новий дедуктивний процесор для моделювання несправностей, який орієнтований на імплементацію як засобу BIST, використовуваного в режимі онлайн тестування, моделювання та діагностування несправностей для цифрових систем на кристалах;

5) вперше отримано нову кубітно-векторну форму опису цифрових систем, яка перевершує існуючі способи завдання обчислювальних пристроїв за метриками: технологічність, компактність, швидкодія і якість. Кубітно-векторне покриття є memo-driven описом функціональності для більш простого рішення задач аналізу, синтезу, тестування і моделювання цифрових пристроїв.

Практична цінність одержаних результатів визначається розробкою програмного додатка QuaSim Services (рис. 16), що реалізує основні сервіси тестування (Test Synthesis), моделювання (Fault Simulation) та діагностування (Fault Diagnosis), що використовуються в навчальному процесі для вивчення переваг кубітно-векторних структур даних (Qubit Data Structures) і алгоритмів (Algorithms) [18, 26, 29]. Бібліотека (Library) включає схеми (Circuits), логічні елементи (Elements), тести (Tests), в тому числі таблицю виявлення несправностей (Fault Detection Table, FDT).

Сервіси мають ергономічний візуальний графічний інтерфейс (GUI "Qubit") [18, 19, 20] для ручного синтезу цифрових логічних схем, де кожен універсальний елемент визначається кубітним покриттям або його десятковим еквівалентом, що істотно зменшує час для введення схемного опису і подальшого дослідження: синтез тестів, діагностування, моделювання несправностей та справної поведінки (modeling and simulation).

© Хаханова А. В., Хаханов В. І., Чумаченко С. В., Литвинова Є. І., Рахліс Д. Ю., 2021  
DOI 10.15588/1607-3274-2021-3-7

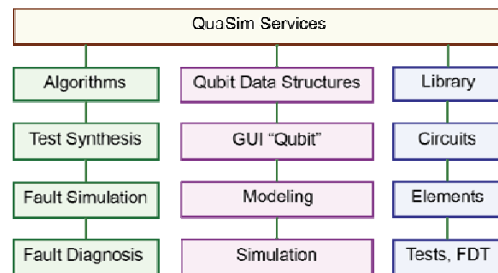


Рисунок 16 – Сервіси тестування на основі векторних структур даних

Перспективи подальших досліджень полягають у імплементації векторних кубітних структур даних в технології класичних обчислювальних процесів, а також подальшу орієнтацію алгоритмів і структур даних на квантові обчислювачі.

### ПОДЯКИ

У даній роботі використані результати, отримані авторами у 2019–2021 роках на кафедрі Автоматизації проектування обчислювальної техніки Харківського національного університету радіоелектроніки. Автори вдячні колегам за їх активну участь у обговоренні та підтримці наукової школи «Проектування і технічна діагностика цифрових систем на кристалах, комп'ютерів і мереж», розуміння важливого значення розвитку фундаментальних і прикладних досліджень теорії квантових обчислювальних процесів для аналізу кіберпростору. Всі автори заявляють, що не мають фінансової підтримки.

### ЛІТЕРАТУРА / LITERATURA

1. Abramovici M. Digital System Testing and Testable Design / M. Abramovici, M. A. Breuer, A. D. Friedman. – New York : Computer Society Press, 1990. – 652 p.
2. Comparison of Parallel and Deductive Fault Simulation Methods / [H. Y. Chang, S. G. Chappell, C. H. Elmendorf et al.] // IEEE Transactions on Computers. – November 1974. – Vol. C-23, № 11. – P. 1132–1138. DOI: 10.1109/TC.1974.223820.
3. Takahashi N. Fault simulation for multiple faults by Boolean function manipulation / N. Takahashi, N. Ishiura, S. Yajima // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. – April 1994. – Vol. 13, № 4. – P. 531–535. DOI: 10.1109/43.275363.
4. Menon P.R. Deductive Fault Simulation with Functional Blocks / P. R. Menon, S. G. Chappell // IEEE Transactions on Computers. – Aug. 1978. – Vol. C-27, № 8. – P. 689–695. DOI: 10.1109/TC.1978.1675175.
5. Fujiwara H. Logic Testing and Design for Testability / H. Fujiwara // Cambridge: MIT Press. – 1985. – P. 84–108.
6. An Efficient Degraded Deductive Fault Simulator for Small-Delay Defects / [T. Liu, T. Yu, S. Wang et al.] // IEEE Access. – 2020. – Vol. 8. – P. 204855–204862. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3037292.
7. Pomeranz I. Forward-looking fault simulation for improved static compaction / I. Pomeranz, S. M. Reddy // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. – Oct. 2001. – Vol. 20, № 10. – P. 1262–1266. DOI: 10.1109/43.952743.

8. Kinoshita Y. A Test Generation Method Based on k-Cycle Testing for Finite State Machines / Y. Kinoshita, T. Hosokawa, H. Fujiwara // IEEE 25th International Symposium on On-Line Testing and Robust System Design (IOLTS), Rhodes, Greece, 1–3 July 2019: proceedings. – Rhodes: IEEE, 2019. – P. 232–235. DOI: 10.1109/IOLTS.2019.8854426.
9. Fault modeling and test algorithm creation strategy for FinFET-based memories / [G. Harutyunyan, G. Tshagharyan, V. Vardanian et al.] // IEEE 32nd VLSI Test Symposium (VTS), Napa, CA, 13–17 April 2014: proceedings. – Napa: IEEE, 2014. – P. 1–6. DOI: 10.1109/VTS.2014.6818747.
10. Zolfy M. Adaptation of an event-driven simulation environment to sequentially propagated concurrent fault simulation / M. Zolfy, S. Mirkhani, Z Navabi // Design, Automation and Test in Europe. Conference and Exhibition, Munich, Germany, 13–16 March 2001: proceedings. – Munich : IEEE, 2001. – P. 1530–1591. DOI: 10.1109/DATE.2001.915173.
11. Zainalabedin N. Digital System Test and Testable Design using HDL models and architectures / N. Zainalabedin. – New York: Springer, 2011. – 391 p.
12. Pomeranz I. Unspecified Transition Faults: A Transition Fault Model for At-Speed Fault Simulation and Test Generation / I. Pomeranz, S. M. Reddy // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. – Jan. 2008. – Vol. 27, № 1. – P. 137–146. DOI: 10.1109/TCAD.2007.907000.
13. Ubar R. Fast Fault Simulation for Extended Class of Faults in Scan Path Circuits / [R. Ubar, S. Devadze, J. Raik et al.] // Fifth IEEE International Symposium on Electronic Design, Test & Applications, Ho Chi Minh City, Vietnam, 13–15 Jan. 2010: proceedings. – Vietnam: IEEE, 2010. – P. 14–19. DOI: 10.1109/DELTA.2010.32.
14. Fast RTL Fault Simulation Using Decision Diagrams and Bitwise Set Operations / [U. Reinsalu, J. Raik, R. Ubar et al.] // IEEE International Symposium on Defect and Fault Tolerance in VLSI and Nanotechnology Systems, Vancouver, BC, 3–5 Oct. 2011: proceedings. – Vancouver: IEEE, 2001. – P. 164–170. DOI: 10.1109/DFT.2011.42.
15. Dobai R. Deductive Fault Simulation for Asynchronous Sequential Circuits / R. Dobai, E. Gramatova // 12th Euromicro Conference on Digital System Design, Architectures, Methods and Tools, Patras, 27–29 Aug. 2009 : proceedings. – Patras : IEEE, 2009. – P. 459–464. DOI: 10.1109/DSD.2009.129.
16. Temma S. The Document Similarity Index based on the Jaccard Distance for Mail Filtering / S. Temma, M. Sugii, H. Matsuno // 34th International Technical Conference on Circuits/Systems, Computers and Communications (ITC-CSCC), JeJu, Korea (South), 23–26 June 2019: proceedings. – JeJu : IEEE, 2019. – P. 1–4. DOI: 10.1109/ITC-CSCC.2019.8793419.
17. Jaccard P. Distribution de la flore alpine dans le Bassin des Dranses et dans quelques regions voisines / P. Jaccard // Bulletin de la Societe Vaudoise des Sciences. Naturelles. – 1901. – Vol. 37, № 140. – P. 241–272. DOI: 10.5169/seals-266440.
18. Hahanov V. Cyber Physical Computing for IoT-driven Services / V. Hahanov. – New York : Springer, 2018. – 279 p.
19. Deductive qubit fault simulation / [I. Hahanov, S. Chumachenko, I. Iemelianov et al.] // 14th International Conference the Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM), Lviv, 21–25 Feb. 2017: proceedings. – Lviv: IEEE, 2017. – P. 256–259. DOI: 10.1109/CADSM.2017.7916129.
20. Quantum sequencer for the minimal test synthesis of black-box functionality / [V. Hahanov, I. Iemelianov, S. Chumachenko et al.] // IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS), Novi Sad, 29 Sept.–2 Oct. 2017: proceedings. – Novi Sad: IEEE, 2017. – P. 1–6. DOI: 10.1109/EWDTS.2017.8110148.
21. “Quantum” diagnosis and simulation of SoC / [V. Hahanov, I. Yemelyanov, V. Obrizan et al.] // XI International Conference on Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH), Lviv, 2–6 Sept. 2015: proceedings. – Lviv : IEEE, 2015. – P. 58–60.
22. Test Synthesis for Logical X-functions / [V. Hahanov, M. Liubarskyi, W. Gharibi et al.] // IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS), Kazan, 14–17 Sept. 2018: proceedings. – Kazan: IEEE, 2018. – P. 1–9. DOI: 10.1109/EWDTS.2018.8524863.
23. Qubit Test Synthesis Processor for SoC Logic / [W. Gharibi, D. Devadze, V. Hahanov et al.] // IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS), Batumi, Georgia, 13–16 Sept. 2019: proceedings. – Batumi: IEEE, 2019. – P. 1–5. DOI: 10.1109/EWDTS.2019.8884476.
24. Quantum Models and Method for Analysis and Testing Computing Systems / [V. I. Hahanov, S. M. Hyduke, W. Gharibi et al.] // 11th International Conference on Information Technology: New Generations, Las Vegas, NV, 7–9 April 2014: proceedings. – Las Vegas : IEEE, 2014. – P. 430–434. DOI: 10.1109/ITNG.2014.125.
25. Qubit Fault Detection in SoC Logic / [M. Karavay, V. Hahanov, E. Litvinova et al.] // IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS), Batumi, Georgia, 13–16 Sept. 2019: proceedings. – Batumi: IEEE, 2019. – P. 1–7. DOI: 10.1109/EWDTS.2019.8884475.
26. Quantum Deductive Simulation for Logic Functions / [V. Hahanov, A. V. Hacimahmud, E. Litvinova et al.] // IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS), Kazan, 14–17 Sept. 2018: proceedings. – Kazan: IEEE, 2018. – P. 1–7. DOI: 10.1109/EWDTS.2018.8524619.
27. Similarity-Difference Analysis and Matrix Fault Diagnosis of SoC-components / [V. Hahanov, M. Karavay, V. Sergienko et al.] // IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS), Varna, Bulgaria, 4–7 Sept. 2020: proceedings. – Varna: IEEE, 2020. – P. 1–5. DOI: 10.1109/EWDTS50664.2020.9224740.
28. Qubit-driven Fault Simulation / [V. Hahanov, W. Gharibi, E. Litvinova et al.] // IEEE Latin American Test Symposium (LATS), Santiago, Chile, 11–13 March 2019: proceedings. – Santiago: IEEE, 2019. – P. 1–7. DOI: 10.1109/LATW.2019.8704583.
29. Qubit test synthesis of the functionality / [V. Hahanov, T. B. Amer, E. Litvinova et al.] // 14th International Conference The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM), Lviv, 21–25 Feb. 2017: proceedings. – Lviv: IEEE, 2017. – P. 251–255. DOI: 10.1109/CADSM.2017.7916128.
30. Deductive qubit fault simulation / [I. Hahanov, S. Chumachenko, I. Iemelianov et al.] // 14th International Conference the Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM), Lviv, 21–25 Feb. 2017: proceedings. – Lviv: IEEE, 2017. – P. 256–259. DOI: 10.1109/CADSM.2017.7916129.

Received 22.03.2021.  
Accepted 16.08.2021

## ВЕКТОРНЫЕ МОДЕЛИ ЛОГИКИ И СТРУКТУРЫ ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ ЦИФРОВЫХ СХЕМ

**Хаханова А. В.** – канд. техн. наук, профессор каф. Автоматизации проектирования вычислительной техники, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина.

**Хаханов В. И.** – д-р техн. наук, профессор каф. Автоматизации проектирования вычислительной техники, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина.

**Чумаченко С. В.** – д-р техн. наук, профессор, зав. каф. Автоматизации проектирования вычислительной техники, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина.

**Литвинова Е. И.** – д-р техн. наук, профессор каф. Автоматизации проектирования вычислительной техники, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина.

**Рахлис Д. Е.** – канд. техн. наук, доцент каф. Автоматизации проектирования вычислительной техники, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина.

### АННОТАЦИЯ

**Актуальность.** Известно, что структуры данных являются определяющими для создания эффективных параллельных алгоритмов и высокопроизводительных вычислительных устройств. Поэтому разработка математически совершенных и технологически простых структур данных занимает около 80 процентов времени проектирования, когда на алгоритмы и их hardware-software кодирование затрачивается около 20 процентов временных и материальных ресурсов. Это обуславливает поиск таких примитивов структур данных, которые существенно упростят работающие на них параллельные высокопроизводительные алгоритмы. Предлагаются модели и методы для тестирования и моделирования цифровых систем, содержащие отдельные преимущества квантового компьютеринга в части имплементации векторных кубитных структур данных в технологии классических вычислительных процессов.

**Цель.** Разработка инновационной технологии кубитно-векторного синтеза и дедуктивного анализа тестов для их верификации на основе векторных структур данных, существенно упрощающих алгоритмы, которые могут быть встроены в качестве компонентов BIST в цифровые системы на кристаллах.

**Метод.** Используется дедуктивное моделирование неисправностей для получения аналитических выражений, ориентированных на транспортирование списков неисправностей через функциональный или логический элемент на основе хог-операции, которая выполняет роль измерителя сходства-различия между тестом, функцией и неисправностями, заданными одинаково в одном из форматов – таблицей, графом, уравнением. Предлагается двоичный вектор, как самый технологичный примитив структур данных для задания логической функциональности в целях параллельного синтеза и анализа цифровых систем. Параллелизм решения комбинаторных задач есть физическое свойство квантового компьютеринга, которое в классическом компьютеринге, для параллельного моделирования и диагностирования неисправностей, обеспечивается унитарно-кодированными структурами данных, благодаря избыточной памяти.

**Результаты.** 1) Разработан метод аналитического синтеза дедуктивной логики для функциональных элементов вентильного уровня и уровня регистровых передач. 2) Предложен дедуктивный процессор для моделирования неисправностей на основе транспортирования входных списков или векторов неисправностей на внешние выходы цифровых схем. 3) Описаны кубитно-векторная форма задания логики и методы кубитного синтеза дедуктивных уравнений для моделирования неисправностей. 4) Разработан кубитно-векторный метод синтеза тестов, использующий производные, вычисляемые по векторным покрытиям логики. 5) Выполнена верификация моделей и методов на тестовых примерах в программной реализации структур и алгоритмов.

**Выводы.** Научная новизна заключается в новой парадигме технологии синтеза дедуктивной RTL-логики на основе метрического уравнения тестирования, формирующего хог-отношения между тестом, функцией и неисправностями. Вводится векторная форма описания структур, которая дает возможность применить известные технологии синтеза и анализа тестов логических схем для эффективного решения задач тестирования графовых структур и автоматных моделей цифровых устройств. Практическая значимость отражается в примерах аналитического синтеза дедуктивной логики для функциональных элементов векторного уровня и уровня регистровых передач. Предлагается дедуктивный процессор для моделирования неисправностей, который ориентирован на имплементацию в качестве средства BIST, используемое в режиме онлайн тестирования, моделирования и диагностирования неисправностей для цифровых систем на кристаллах. Предлагается кубитно-векторная форма описания цифровых систем, которая превосходит существующие способы задания вычислительных устройств по метрике: технологичность, компактность, быстрдействие и качество. Разработано программное приложение, которое реализует основные сервисы тестирования, моделирования и диагностирования, используемые в учебном процессе для изучения преимуществ кубитно-векторных структур данных и алгоритмов. Приводятся оценки вычислительной сложности процессов синтеза тестов и дедуктивных формул для логики и их использования при моделировании неисправностей.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** RTL логика, синтез, техническая диагностика, моделирование цифровых схем, X-функция, метрика сходства-различия, дедуктивная функция, метрика уравнения тестирования.

## VECTOR-DRIVEN LOGIC AND STRUCTURE FOR TESTING AND DEDUCTIVE FAULT SIMULATION

**Hahanova A.** – PhD, Associated Professor of Design Automation Department, Kharkov National University of Radio Electronics, Ukraine.

**Hahanov V.** – D. Sc., Professor of Design Automation Department, Kharkov National University of Radio Electronics, Ukraine.  
**Chumachenko S.** – D. Sc., Professor of Design Automation Department, Kharkov National University of Radio Electronics, Ukraine.  
**Litvinova E.** – D. Sc., Professor of Design Automation Department, Kharkov National University of Radio Electronics, Ukraine.  
**Rakhlis D.** – PhD, Associated Professor of Design Automation Department, Kharkov National University of Radio Electronics, Ukraine.

#### ABSTRACT

**Context.** It is known that data structures are decisive for the creation of efficient parallel algorithms and high-performance computing devices. Therefore, the development of mathematically perfect and technologically simple data structures takes about 80 percent of the design time, when about 20 percent of time and material resources are spent on algorithms and their hardware-software coding. This leads to search for such primitives of data structures that will significantly simplify the parallel high-performance algorithms which are working on them. Models and methods for testing and simulation of digital systems are proposed, which contain certain advantages of quantum computing in terms of implementation of vector qubit data structures in technology of classical computational processes.

**Objective.** The goal of the work is development of an innovative technology for qubit-vector synthesis and deductive analysis of tests for their verification based on vector data structures that greatly simplify algorithms that can be embedded as BIST components in digital systems on chips.

**Method.** The deductive faults simulation is used to obtain analytical expressions focused on transporting fault lists through a functional or logical element based on the xor-operation, which serves as a measure of similarity-difference between a test, a function and faults which is specified in the same way in one of the formats – a table, graph, equation. A binary vector is proposed as the most technologically advanced primitive of data structures for setting logical functionality for the purpose of parallel synthesis and analysis of digital systems. The parallelism of solving combinatorial problems is a physical property of quantum computing, which in classical computing, for parallel simulation and faults diagnostics, is provided by unitary-coded data structures due to excess memory.

**Results.** 1) A method of analytical synthesis of deductive logic for functional elements on the gate level and register transfer level has been developed. 2) A deductive processor for faults simulation based on transporting input lists or faults vectors to external outputs of digital circuits was proposed. 3) The qubit-vector form of logic setting and methods of qubit synthesis of deductive equations for faults simulation were described. 4) A qubit-vector method for the tests' synthesis which is using derivatives calculated by vector coverage of logic has been developed. 5) Models and methods verification is performed on test examples in the software implementation of structures and algorithms.

**Conclusions.** The scientific novelty lies in the new paradigm of the technology for the synthesis of deductive RTL logic based on metric test equation, which forms the. A vector form for structures description is introduced, which makes it possible to apply well-known technologies for the synthesis and analysis of logical circuits tests to effectively solve the problems of graph structures testing and state machine models of digital devices. The practical significance is reflected in the examples of analytical synthesis of deductive logic for functional elements on gate level and register transfer level. A deductive processor for faults simulation which is focused on implementation as a BIST tool, which is used in online testing, simulation and fault diagnosis for digital systems on chips is proposed. A qubit-vector form of the digital systems description is proposed, which surpasses the existing methods of computing devices development in terms of the metric: manufacturability, compactness, speed and quality. A software application has been developed that implements the main testing, simulation and diagnostics services which are used in the educational process to study the advantages of qubit-vector data structures and algorithms. The computational complexity of synthesis processes and deductive formulas for logic and their usage in fault simulation are given.

**KEYWORDS:** RTL logic, test synthesis, technical diagnostics, deductive fault simulation, X-function, similarity-difference metric, deductive function, metric test equation.

#### REFERENCES

1. Abramovici M., Breuer M. A., Friedman A. D. Digital System Testing and Testable Design. New York, Computer Society Press, 1990, 652 p.
2. Chang H. Y., Chappell S. G., Elmendorf C. H. et al. Comparison of Parallel and Deductive Fault Simulation Methods, *IEEE Transactions on Computers*. November 1974, Vol. C-23, № 11, pp. 1132–1138. DOI: 10.1109/T-C.1974.223820.
3. Takahashi N., Ishiura N., Yajima S. Fault simulation for multiple faults by Boolean function manipulation, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, April 1994, Vol. 13, № 4, pp. 531–535. DOI: 10.1109/43.275363.
4. Menon P. R., Chappell S. G. Deductive Fault Simulation with Functional Blocks, *IEEE Transactions on Computers*, Aug. 1978, Vol. C-27, № 8, pp. 689–695. DOI: 10.1109/TC.1978.1675175.
5. Fujiwara H. Logic Testing and Design for Testability, *Cambridge: MIT Press*, 1985, pp. 84–108.
6. Liu T., Yu T., Wang S. et al. An Efficient Degraded Deductive Fault Simulator for Small-Delay Defects, *IEEE Access*, 2020, Vol. 8, pp. 204855–204862. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3037292.
7. Pomeranz I., Reddy S. M. Forward-looking fault simulation for improved static compaction, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, Oct. 2001, Vol. 20, № 10, pp. 1262–1266. DOI: 10.1109/43.952743.
8. Kinoshita Y., Hosokawa T., Fujiwara H. A Test Generation Method Based on k-Cycle Testing for Finite State Machines, *IEEE 25th International Symposium on On-Line Testing and Robust System Design (IOLTS), Rhodes, Greece, 1–3 July 2019: proceedings*. Rhodes, IEEE, 2019, pp. 232–235. DOI: 10.1109/IOLTS.2019.8854426.
9. Harutyunyan G., Tshagharyan G., Vardanian V. et al. Fault modeling and test algorithm creation strategy for FinFET-based memories, *IEEE 32nd VLSI Test Symposium (VTS), Napa, CA, 13–17 April 2014: proceedings*. Napa, IEEE, 2014, pp. 1–6. DOI: 10.1109/VTS.2014.6818747.

10. Zolfy M., Mirkhani S., Navabi Z. Adaptation of an event-driven simulation environment to sequentially propagated concurrent fault simulation, *Design, Automation and Test in Europe. Conference and Exhibition, Munich, Germany, 13–16 March 2001: proceedings*. Munich, IEEE, 2001, pp. 1530–1591. DOI: 10.1109/DATE.2001.915173.
11. Zainalabedin N. Digital System Test and Testable Design using HDL models and architectures. New York, Springer, 2011, 391 p.
12. Pomeranz I., Reddy S. M. Unspecified Transition Faults: A Transition Fault Model for At-Speed Fault Simulation and Test Generation, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, Jan. 2008. Vol. 27, № 1, pp. 137–146. DOI: 10.1109/TCAD.2007.907000.
13. Ubar R., Devadze S., J. Raik et al. Fast Fault Simulation for Extended Class of Faults in Scan Path Circuits, *Fifth IEEE International Symposium on Electronic Design, Test & Applications, Ho Chi Minh City, Vietnam, 13–15 Jan. 2010: proceedings*. Vietnam, IEEE, 2010, pp. 14–19. DOI: 10.1109/DELTA.2010.32.
14. Reinsalu U., Raik J., Ubar R. et al. Fast RTL Fault Simulation Using Decision Diagrams and Bitwise Set Operations, *IEEE International Symposium on Defect and Fault Tolerance in VLSI and Nanotechnology Systems, Vancouver, BC, 3–5 Oct. 2011: proceedings*. Vancouver, IEEE, 2011, pp. 164–170. DOI: 10.1109/DFT.2011.42.
15. Dobai R., Gramatova E. Deductive Fault Simulation for Asynchronous Sequential Circuits, *12th Euromicro Conference on Digital System Design, Architectures, Methods and Tools, Patras, 27–29 Aug. 2009: proceedings*. Patras, IEEE, 2009, pp. 459–464. DOI: 10.1109/DSD.2009.129.
16. Temma S., Sugii M., Matsuno H. The Document Similarity Index based on the Jaccard Distance for Mail Filtering, *34th International Technical Conference on Circuits/Systems, Computers and Communications (ITC-CSCC), JeJu, Korea (South), 23–26 June 2019: proceedings*. JeJu, IEEE, 2019, pp. 1–4. DOI: 10.1109/ITC-CSCC.2019.8793419.
17. Jaccard P. Distribution de la flore alpine dans le Bassin des Dranses et dans quelques regions voisines, *Bulletin de la Societe Vaudoise des Sciences. Naturelles*, 1901, Vol. 37, № 140. – P. 241–272. DOI: 10.5169/seals-266440.
18. Hahanov V. Cyber Physical Computing for IoT-driven Services. New York, Springer, 2018, 279 p.
19. Hahanov I., Chumachenko S., Iemelianov I. et al. Deductive qubit fault simulation, *14th International Conference the Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM), Lviv, 21–25 Feb. 2017: proceedings*. Lviv, IEEE, 2017, pp. 256–259. DOI: 10.1109/CADSM.2017.7916129.
20. Hahanov V., Iemelianov I., Chumachenko S. et al. Quantum sequencer for the minimal test synthesis of black-box functionality, *IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS), Novi Sad, 29 Sept.–2 Oct. 2017: proceedings*. Novi Sad, IEEE, 2017, pp. 1–6. DOI: 10.1109/EWDTS.2017.8110148.
21. Hahanov V., Yemelyanov I., Obrizan V. et al. “Quantum” diagnosis and simulation of SoC, *XI International Conference on Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH), Lviv, 2–6 Sept. 2015: proceedings*. Lviv, IEEE, 2015, pp. 58–60.
22. Hahanov V., Liubarskyi M., Gharibi W. et al. Test Synthesis for Logical X-functions, *IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS), Kazan, 14–17 Sept. 2018: proceedings*. Kazan, IEEE, 2018, pp. 1–9. DOI: 10.1109/EWDTS.2018.8524863.
23. Gharibi W., Devadze D., Hahanov V. et al. Qubit Test Synthesis Processor for SoC Logic, *IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS), Batumi, Georgia, 13–16 Sept. 2019: proceedings*. Batumi, IEEE, 2019, pp. 1–5. DOI: 10.1109/EWDTS.2019.8884476.
24. Hahanov V. I., Hyduke S. M., Gharibi W. et al. Quantum Models and Method for Analysis and Testing Computing Systems, *11th International Conference on Information Technology: New Generations, Las Vegas, NV, 7–9 April 2014: proceedings*. Las Vegas, IEEE, 2014, pp. 430–434. DOI: 10.1109/ITNG.2014.125.
25. Karavay M., Hahanov V., Litvinova E. et al. Qubit Fault Detection in SoC Logic, *IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS), Batumi, Georgia, 13–16 Sept. 2019: proceedings*. Batumi, IEEE, 2019, pp. 1–7. DOI: 10.1109/EWDTS.2019.8884475.
26. Hahanov V., Hacimahmud A. V., Litvinova E. et al. Quantum Deductive Simulation for Logic Functions, *IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS), Kazan, 14–17 Sept. 2018: proceedings*. Kazan, IEEE, 2018, pp. 1–7. DOI: 10.1109/EWDTS.2018.8524619.
27. Hahanov V., Karavay M., Sergienko V. et al. Similarity-Difference Analysis and Matrix Fault Diagnosis of SoC-components, *IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS), Varna, Bulgaria, 4–7 Sept. 2020: proceedings*. Varna, IEEE, 2020, pp. 1–5. DOI: 10.1109/EWDTS50664.2020.9224740.
28. Hahanov V., Gharibi W., Litvinova E. et al. Qubit-driven Fault Simulation, *IEEE Latin American Test Symposium (LATS), Santiago, Chile, 11–13 March 2019: proceedings*. Santiago, IEEE, 2019, pp. 1–7. DOI: 10.1109/LATW.2019.8704583.
29. Hahanov V., Amer T. B., Litvinova E. et al. Qubit test synthesis of the functionality, *14th International Conference The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM), Lviv, 21–25 Feb. 2017: proceedings*. Lviv, IEEE, 2017, pp. 251–255. DOI: 10.1109/CADSM.2017.7916128.
30. Hahanov I., Chumachenko S., Iemelianov I. et al. Deductive qubit fault simulation, *14th International Conference the Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM), Lviv, 21–25 Feb. 2017: proceedings*. Lviv, IEEE, 2017, pp. 256–259. DOI: 10.1109/CADSM.2017.7916129.